Capitolo 2

Insiemi: rappresentazioni e operazioni

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l'AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

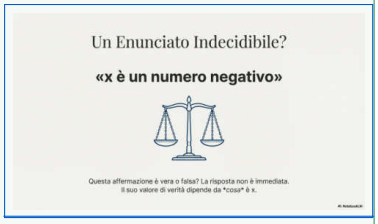
Schede, test e video di matematika.it

Esercizi del prof. De Capoa

Presentazioni — slide NotebookLM (clic per aprire il PDF)



Teoria degli insiemi



Logica e insiemi

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Audio overview — podcast NotebookLM (clic per ascoltare)

[IT] Insiemi e logica

Per insieme intendiamo ogni raccolta in un tutto M di oggetti m ben distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero."

— Georg Cantor (1895)

2.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

La parola *insieme* è probabilmente il termine più ricorrente in tutta la matematica. Quando diciamo "i numeri naturali", "i punti di una retta", "le soluzioni di un'equazione", stiamo sempre indicando un *insieme*.

Capire bene il linguaggio degli insiemi non è un esercizio fine a se stesso: è il vocabolario che permetterà di parlare in modo preciso di tutto ciò che incontreremo. Dire "$\sqrt{2}$ non è razionale" significa esattamente "$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$"; dire "ogni numero naturale è intero" significa $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Senza un linguaggio comune e condiviso non c'è dimostrazione possibile.

In questo capitolo costruiamo, un mattone alla volta, questo vocabolario: che cos'è un insieme, come lo si rappresenta, quali operazioni si possono fare tra insiemi e quali proprietà soddisfano. Sono nozioni che riprenderai in tutti i capitoli successivi.

2.2. Concetto di insieme e appartenenza

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 2.1 — Insieme, intuitivamente

Un **insieme** è una collezione di oggetti, detti **elementi**, percepiti come un tutto. Perché una collezione sia un insieme nel senso matematico è necessario che dato un qualsiasi oggetto si possa stabilire, senza ambiguità, se quell'oggetto appartiene o non appartiene alla collezione.

Indicheremo gli insiemi con lettere maiuscole (A, B, X, …) e i loro elementi con lettere minuscole (a, b, x, …). La relazione tra un elemento e l'insieme che lo contiene si scrive così:

$$x \in A \quad (\text{"}x \text{ appartiene ad } A\text{"}), \qquad x \notin A \quad (\text{"}x \text{ non appartiene ad } A\text{"}).$$

Esempio 2.1

Sia A l'insieme delle vocali della parola "matematica". Allora $a \in A$, $e \in A$, $i \in A$, mentre $b \notin A$ e $5 \notin A$. L'insieme è "ben definito": per ogni oggetto possiamo decidere se appartiene o no.

Attenzione!

Non tutte le collezioni del linguaggio comune sono insiemi in senso matematico. "L'insieme delle ragazze alte della classe" non è un insieme finché non fissiamo una soglia precisa: senza un criterio univoco di appartenenza, la collezione non è ben definita.

Nota

Due principi fondano la teoria degli insiemi:

1. un elemento può appartenere o non appartenere a un insieme, ma non entrambe le cose;
2. l'ordine in cui si elencano gli elementi non conta, e ogni elemento si conta una sola volta.

Quindi $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$ e $\{1, 1, 2, 3, 3\}$ rappresentano lo stesso insieme.

La **cardinalità** di un insieme finito A è il numero dei suoi elementi e si indica con $|A|$. Se $A = \{a, e, i, o, u\}$, allora $|A| = 5$.

2.3. Rappresentazioni: tabulare, caratteristica, Eulero-Venn

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Un insieme può essere descritto in tre modi equivalenti.

Rappresentazione tabulare (per elencazione). Si elencano fra parentesi graffe tutti gli elementi, separati da virgola:

$$V = \{a, e, i, o, u\}, \qquad P_{10} = \{2, 3, 5, 7\}.$$

È comoda quando gli elementi sono pochi. Per insiemi infiniti si usano i puntini di sospensione, purché la regola di formazione sia chiara:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}, \qquad \text{multipli di } 3 = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}.$$

Rappresentazione caratteristica (per proprietà). Si scrive una proprietà $P(x)$ che gli elementi devono soddisfare:

$$A = \{\, x \mid P(x) \,\}$$

e si legge "l'insieme degli x tali che vale $P(x)$". La barra verticale $\mid$ si pronuncia "tali che". Esempio:

$$P_{10} = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è primo e } x < 10 \,\}.$$

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Spesso si indica il *dominio* a sinistra della barra ($x \in \mathbb{N}$) e la condizione a destra.

Rappresentazione di Eulero-Venn (grafica). Si disegna l'insieme come una regione del piano (di solito un ovale) e si segnano al suo interno gli elementi. È utile per visualizzare relazioni tra più insiemi.

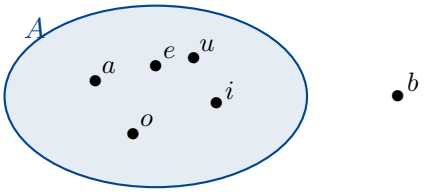


Figura 2.1: Diagramma di Eulero-Venn dell'insieme $V = \{a, e, i, o, u\}$ delle vocali. L'elemento b è esterno ($b \notin V$).

Esempio 2.2 — Tre forme per lo stesso insieme

L'insieme dei divisori positivi di 12 può essere scritto:

- tabulare: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$;
- caratteristica: $D_{12} = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 12 \,\}$;
- Eulero-Venn: un ovale contenente i sei punti $1, 2, 3, 4, 6, 12$.

2.4. Sottoinsiemi e inclusione

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 2.2 — Sottoinsieme

Dati due insiemi A e B, diciamo che A è **sottoinsieme** di B (oppure: A è incluso in B) se ogni elemento di A appartiene anche a B. Si scrive

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x : \; x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Se inoltre $A \neq B$ (cioè in B c'è almeno un elemento che non sta in A), si dice che A è **sottoinsieme proprio** di B e si scrive $A \subset B$.

Esempio 2.3

$\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, anzi $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ (sottoinsieme proprio). Si ha pure $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$: ogni naturale è intero, ogni intero è razionale, ma esistono interi non naturali (ad esempio -1) e razionali non interi (ad esempio $\frac{1}{2}$).

Definizione 2.3 — Uguaglianza tra insiemi

$A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. In altre parole, due insiemi sono uguali quando hanno esattamente gli stessi elementi.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Nota — Doppia inclusione: una strategia di dimostrazione

Per dimostrare che due insiemi A e B sono uguali è quasi sempre conveniente provare separatamente le due inclusioni $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Vedremo applicazioni concrete di questa tecnica nei capitoli sulle dimostrazioni.

Definizione 2.4 — Insieme vuoto

L'**insieme vuoto** è l'insieme privo di elementi e si indica con $\varnothing$ (oppure $\{\}$). Per convenzione, $\varnothing \subseteq A$ per ogni insieme A.

Attenzione!

Non confondere $\varnothing$ con $\{\varnothing\}$: il primo è l'insieme vuoto (cardinalità 0), il secondo è un insieme che contiene un elemento (l'insieme vuoto stesso), quindi ha cardinalità 1.

Definizione 2.5 — Insieme delle parti

L'**insieme delle parti** di A, denotato $\mathcal{P}(A)$, è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A (compresi $\varnothing$ e A stesso). Se $|A| = n$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Esempio 2.4

Se $A = \{a, b\}$, allora $\mathcal{P}(A) = \{\, \varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\} \,\}$ e $|\mathcal{P}(A)| = 2^2 = 4$.

2.5. Unione e intersezione

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 2.6 — Unione

L'**unione** di A e B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B (o a entrambi):

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B \,\}.$$

Definizione 2.7 — Intersezione

L'**intersezione** di A e B è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A sia a B:

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \text{ e } x \in B \,\}.$$

Se $A \cap B = \varnothing$, gli insiemi A e B si dicono *disgiunti*.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

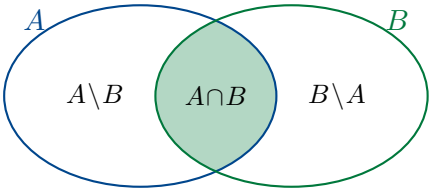


Figura 2.2: Diagramma di Eulero-Venn per due insiemi A e B. La regione in verde è $A \cap B$; l'unione $A \cup B$ è data dall'insieme di tutti e tre i settori.

Teorema 2.1 — Proprietà di unione e intersezione

Per ogni A, B, C:

- *commutativa:* $A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$;
- *associativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- *distributiva:* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- *idempotente:* $A \cup A = A$, $\quad A \cap A = A$;
- *assorbimento:* $A \cup (A \cap B) = A$, $\quad A \cap (A \cup B) = A$;
- *vuoto:* $A \cup \varnothing = A$, $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$.

Dimostrazione. Mostriamo la commutatività dell'unione; le altre si provano in modo analogo. Sia $x \in A \cup B$. Per definizione $x \in A$ oppure $x \in B$, che è esattamente la condizione $x \in B$ oppure $x \in A$, ovvero $x \in B \cup A$. Quindi $A \cup B \subseteq B \cup A$. Scambiando i ruoli di A e B si ottiene l'inclusione opposta e quindi l'uguaglianza.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Quest'ultima formula, detta **principio di inclusione-esclusione**, conta gli elementi dell'unione evitando di contare due volte quelli in comune.

2.6. Differenza e complemento

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 2.8 — Differenza

La **differenza** di A meno B è l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma non a B:

$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \,\}.$$

Quando si lavora dentro un insieme di riferimento U (chiamato *insieme universo*), si introduce una notazione abbreviata per la differenza rispetto a U.

Definizione 2.9 — Complemento

Fissato un insieme universo U, il **complemento** di $A \subseteq U$ è

$$\overline{A} = U \setminus A = \{\, x \in U \mid x \notin A \,\}.$$

Esempio 2.5

Sia $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ e $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ l'insieme dei pari di U. Allora $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Si verifica che $A \cup \overline{A} = U$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Teorema 2.2 — Leggi di De Morgan

Per ogni $A, B \subseteq U$:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Dimostrazione (della prima). Sia $x \in \overline{A \cup B}$. Allora $x \notin A \cup B$, dunque $x \notin A$ *e* $x \notin B$, cioè $x \in \overline{A}$ *e* $x \in \overline{B}$, ossia $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Si ottiene $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Ogni passaggio è reversibile, quindi vale anche l'inclusione opposta e dunque l'uguaglianza. (Per la seconda, ragionamento analogo.)

Nota

Le leggi di De Morgan ci dicono come "distribuire" un complemento su unione e intersezione: scambiando $\cup$ con $\cap$ e prendendo il complemento di ciascun insieme. Le rincontreremo in logica con i connettivi "e" e "o".

2.7. Prodotto cartesiano

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 2.10 — Coppia ordinata

Una **coppia ordinata** (a, b) è un'entità in cui contano *quali* sono gli elementi *e in che ordine* compaiono. Due coppie sono uguali se e solo se:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d.$$

Attenzione!

Non confondere (a, b) con $\{a, b\}$: l'insieme $\{a, b\} = \{b, a\}$, ma la coppia $(a, b) \neq (b, a)$ se $a \neq b$.

Definizione 2.11 — Prodotto cartesiano

Il **prodotto cartesiano** di A e B è l'insieme di tutte le coppie ordinate in cui il primo

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

elemento appartiene ad A e il secondo a B:

$$A \times B = \{\,(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\,\}.$$

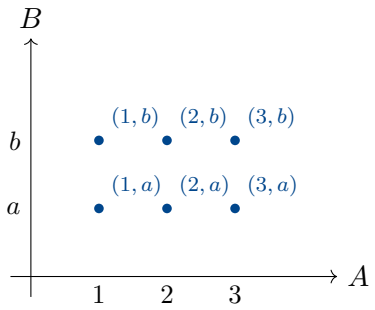


Figura 2.3: Prodotto cartesiano $A \times B$ con $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b\}$. Le sei coppie ordinate sono i punti di una griglia 3×2.

Nota

Se A e B sono finiti, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Nell'esempio in figura: $|A| = 3$, $|B| = 2$, dunque $|A \times B| = 6$.

Il prodotto cartesiano è la struttura che sta dietro al *piano cartesiano*: i punti del piano sono coppie ordinate $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Lo riprenderemo nel capitolo di geometria analitica.

2.8. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 2.6 — Operazioni con insiemi finiti

Siano $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{4,5,6,7\}$, contenuti nell'universo $U = \{1,2,\dots,10\}$. Calcoliamo le principali operazioni.

Soluzione. In termini algebrici, prima di sostituire i valori:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\},\\ A \cap B &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},\\ A \setminus B &= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},\\ \overline{A} &= U \setminus A. \end{aligned}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1,2,3,4,5,6,7\},\\ A \cap B &= \{4,5\},\\ A \setminus B &= \{1,2,3\},\\ \overline{A} &= \{6,7,8,9,10\}. \end{aligned}$$

Verifica del principio di inclusione-esclusione:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 4 - 2 = 7. \quad \checkmark$$

Esempio 2.7 — Insieme delle parti

Determinare $\mathcal{P}(A)$ per $A = \{x, y, z\}$.
Soluzione. Poiché $|A| = 3$, ci aspettiamo $|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$ sottoinsiemi. Li elenchiamo per cardinalità crescente:

$$\mathcal{P}(A) = \{\, \varnothing,\ \{x\}, \{y\}, \{z\},\ \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\},\ \{x, y, z\} \,\}.$$

Esempio 2.8 — Verifica di una legge di De Morgan

Con $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $U = \{1, 2, \dots, 8\}$, verifichiamo $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
Soluzione. A sinistra: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dunque $\overline{A \cup B} = \{7, 8\}$. A destra: $\overline{A} = \{5, 6, 7, 8\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 7, 8\}$, dunque $\overline{A} \cap \overline{B} = \{7, 8\}$. Le due espressioni coincidono. $\checkmark$

2.9. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 2.1

1. Scrivi per elencazione l'insieme $A = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è dispari e } x < 12 \,\}$.
2. Indica con $\subseteq$, $\subset$ o $\not\subseteq$ la relazione corretta tra le seguenti coppie di insiemi: $\{1, 2\}$ e $\{1, 2, 3\}$; $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$; $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$; $\varnothing$ e $\{0\}$.
3. Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{3, 5, 7, 9\}$. Calcola $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ e $B \setminus A$. Verifica con i conti che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
4. Sia $U = \{1, 2, \dots, 12\}$ e $A = \{\, x \in U \mid x \text{ è multiplo di } 3 \,\}$. Determina $\overline{A}$ e verifica che $A \cap \overline{A} = \varnothing$ e $A \cup \overline{A} = U$.
5. Per gli stessi A e B dell'esercizio 3, verifica entrambe le leggi di De Morgan rispetto a un universo $U = \{1, 2, \dots, 10\}$.
6. Determina $\mathcal{P}(B)$ per $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ed elenca quanti sottoinsiemi ha cardinalità $0, 1, 2, 3, 4$. Confronta con i coefficienti binomiali $\binom{4}{k}$.
7. Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$. Scrivi tutte le coppie di $A \times B$ e di $B \times A$. È vero che $A \times B = B \times A$?
8. (Discussione.) È vero o falso che, comunque presi A e B, vale $A \setminus B = B \setminus A$? Trova un controesempio o dimostra l'uguaglianza.

2.10. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- Un *insieme* è una collezione di oggetti per i quali sia possibile decidere, senza ambiguità, l'appartenenza. Si scrive $x \in A$ o $x \notin A$.
- Tre rappresentazioni equivalenti: tabulare ($A = \{a, e, i, o, u\}$), caratteristica ($A = \{x \mid P(x)\}$), Eulero-Venn (grafica).
- $A \subseteq B$ significa: ogni elemento di A appartiene a B. Si ha $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.
- $\varnothing$ è l'insieme vuoto e $\varnothing \subseteq A$ per ogni A. $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme dei sottoinsiemi di A e $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.
- Operazioni fondamentali: $A \cup B$ (unione), $A \cap B$ (intersezione), $A \setminus B$ (differenza), $\overline{A} = U \setminus A$ (complemento rispetto all'universo U).
- Principio di inclusione-esclusione: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Leggi di De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$, $b \in B$; per insiemi finiti $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Video overview — panoramiche NotebookLM (clic per riprodurre)



mat 04 insiemi



mat 04 01 INSIEMI simboli e cardinalita



mat 04 02 INSIEMI e loro rappresentazione



mat 04 09 logica e insiemi



Logica e Insiemi

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco