Capitolo 29

Postulati teoremi definizioni

WEB (Materiali vari)

"Non c'è una via regia per la geometria."

— Euclide a Tolomeo I

Studia questo capitolo con l'AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Il capitolo precedente ha tratteggiato il *metodo* con cui costruire una teoria geometrica: alcuni concetti accettati senza definizione, alcuni enunciati accettati senza dimostrazione, e a partire da questi due nuclei un'intera architettura di proposizioni dimostrate. In questo capitolo entriamo nel dettaglio di quell'architettura, distinguendo con precisione i tipi di enunciati che incontreremo — *definizioni*, *assiomi*, *teoremi*, *lemmi*, *corollari* — e analizzando la struttura interna di un teorema e della sua dimostrazione.

Acquisire questo linguaggio non è un esercizio di pedanteria: è la condizione preliminare per leggere e scrivere matematica con consapevolezza. Quando il libro di testo afferma "per il teorema di Pitagora si ha…", occorre saper riconoscere che cosa è stato realmente dimostrato, sotto quali ipotesi e con quali conseguenze. Se le ipotesi non sono soddisfatte, il teorema non si applica.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

29.1. Concetti primitivi e definizioni

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Abbiamo già discusso, nel Capitolo 28, perché ogni teoria abbia bisogno di concetti primitivi. Una volta accettati, da essi si possono costruire *nuove* nozioni mediante **definizioni**.

Definizione 29.1 — Definizione matematica

Una **definizione** è un enunciato che introduce un nuovo termine — il *definendum* — esprimendolo in funzione di concetti primitivi e di termini precedentemente definiti.

Una buona definizione deve soddisfare due requisiti:

- essere **ben posta**, cioè non contenere il termine che si sta definendo (per evitare circoli viziosi) e fare uso solo di concetti già introdotti;
- essere **caratterizzante**, cioè selezionare in modo univoco gli oggetti a cui si applica: ogni oggetto soddisfa la definizione se e solo se appartiene alla categoria che si vuole isolare.

Esempio 29.1 — Una definizione ben posta e una mal posta

Consideriamo due tentativi di definizione di triangolo equilatero.

- *Ben posta*: "Un triangolo si dice **equilatero** quando i suoi tre lati sono congruenti." Si fa uso solo dei termini "triangolo", "lato" e "congruente", che si suppongono già definiti.
- *Mal posta*: "Un triangolo equilatero è un triangolo regolare con tre lati uguali." Qui si introduce surrettiziamente la nozione di "triangolo regolare", che non è stata ancora definita; la definizione non è autosufficiente.

In una definizione, l'espressione "si dice" o "si chiama" separa il termine nuovo dalla sua caratterizzazione. È utile leggerla mentalmente come un *se e solo se*:

$$\text{“}T \text{ è un triangolo equilatero”} \iff \text{“}T \text{ è un triangolo con i tre lati congruenti”}.$$

Questa equivalenza è ciò che rende le definizioni utilizzabili nelle dimostrazioni, sia per riconoscere se un oggetto rientra in una categoria, sia per dedurne le proprietà.

29.2. Assiomi e postulati

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Una volta scelti i concetti primitivi, occorre stabilire quali *proprietà* siano loro attribuite. Queste proprietà sono fissate dagli **assiomi** (o **postulati**).

Definizione 29.2 — Assioma

Un **assioma** (o **postulato**) è un enunciato che si assume vero senza dimostrazione e che fissa proprietà fondamentali dei concetti primitivi.

Storicamente la parola *postulato* (dal latino *postulare*, "richiedere") era riservata da Euclide agli enunciati specifici della geometria, mentre *nozione comune* indicava i principi logici universali. Nella matematica contemporanea le due parole sono usate come sinonimi, e in questa dispensa le considereremo intercambiabili.

Gli assiomi non sono né "veri in sé" né "ovvi": sono *scelte* che il matematico fa per dare struttura alla teoria. Cambiando assiomi si ottengono teorie diverse, tutte logicamente coerenti. La geometria che studieremo è quella euclidea, ma esistono geometrie "non euclidee" (sferica, iperbolica) costruite su assiomi differenti, che descrivono comunque situazioni geometriche reali (la superficie di una sfera, ad esempio, o lo spaziotempo della relatività generale).

Esempio 29.2 — Alcuni postulati della geometria euclidea

Riportiamo, nel linguaggio moderno, alcuni postulati che assumeremo come fondamento.

1. Per due punti distinti passa una e una sola retta.
2. Su una retta esistono infiniti punti; al di fuori di una retta esistono infiniti punti.
3. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
4. Una retta che ha due punti su un piano α giace tutta su α.
5. Da un punto esterno a una retta passa una e una sola retta parallela alla retta data *(quinto postulato di Euclide)*.

Si noti che questi enunciati non si dimostrano: si *assumono*.

Attenzione!

Assioma non significa "ovvio". Il quinto postulato di Euclide è stato per duemila anni al centro di una vera e propria battaglia matematica: molti studiosi tentarono di dimostrarlo a partire dagli altri quattro, sospettando che fosse "meno fondamentale". Solo nell'Ottocento Lobacevskij, Bolyai e Gauss mostrarono che il quinto postulato è *indipendente* dagli altri: si possono costruire geometrie coerenti in cui esso non vale (le *geometrie non euclidee*). Un assioma è dunque una scelta della teoria, non una verità auto-evidente.

29.3. Struttura del teorema: ipotesi, tesi, dimostrazione

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Il cuore della geometria razionale è il **teorema**. Un teorema è un enunciato la cui verità non è assunta, ma *dimostrata* a partire dagli assiomi e da teoremi già stabiliti.

Definizione 29.3 — Teorema

Un **teorema** è un'affermazione della forma

$$\text{se } H \text{ allora } T$$

in cui:

- H è un insieme di condizioni dette **ipotesi**;
- T è un enunciato detto **tesi**;
- l'implicazione $H \Rightarrow T$ è giustificata da una **dimostrazione**, ossia da una catena di passaggi logici che, partendo dalle ipotesi e usando assiomi, definizioni e teoremi precedenti, conduce alla tesi.

La struttura "se H allora T" è onnipresente in matematica e merita attenzione. Riconoscere correttamente quale parte di un enunciato è ipotesi e quale è tesi è la prima abilità da sviluppare.

Esempio 29.3 — Riconoscere ipotesi e tesi

Consideriamo il classico teorema del triangolo isoscele.

Enunciato. *In un triangolo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti.*

Riscriviamolo nella forma "se … allora …".

Se un triangolo è isoscele **(ipotesi H)**, **allora** i suoi angoli alla base sono congruenti **(tesi T)**.

L'ipotesi è la proprietà che si *assume* riguardo al triangolo (avere due lati congruenti); la tesi è ciò che si vuole *dimostrare* (la congruenza dei due angoli alla base). La dimostrazione consisterà in una sequenza di passaggi logici che, partendo dall'ipotesi, conduce alla tesi.

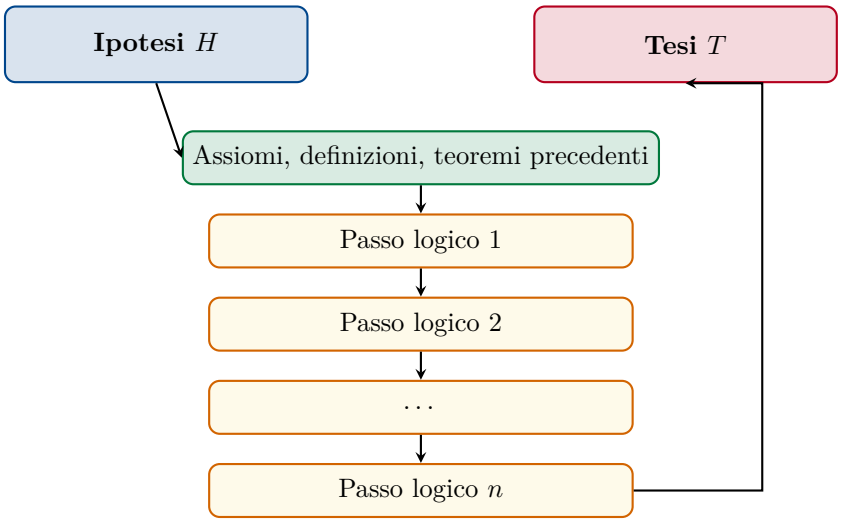


Figura 29.1: Struttura logica di un teorema. La dimostrazione collega l'ipotesi H alla tesi T tramite una catena di passi giustificati, ciascuno appoggiato a un assioma, una definizione o un teorema già dimostrato.

Schema generale di una dimostrazione

Quando ci si trova davanti a un teorema da dimostrare, è utile organizzare il lavoro secondo lo schema seguente.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Procedura — Dimostrazione di un teorema

1. **Identifica ipotesi e tesi.** Riformula l'enunciato nella forma "se H allora T". Scrivi esplicitamente che cosa è dato e che cosa si deve provare.
2. **Disegna una figura.** Quando possibile, traccia una figura di lavoro coerente con le ipotesi. Non è una dimostrazione, ma è una guida per l'intuizione.
3. **Richiama gli strumenti disponibili.** Identifica gli assiomi, le definizioni e i teoremi che ti aspetti di usare. La scelta è spesso suggerita dall'ipotesi.
4. **Costruisci la catena logica.** Passa dall'ipotesi alla tesi con una successione di passaggi, ciascuno giustificato da un singolo strumento (assioma, definizione, teorema, regola logica).
5. **Concludi.** Stabilita la tesi, è buona pratica scrivere esplicitamente "c.v.d." (*come volevasi dimostrare*) o concludere con una frase del tipo "si ha così la tesi".

Esempio 29.4 — Una dimostrazione completa

Dimostriamo il seguente enunciato.

Se due rette r e s distinte si intersecano in un punto P, allora P è l'unico punto comune a r e s.

Ipotesi. r e s sono rette distinte e $P \in r \cap s$.
Tesi. Non esiste un secondo punto $Q \neq P$ con $Q \in r \cap s$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo: supponiamo che esista un punto $Q \neq P$ tale che $Q \in r$ e $Q \in s$. Allora r e s sarebbero entrambe rette passanti per i due punti distinti P e Q. Ma per il primo postulato di sezione 29.2, per due punti distinti passa *una sola* retta. Dovrebbe quindi essere $r = s$, contro l'ipotesi che r e s siano distinte. La supposizione $Q \neq P$ porta a contraddizione: deve allora essere P l'unico punto comune.

Tecniche di dimostrazione

In matematica si distinguono diverse strategie con cui costruire la catena logica di una dimostrazione. Le più diffuse sono le seguenti.

- **Dimostrazione diretta**: si parte dall'ipotesi H e, per deduzioni successive, si arriva alla tesi T. È la tecnica usata nell'esempio del triangolo isoscele.
- **Dimostrazione per assurdo** (o *per contraddizione*): si suppone vera l'ipotesi H e *falsa* la tesi T (cioè vera la sua negazione $\neg T$); da questa supposizione si deduce una contraddizione (ad esempio una proposizione del tipo "A e $\neg A$"). Poiché il sistema deve essere coerente, la supposizione $\neg T$ è insostenibile: deve quindi essere T vera. È la tecnica appena usata.
- **Dimostrazione per controesempio**: per *confutare* un'affermazione del tipo "per ogni… vale…" è sufficiente esibire un singolo caso in cui non vale. Un controesempio non dimostra che un enunciato è vero, ma è sufficiente a dimostrare che è falso.

Queste tecniche sono trattate in modo sistematico nel modulo di logica (Capitolo 6); qui ne facciamo uso operativo.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

29.4. Lemmi, corollari, teoremi inversi

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Non tutti i teoremi hanno la stessa importanza nell'economia di una teoria. La tradizione matematica distingue alcuni casi particolari.

Definizione 29.4 — Lemma, corollario, teorema inverso

- Un **lemma** è un teorema ausiliario, di interesse limitato in sé, dimostrato come strumento per provare un risultato più importante.
- Un **corollario** è una conseguenza diretta di un teorema appena dimostrato, ottenibile con pochi passaggi quasi immediati.
- Il **teorema inverso** di un teorema della forma "se H allora T" è l'enunciato "se T allora H". La sua validità non è garantita dalla validità del teorema diretto.

La distinzione è puramente di rilievo e di funzione: dal punto di vista logico, un lemma e un teorema sono indistinguibili; sono entrambi affermazioni dimostrate. La parola "lemma" segnala soltanto al lettore che si tratta di un risultato strumentale, da non considerare come obiettivo principale.

Esempio 29.5 — Teorema diretto e teorema inverso del triangolo isoscele

Il Capitolo 33 sarà dedicato proprio a questi enunciati. Anticipiamoli a titolo illustrativo.

Teorema diretto. Se un triangolo è isoscele, allora gli angoli alla base sono congruenti.
Teorema inverso. Se in un triangolo due angoli sono congruenti, allora il triangolo è isoscele (il lato opposto al terzo angolo è la base).

Si noti che entrambi gli enunciati sono validi, ma ciascuno ha bisogno di una dimostrazione propria. La validità del teorema diretto *non garantisce* quella dell'inverso; l'inverso va provato separatamente.

Esempio 29.6 — Un teorema inverso che non vale

Consideriamo l'enunciato:

> *Se un quadrilatero è un quadrato, allora ha tutti i lati congruenti.*

È un teorema vero, di immediata dimostrazione a partire dalla definizione di quadrato. Il suo inverso sarebbe:

> *Se un quadrilatero ha tutti i lati congruenti, allora è un quadrato.*

Questo enunciato è *falso*: un rombo non quadrato (cioè un rombo con angoli non retti) ha tutti i lati congruenti ma non è un quadrato. Un solo controesempio basta a confutare l'inverso. La verità del teorema diretto e la verità del suo inverso sono *indipendenti*.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Attenzione!

Condizione necessaria, condizione sufficiente. Un teorema "se H allora T" afferma che H è una *condizione sufficiente* per T (basta avere H per garantire T); equivalentemente, T è una *condizione necessaria* per H. Quando vale anche l'inverso "se T allora H", si dice che H è *condizione necessaria e sufficiente* per T, e si scrive $H \iff T$ ("H se e solo se T"). Tornerà spesso, in questo corso, leggere enunciati con la formula "... se e solo se ...": segnala che il risultato vale in entrambe le direzioni.



Figura 29.2: Relazioni tipiche fra teorema, lemmi e corollari. I lemmi sono risultati ausiliari che alimentano la dimostrazione; i corollari sono conseguenze immediate del teorema, una volta che esso sia stato dimostrato.

Esempi svolti

Esempio 29.7 — Riconoscere la struttura di un enunciato

Nei seguenti enunciati, individua ipotesi e tesi.

(a) "Se due triangoli hanno due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti, allora sono congruenti."

Ipotesi: due triangoli hanno due lati e l'angolo compreso ordinatamente congruenti.
Tesi: i due triangoli sono congruenti.

(b) "In un parallelogramma le diagonali si bisecano."

Riformulazione: "Se un quadrilatero è un parallelogramma, allora le sue diagonali si bisecano."
Ipotesi: il quadrilatero è un parallelogramma.
Tesi: le diagonali si bisecano (cioè si tagliano scambievolmente a metà).

(c) "Tre punti non allineati individuano uno e un solo piano."

Si tratta di un *postulato*, non di un teorema: non ha dimostrazione, è assunto.

Esempio 29.8 — Una dimostrazione per assurdo

Dimostriamo il seguente enunciato.

Per un punto P esterno a una retta r passa al massimo una retta perpendicolare a r in un fissato punto $H \in r$.

Ipotesi. r è una retta, $H \in r$, P è un punto esterno a r.
Tesi. Esiste al più una retta s passante per P e perpendicolare a r in H.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due rette distinte s_1 e s_2, entrambe

passanti per P e per H, ed entrambe perpendicolari a r in H. Le rette s_1 e s_2 avrebbero allora due punti distinti in comune (P e H), e per il primo postulato dovrebbero coincidere, contro l'ipotesi che siano distinte. La supposizione è insostenibile: la retta perpendicolare a r passante per H, se esiste e passa per P, è unica.

Esercizio 29.1

1. Spiega la differenza fra *definizione*, *assioma* e *teorema*, illustrando ciascuno con un esempio tratto dalla geometria.
2. Riscrivi i seguenti enunciati nella forma "se ... allora ...", evidenziando ipotesi e tesi.
   (a) In un quadrato le diagonali sono congruenti.
   (b) Un triangolo equilatero ha tutti gli angoli congruenti.
   (c) Le rette perpendicolari a una stessa retta sono parallele tra loro.
3. Per ciascuno dei seguenti enunciati, formula il teorema inverso e indica, sulla base delle conoscenze pregresse, se l'inverso è vero o falso.
   (a) Se un quadrilatero è un rettangolo, allora i suoi angoli sono retti.
   (b) Se un triangolo è equilatero, allora è isoscele.
   (c) Se un numero intero è pari, allora il suo quadrato è pari.
4. Scrivi una definizione ben posta di:
   (a) rettangolo;
   (b) triangolo isoscele;
   (c) quadrilatero.
5. Spiega, con un esempio a tua scelta, in che cosa consiste una *dimostrazione per assurdo*.
6. Vero o falso? Motiva la risposta.
   (a) Un postulato si dimostra a partire dai concetti primitivi.
   (b) Un teorema si dimostra a partire da assiomi e da teoremi precedenti.
   (c) Un controesempio è sufficiente a dimostrare la verità di un enunciato universale.
   (d) La verità del teorema diretto implica la verità del teorema inverso.
7. Confuta, esibendo un controesempio, ciascuno dei seguenti enunciati.
   (a) Tutti i triangoli con due lati congruenti sono equilateri.
   (b) Tutti i quadrilateri con quattro lati congruenti sono quadrati.
   (c) Tutti i numeri primi sono dispari.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

8. Scrivi nella forma "$H \Rightarrow T$" e poi nella forma equivalente "condizione necessaria ..., condizione sufficiente ..." il seguente teorema: "se un triangolo è rettangolo, allora il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti".

9. Considera l'enunciato: "In un triangolo, l'angolo opposto al lato maggiore è il maggiore degli angoli". È un teorema o un postulato? Motiva la risposta.

10. Spiega, con parole tue, perché un solo controesempio basta a confutare un enunciato universale, mentre nessun numero finito di esempi è sufficiente a dimostrarlo.

11. Costruisci una dimostrazione diretta del seguente enunciato: "se due rette distinte passano per uno stesso punto P, allora il piano da esse individuato è unico". (Suggerimento: usa l'esempio analogo del Capitolo 28 e l'assioma "per tre punti non allineati passa uno e un solo piano".)

12. Distingui, dei seguenti enunciati, quali sono *lemmi*, *teoremi* o *corollari*, sulla base del loro ruolo strutturale.

    (a) Teorema di Pitagora.

    (b) Conseguenza del teorema di Pitagora: la diagonale di un quadrato è $\sqrt{2}$ volte il lato.

    (c) Risultato preparatorio: in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa divide il triangolo in due triangoli simili al primo.

Riepilogo

- Una **definizione** introduce un nuovo termine in funzione di concetti primitivi e di termini già definiti; deve essere *ben posta* (priva di circoli) e *caratterizzante*.
- Un **assioma** (o **postulato**) è un enunciato assunto vero senza dimostrazione, che fissa proprietà fondamentali dei concetti primitivi.
- Un **teorema** ha la struttura "se H allora T", dove H è l'*ipotesi* e T è la *tesi*; la **dimostrazione** collega H a T tramite assiomi, definizioni e teoremi precedenti.
- Le tecniche fondamentali di dimostrazione sono la *dimostrazione diretta*, la *dimostrazione per assurdo* e — per confutare enunciati universali — il *controesempio*.
- Un **lemma** è un teorema ausiliario; un **corollario** è una conseguenza immediata di un teorema; il **teorema inverso** di "se H allora T" è "se T allora H", e la sua validità è indipendente da quella del teorema diretto.
- Quando valgono sia un teorema che il suo inverso, le ipotesi diventano *condizione necessaria e sufficiente* ("se e solo se"); $H \iff T$ è la forma più informativa di un enunciato matematico.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco