Capitolo 15

Introduzione al numero reale R

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

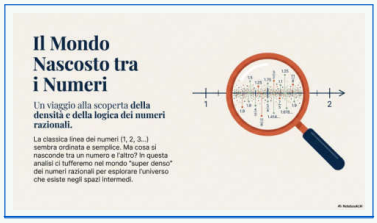
Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Presentazioni — slide NotebookLM (clic per aprire il PDF)



Numeri razionali e reali

I numeri sono libere creazioni dello spirito umano: servono come strumento per cogliere più facilmente e nettamente la diversità delle cose.”

— Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888)

15.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

I numeri razionali sono moltissimi: ne abbiamo già visto la *densità* (capitolo 7). Tra due razionali distinti ne esistono infiniti altri. Sembra che $\mathbb{Q}$ "riempia" la retta numerica. Eppure — e questa è una delle scoperte più sorprendenti della matematica greca — non è così: la retta numerica contiene molti più punti di quanti siano i razionali.

La scoperta risale al V secolo a.C.: i pitagorici si accorsero che la *diagonale* di un quadrato di lato 1 ha lunghezza $\sqrt{2}$, e dimostrarono che $\sqrt{2}$ non può essere un rapporto fra interi. La cosa era così sconvolgente per la loro filosofia del "tutto è numero" (intendendo: rapporto fra interi) che una leggenda vuole Ippaso di Metaponto, primo divulgatore della prova, gettato in mare per aver violato il segreto. Veridica o no, la storia testimonia la portata della scoperta: c'erano *altri* numeri, oltre ai razionali. Numeri *irrazionali*.

In questo capitolo formalizziamo l'estensione $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: motiviamo perché ci servono i nuovi numeri ($\sqrt{2}$, π, e, φ), introduciamo $\mathbb{R}$ come l'insieme dei *decimali infiniti qualsiasi*, e ricaviamo le sue proprietà essenziali: *densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$*, *completezza* della retta reale, *ordinamento totale*. Chiudiamo con la classificazione degli intervalli e il valore assoluto in $\mathbb{R}$.

15.2. Insufficienza di Q es. radice 2 irrazionale

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Consideriamo un quadrato di lato 1 (in qualunque unità di misura). Per il teorema di Pitagora — che riprenderemo in dettaglio nel capitolo 59 — la diagonale d soddisfa

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad d = \sqrt{2}.$$

Quanto vale $\sqrt{2}$? Possiamo stimarlo: $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$, dunque $1 < \sqrt{2} < 2$. Più precisamente: $1{,}4^2 = 1{,}96$ e $1{,}5^2 = 2{,}25$, quindi $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Continuando: $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, e così via. Esiste *un* numero che corrisponde alla diagonale: la domanda è se sia razionale o no.

Teorema 15.1 — Irrazionalità di $\sqrt{2}$, Ippaso

Non esiste nessun razionale $r = \frac{a}{b}$ tale che $r^2 = 2$.

Dimostrazione (per assurdo). Supponiamo per assurdo che esista $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ con $r^2 = 2$, in forma ridotta ai minimi termini (cioè $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$). Da $\frac{a^2}{b^2} = 2$ segue $a^2 = 2b^2$, dunque a^2 è pari. Per quanto dimostrato nel capitolo 6, anche a è pari: $a = 2k$. Sostituendo: $(2k)^2 = 2b^2$, cioè $4k^2 = 2b^2$, cioè $b^2 = 2k^2$. Allora b^2 è pari e quindi anche b. Ma allora a e b hanno il fattore 2 in comune: contraddice l'ipotesi $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$.

La supposizione iniziale è insostenibile. Quindi $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Nota — Conseguenza geometrica

La diagonale del quadrato di lato 1 è dunque un punto della retta numerica che *non corrisponde a nessun razionale*. Si vede a occhio sulla retta — basta riportare con il

compasso la diagonale del quadrato — ma non lo si raggiunge mai con frazioni $\frac{a}{b}$, per quanto fini.

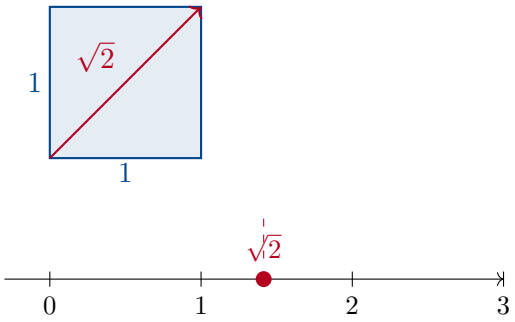


Figura 15.1: Costruzione geometrica di $\sqrt{2}$: è la diagonale del quadrato di lato 1. Sulla retta numerica, $\sqrt{2}$ cade fra 1 e 2 (più precisamente fra 1,41 e 1,42), ma *non* coincide con nessun razionale: è il primo numero "irrazionale" che si incontra.

15.3. Definizione intuitiva di numero irrazionale

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 15.1 — Numero irrazionale

Un **numero irrazionale** è un numero che *non* si può scrivere nella forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Equivalentemente (capitolo 13): la sua rappresentazione decimale è infinita e *non periodica*.
L'insieme degli irrazionali si indica con $\mathbb{I}$ (oppure $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Esempio 15.1 — Esempi notevoli di irrazionali

- $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ (l'esempio di Ippaso).
- $\sqrt{3} = 1{,}73205080\ldots$ (irrazionalità provata in modo analogo, capitolo 6).
- $\sqrt{p}$ per ogni primo p: irrazionale (la dimostrazione si generalizza). Più in generale: $\sqrt{n}$ è irrazionale per ogni $n \in \mathbb{N}$ che non sia un quadrato perfetto.
- $\pi = 3{,}14159265\ldots$ (il rapporto tra circonferenza e diametro; irrazionalità provata da Lambert nel 1761).
- $e = 2{,}71828182\ldots$ (la base dei logaritmi naturali; irrazionalità provata da Eulero nel 1737). Approfondiremo e nel capitolo 81.
- $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398\ldots$ (il rapporto aureo).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Nota — Algebrici vs trascendenti

Tra gli irrazionali si distinguono due classi:

- *Irrazionali algebrici*: soluzioni di equazioni polinomiali a coefficienti interi. $\sqrt{2}$ è soluzione di $x^2-2=0$; $\sqrt[3]{5}$ di $x^3-5=0$; φ di $x^2-x-1=0$.
- *Irrazionali trascendenti*: *non* sono soluzioni di alcuna equazione polinomiale a coefficienti interi. π ed e sono trascendenti (provato rispettivamente da Lindemann nel 1882 e Hermite nel 1873).

Si può dimostrare che "quasi tutti" i reali sono trascendenti, anche se è molto difficile esibirli concretamente: una situazione paradossale che la matematica ha imparato a maneggiare nel XX secolo.

15.4. Numeri reali e rappresentazione decimale

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 15.2 — Insieme dei numeri reali

L'insieme dei **numeri reali** è

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I},$$

cioè l'unione dei razionali e degli irrazionali. Si può anche descrivere come l'insieme di *tutti i decimali*, finiti o infiniti, periodici o non periodici.

In termini di rappresentazione decimale:

rappresentazione decimale	*insieme di appartenenza*
finita	$\mathbb{Q}$ (razionali)
infinita periodica	$\mathbb{Q}$ (razionali)
infinita non periodica	$\mathbb{I}$ (irrazionali)

La definizione formale di $\mathbb{R}$ richiede strumenti più avanzati (sezioni di Dedekind o successioni di Cauchy, sviluppate nel XIX secolo da Dedekind, Cantor e Weierstrass). Per il liceo basta l'idea intuitiva: $\mathbb{R}$ è l'insieme dei punti della retta numerica, ognuno dei quali corrisponde a una sequenza di cifre decimali, eventualmente infinita.

Teorema 15.2 — Catena di inclusioni complete

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Ogni inclusione è stretta.

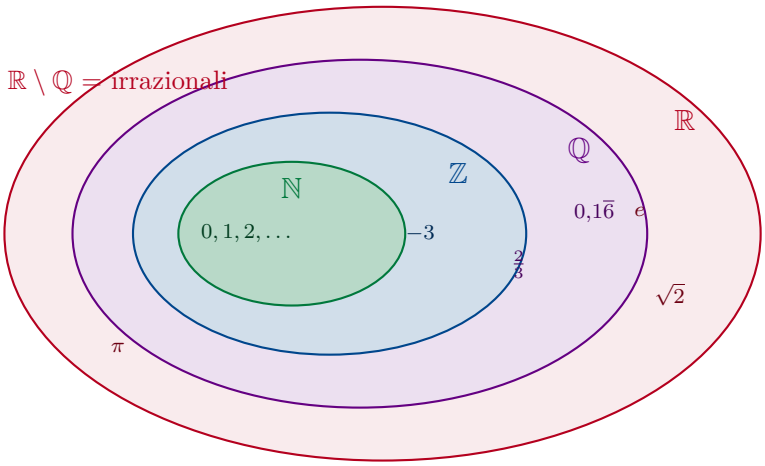


Figura 15.2: Catena completa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, con esempi rappresentativi: naturali (verde), interi negativi (blu), razionali (viola, sia frazioni che periodici), irrazionali (rosso: $\sqrt{2}, \pi, e$). L'anello esterno $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ contiene tutti gli irrazionali, suddivisi a loro volta in algebrici e trascendenti.

15.5. Densità di Q in R

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Teorema 15.3 — Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Per ogni coppia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$, esiste un razionale $r \in \mathbb{Q}$ tale che $\alpha < r < \beta$.

Dimostrazione (idea). Sia $\beta - \alpha > 0$. Per la *proprietà archimedea* (la presenteremo in dettaglio nel capitolo 126), esiste un naturale n tale che $\frac{1}{n} < \beta - \alpha$. Scegliamo poi un intero m con $\frac{m}{n} > \alpha$ e m minimo possibile: allora $\frac{m-1}{n} \leq \alpha < \frac{m}{n}$, e $\frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \leq \alpha + \frac{1}{n} < \beta$. Quindi $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ cade tra α e β.

Teorema 15.4 — Densità degli irrazionali in $\mathbb{R}$

Per ogni coppia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha < \beta$, esiste un irrazionale $\iota \in \mathbb{I}$ tale che $\alpha < \iota < \beta$.

Dimostrazione (idea). Per la densità di $\mathbb{Q}$ esiste un razionale $r \in (\alpha - \sqrt{2}, \beta - \sqrt{2})$ (intervallo non vuoto). Allora $\iota = r + \sqrt{2}$ è irrazionale (somma di razionale e irrazionale non nullo è irrazionale) e $\alpha < \iota < \beta$.

Nota — Conclusione intuitiva

Tra due reali distinti ci sono *infiniti razionali* e *infiniti irrazionali*: i due insiemi si compenetrano in modo intricato sulla retta. Eppure — e questa è una scoperta di Cantor — ci sono "molti più irrazionali" che razionali: gli irrazionali sono *più numerosi* (in senso preciso di cardinalità). $\mathbb{Q}$ è numerabile, $\mathbb{R}$ no.

15.6. Completezza di R

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

La proprietà che distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$, oltre alla presenza degli irrazionali, è la *completezza*: $\mathbb{R}$ "riempie" la retta numerica senza buchi. È un'idea intuitiva ma sfumata; la sua formalizzazione richiede strumenti che vedremo in analisi.

Nota — Idea di completezza

- In $\mathbb{Q}$ la successione $1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; 1{,}4142; 1{,}41421; \ldots$ è una sequenza di razionali "sempre più vicini" tra loro, ma il valore a cui tendono — $\sqrt{2}$ — *non sta in* $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ ha un buco proprio lì.
- In $\mathbb{R}$ ogni sequenza analoga ha un *limite* dentro $\mathbb{R}$. Detto altrimenti: ogni successione "che si stringe" converge a un numero reale. Questa è la **completezza**.

Riprenderemo la nozione di limite di una successione nel capitolo 160, e quella di limite di funzione nel capitolo 127. La completezza è il fondamento dell'intero calcolo infinitesimale.

Nota — Approcci storici

Due costruzioni rigorose di $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$:

- *Sezioni di Dedekind* (1872): ogni numero reale è una "coppia di insiemi" che taglia $\mathbb{Q}$ in due. $\sqrt{2}$ è il taglio fra "razionali r con $r^2 < 2$" e "razionali r con $r^2 \geq 2$".
- *Successioni di Cauchy* (Cantor, 1872): ogni numero reale è una classe di successioni di razionali "che si stringono".

Le due costruzioni danno lo stesso insieme, $\mathbb{R}$.

15.7. Ordinamento e retta reale

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Teorema 15.5 — Ordinamento di $\mathbb{R}$

Per ogni coppia $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vale una e una sola delle relazioni $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$. L'ordinamento è *compatibile* con le operazioni:

- se $\alpha < \beta$, allora $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$;
- se $\alpha < \beta$ e $\gamma > 0$, allora $\alpha\gamma < \beta\gamma$;
- se $\alpha < \beta$ e $\gamma < 0$, allora $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (*cambio di verso*).

Il cambio di verso quando si moltiplica per un negativo è una delle regole più importanti per le disequazioni, e la rivedremo in dettaglio nel capitolo 23.

Definizione 15.3 — Intervalli di $\mathbb{R}$

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \le b$, si definiscono i seguenti **intervalli**:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} && \text{(chiuso)},\\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{(aperto)},\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} && \text{(chiuso a sinistra, aperto a destra)},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} && \text{(aperto a sinistra, chiuso a destra)}.
\end{aligned}
$$

Si definiscono inoltre gli **intervalli illimitati**: $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, e tutto $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$.

I simboli $-\infty$ e $+\infty$ *non* sono numeri reali: indicano una direzione di crescita illimitata. Per questo motivo non si chiude mai una parentesi su di essi (si scrive sempre "(" o ")", mai "[" o "]").

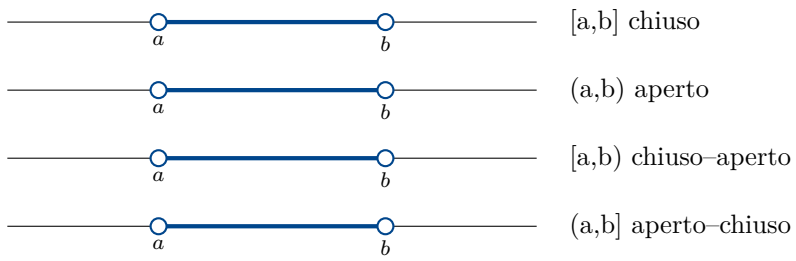


Figura 15.3: I quattro tipi di intervallo limitato. Il pallino *pieno* indica che l'estremo è incluso; il pallino *vuoto* indica che è escluso. Lo stesso simbolismo si usa nella rappresentazione delle soluzioni di disequazioni (capitolo 23).

Definizione 15.4 — Valore assoluto in $\mathbb{R}$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il **valore assoluto** di x è

$$
|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \ge 0,\\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}
$$

Geometricamente, $|x|$ è la *distanza* di x dall'origine sulla retta reale.

Teorema 15.6 — Proprietà del valore assoluto

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:

- $|x| \ge 0$, con $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|-x| = |x|$;
- $|xy| = |x| \cdot |y|$;
- $|x+y| \le |x| + |y|$ *(disuguaglianza triangolare)*;
- $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$ *(disuguaglianza triangolare inversa)*.

Il valore assoluto sarà studiato a fondo nel capitolo 25 (equazioni e disequazioni con valore assoluto).

15.8. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 15.2 — Riconoscere razionali e irrazionali

Stabilire se i seguenti numeri sono razionali o irrazionali.
Soluzione.

- $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$.
- $\sqrt{10}$: 10 non è un quadrato perfetto, e per il teorema sopra è *irrazionale*.
- $0{,}\overline{142857}$: decimale periodico, dunque *razionale* (è $\frac{1}{7}$).
- $0{,}1010010001\ldots$ (uno zero in più dopo ogni 1): decimale non periodico, dunque *irrazionale*.
- $\sqrt{2} + \sqrt{8}$: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, dunque $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$. Irrazionale.
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$: $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$, *razionale*.

Esempio 15.3 — Un razionale tra due irrazionali

Trovare un razionale strettamente compreso tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.
Soluzione. $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ e $\sqrt{3} \approx 1{,}732$. Un razionale ovvio è $\frac{3}{2} = 1{,}5$: $1{,}414 < 1{,}5 < 1{,}732$. Verifica algebrica: $\sqrt{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 < \frac{9}{4} = 2{,}25$ ✓; $\frac{3}{2} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{9}{4} < 3$ ✓.

Esempio 15.4 — Un irrazionale tra due razionali

Trovare un irrazionale strettamente compreso tra 1 e 2.
Soluzione. $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ è già tra 1 e 2. Lo è anche $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \approx 1{,}707$. Più in generale: $1 + \frac{1}{n}\sqrt{2}$ per ogni $n \geq 1$ produce un irrazionale tra 1 e $1 + \frac{\sqrt{2}}{1} \approx 2{,}414$.

Esempio 15.5 — Riconoscere intervalli e rappresentarli

Rappresentare sulla retta reale gli insiemi: (a) $[-1, 3]$; (b) $(2, 5)$; (c) $(-\infty, 0]$; (d) $(1, +\infty)$.
Soluzione.

- (a): segmento da -1 a 3, estremi inclusi (pallini pieni).
- (b): segmento da 2 a 5, estremi esclusi (pallini vuoti).
- (c): semiretta da $-\infty$ a 0 incluso (pallino pieno su 0, freccia verso sinistra).
- (d): semiretta da 1 escluso a $+\infty$ (pallino vuoto su 1, freccia verso destra).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 15.6 — Valore assoluto e distanza

Risolvere $|x-3|<2$.

Soluzione. $|x-3|$ è la distanza di x da 3. La condizione $|x-3|<2$ significa che x è a distanza minore di 2 dal punto 3, ovvero

$$-2<x-3<2 \quad\Longleftrightarrow\quad 1<x<5.$$

La soluzione è l'intervallo aperto $(1,5)$.

15.9. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 15.1

1. Classifica come razionale o irrazionale (giustificando): (a) $\sqrt{25}$; (b) $\sqrt{27}$; (c) $\sqrt[3]{8}$; (d) $\sqrt[3]{12}$; (e) $0{,}\overline{6}$; (f) $0{,}12345678910111213 14\ldots$ (concatenazione dei naturali); (g) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; (h) $\pi-3$.
2. Adatta la dimostrazione del testo per provare che $\sqrt{5}$ è irrazionale. (Suggerimento: usa il fatto che, se $5\mid a^2$, allora $5\mid a$; ricordalo dal capitolo 6.)
3. Per ciascuna coppia di reali, trova un razionale strettamente compreso e verifica: (a) $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$; (b) $\frac{1}{3}$ e $\sqrt{2}-1$; (c) π e $\sqrt{10}$.
4. Per ciascuna coppia di razionali, trova un irrazionale strettamente compreso: (a) 1 e 2; (b) 0 e $\frac{1}{10}$; (c) -1 e 0.
5. Rappresenta sulla retta reale e descrivi come intervalli usando le notazioni $(\cdot,\cdot),[\cdot,\cdot],\ldots$: (a) $\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x\le 2\}$; (b) $\{x\in\mathbb{R}\mid x>1\}$; (c) $\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x\le 0\}$; (d) $\mathbb{R}\setminus[0,1]$.
6. Risolvi: (a) $|x|<3$; (b) $|x|\ge 2$; (c) $|x-1|<4$; (d) $|x+2|\ge 3$.
   Per ciascuna, scrivi anche la soluzione come unione di intervalli.
7. Dimostra che la somma di un razionale e di un irrazionale è sempre irrazionale. (Suggerimento: ragiona per assurdo.)
8. Dimostra che il prodotto di un razionale non nullo per un irrazionale è irrazionale.
9. (Discussione.) È vero o falso che "la somma di due irrazionali è sempre irrazionale"? Cerca un controesempio. E "il prodotto di due irrazionali"?

15.10. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- I razionali $\mathbb{Q}$ *non riempiono* la retta numerica: la diagonale del quadrato di lato 1, $\sqrt{2}$, è il primo esempio di numero non razionale (Ippaso, V sec. a.C.).
- Un *numero irrazionale* non si scrive nella forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Equivalentemente, ha rappresentazione decimale infinita *non periodica*.
- Esempi notevoli: $\sqrt{p}$ per p primo, $\sqrt{n}$ per n non quadrato perfetto, π, e, il rapporto aureo φ.
- Si distinguono irrazionali *algebrici* (es. $\sqrt{2}$, φ) e *trascendenti* (es. π, e).
- L'*insieme dei numeri reali* è $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, equivalentemente l'insieme di tutti i decimali (finiti, periodici, non periodici). Catena: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- *Densità di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$ e *densità di* $\mathbb{I}$ *in* $\mathbb{R}$: tra due reali distinti ci sono infiniti razionali e infiniti irrazionali. Però gli irrazionali sono "molti di più" (Cantor, capitolo 126).
- *Completezza di* $\mathbb{R}$: la retta reale non ha "buchi". Ogni successione di reali che "si stringe" converge a un reale. Sarà la base dell'analisi (capitoli 126 e seguenti).
- L'ordinamento di $\mathbb{R}$ è totale e compatibile con $+$ e $\cdot$, con il cambio di verso quando si moltiplica per un negativo (rilevante per le disequazioni, capitolo 23).
- Quattro tipi di intervalli limitati ($[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$) e i corrispondenti illimitati. I simboli $-\infty$ e $+\infty$ *non* sono numeri reali.
- Valore assoluto: $|x|$ è la distanza di x dall'origine. Soddisfa la *disuguaglianza triangolare* $|x + y| \leq |x| + |y|$. Approfondimento nel capitolo 25.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco