Capitolo 57

Luoghi geometrici fondamentali

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Esercizi del prof. De Capoa

Ogni curva nasce da una regola: il luogo è la geometria che ricorda una proprietà.”

— adattamento didattico

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

57.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

Nel capitolo 56 abbiamo definito la circonferenza come "il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso". Questa formulazione ha qualcosa di sorprendente: descrive una curva attraverso una *proprietà* che caratterizza tutti i suoi punti, anziché tramite una formula algebrica. È il concetto generale di **luogo geometrico**.

Un luogo geometrico è dunque *l'insieme di tutti e soli i punti del piano che soddisfano una certa proprietà*. La circonferenza, l'asse di un segmento, la bisettrice di un angolo, le rette parallele a una retta data: sono tutti esempi di luoghi. Studiarli geometricamente significa imparare a leggere proprietà metriche (distanze, angoli) come curve.

I luoghi geometrici sono il ponte fra la geometria sintetica (di Euclide) e la geometria analitica (di Cartesio): in capitoli successivi vedremo che ogni luogo geometrico ha un'equazione, e che ellisse, parabola, iperbole sono *luoghi* con proprietà metriche caratterizzanti (rispettivamente, somma costante di distanze da due punti, equidistanza da un punto e una retta, differenza costante di distanze). Approfondiremo questi luoghi notevoli nei capitoli 74–78.

In questo capitolo formalizziamo l'idea di luogo, presentiamo i *luoghi geometrici elementari* (asse, bisettrice, circonferenza, rette parallele) e introduciamo la tecnica della *doppia inclusione* per dimostrare che un certo insieme di punti *è* effettivamente il luogo che pretendiamo essere.

57.2. Concetto di luogo geometrico

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 57.1 — Luogo geometrico

Si chiama **luogo geometrico** l'insieme di tutti e soli i punti del piano (o dello spazio) che godono di una determinata proprietà P:

$$L = \{\, X \in \text{piano} \mid X \text{ soddisfa la proprietà } P \,\}.$$

Nota — "Tutti e soli"

La frase "tutti e soli" è essenziale: l'insieme deve contenere *ogni* punto con la proprietà, e *nessun altro*. Per dimostrare che un certo insieme è il luogo richiesto, occorre dimostrare entrambe le inclusioni:

1. ogni punto con la proprietà appartiene all'insieme ("tutti");
2. ogni punto dell'insieme ha la proprietà ("soli").

È la *tecnica della doppia inclusione*, già incontrata nel capitolo 2 sugli insiemi.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Procedura — Dimostrare che L è un luogo geometrico

Per dimostrare che un certo insieme L è il luogo dei punti con la proprietà P:

1. *Diretta* ("tutti"): si prende un punto X con la proprietà P e si mostra che $X \in L$.
2. *Inversa* ("soli"): si prende un punto $Y \in L$ e si mostra che Y soddisfa la proprietà P.

Solo dimostrando entrambe si è davvero caratterizzato il luogo.

57.3. Asse di un segmento

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Teorema 57.1 — Asse del segmento

Dato un segmento $\overline{AB}$, il luogo dei punti del piano *equidistanti* dagli estremi A e B è la **perpendicolare** ad $\overline{AB}$ nel suo *punto medio*, detta *asse* del segmento.

Dimostrazione. Sia M il punto medio di AB e r la retta perpendicolare ad AB passante per M.

(Diretta) Sia $P \in r$ un punto qualsiasi. Consideriamo i triangoli PAM e PBM: hanno PM in comune, $AM = BM$ (per definizione di punto medio), e gli angoli in M retti (per definizione di perpendicolare). Per il primo criterio di congruenza dei triangoli (capitolo 32), $\triangle PAM \cong \triangle PBM$, dunque $PA = PB$: P è equidistante da A e B.

(Inversa) Sia Q un punto equidistante da A e B, cioè $QA = QB$. Allora Q appartiene al luogo dei punti equidistanti. Costruiamo il triangolo QAB: è *isoscele* (capitolo 33) con base AB. L'altezza dal vertice Q alla base è anche *mediana* e *asse della base*: dunque la perpendicolare per M (punto medio) passa per Q, cioè $Q \in r$.

In conclusione, r è esattamente il luogo cercato.

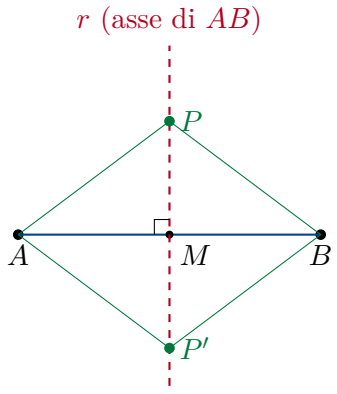


Figura 57.1: L'asse di un segmento $\overline{AB}$ è la retta perpendicolare ad AB passante per il punto medio M. Ogni punto P dell'asse è equidistante da A e B ($PA = PB$); viceversa, ogni punto equidistante da A e B appartiene all'asse.

57.4. Bisettrice di un angolo

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Teorema 57.2 — Bisettrice

Dato un angolo $\widehat{aOb}$ formato da due semirette a, b uscenti da O, il luogo dei punti *interni* all'angolo *equidistanti* dai due lati è la **bisettrice** dell'angolo: la semiretta che divide l'angolo in due angoli congruenti.

Dimostrazione (idea). Per ogni punto P della bisettrice, i triangoli ottenuti proiettando P sui due lati sono congruenti (per il criterio ipotenusa-angolo: angolo retto e angolo del semiangolo). Quindi le distanze dai due lati sono uguali. Viceversa, se P ha uguali distanze dai due lati, i due triangoli rettangoli formati con i piedi della perpendicolare sono congruenti (per cateto-cateto), e gli angoli in O sono uguali: quindi P sta sulla bisettrice.

Nota — Conseguenze

- Le tre bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in un punto, detto *incentro*, equidistante dai tre lati. È il centro della circonferenza inscritta nel triangolo.
- Anche le bisettrici di angoli esterni hanno proprietà di equidistanza (capitolo 64).

57.5. Circonferenza come luogo

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Già introdotta nel capitolo 56, la circonferenza è il primo luogo che si studia.

Teorema 57.3 — Circonferenza

Dati un punto O e un numero $r > 0$, il luogo dei punti del piano a distanza esattamente r da O è la *circonferenza* di centro O e raggio r.

(È la definizione stessa del capitolo 56: la dimostrazione di doppia inclusione è banale.)

Nota — Cerchio come luogo di disequazione

Variante: il *cerchio* chiuso di centro O e raggio r è il luogo dei punti con $\overline{OP} \leq r$ (distanza minore o uguale). Equivalentemente, è la circonferenza più i suoi punti interni.

Altri luoghi notevoli (cenni)

Nota — Parallela a distanza data

Date una retta r e un numero $d > 0$, il luogo dei punti del piano a distanza d da r è costituito da *due rette parallele* a r, una da ciascun lato.
Variante: se si chiede "distanza $\leq d$ da r", il luogo è la *striscia* di larghezza $2d$ centrata su r.

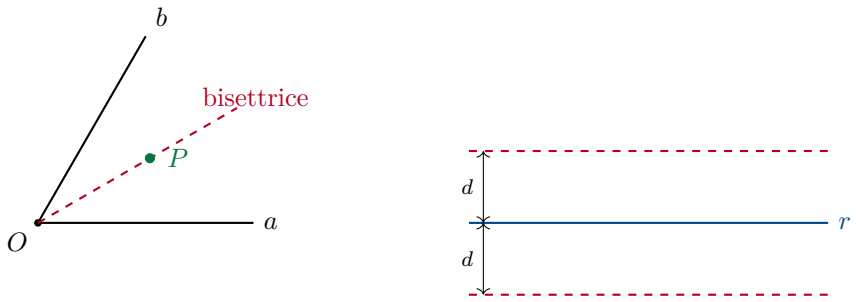
CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Nota — Sezioni coniche come luoghi

Tre celebri luoghi geometrici, che riprenderemo nei capitoli di geometria analitica:

- *Parabola* (capitolo 74): luogo dei punti equidistanti da un punto fisso (*fuoco*) e da una retta fissa (*direttrice*).
- *Ellisse* (capitolo 76): luogo dei punti la cui *somma* delle distanze da due punti fissi (*fuochi*) è una costante.
- *Iperbole* (capitolo 77): luogo dei punti la cui *differenza* (in valore assoluto) delle distanze da due fuochi è una costante.

Sono tutte "coniche", ottenibili come sezioni di un cono con un piano. Apollonio (III sec. a.C.) le studiò esaustivamente.



(a) bisettrice

(b) parallele a dist. d da r

Figura 57.2: Altri luoghi geometrici elementari. (a) La bisettrice dell'angolo $\widehat{aOb}$: ogni punto P della bisettrice è equidistante dai due lati a e b. (b) Le due rette parallele a r a distanza d: ognuna è il luogo dei punti che dista esattamente d da r (da un determinato lato).

57.6. Costruzioni con riga e compasso

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Molti luoghi geometrici si costruiscono con riga e compasso. Sono le costruzioni classiche della geometria euclidea, che hanno una storia bimillenaria.

Procedura — Asse di un segmento $\overline{AB}$

1. Centrato in A, si traccia un arco di raggio $r > \frac{1}{2}\overline{AB}$.
2. Centrato in B, con lo stesso raggio r, si traccia un altro arco.
3. I due archi si intersecano in due punti P e Q. La retta PQ è l'asse di $\overline{AB}$.

Spiegazione: i punti P e Q sono entrambi equidistanti da A e B (per costruzione), dunque appartengono al luogo cercato.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Procedura — Bisettrice di un angolo $\widehat{aOb}$

1. Centrato in O, si traccia un arco di raggio qualsiasi che taglia i lati in A (su a) e B (su b).
2. Centrato in A e B, con lo stesso raggio, si tracciano due archi che si intersecano in un punto P.
3. La semiretta OP è la bisettrice di $\widehat{aOb}$.

Spiegazione: il triangolo OAP è congruente al triangolo OBP (per il terzo criterio), dunque gli angoli in O sono uguali.

Procedura — Perpendicolare a una retta per un punto

Per costruire la perpendicolare a una retta r passante per un punto P (sia P su r o no):

1. Si centra in P un arco di raggio qualsiasi, che taglia r (o una sua opportuna estensione) in due punti A e B.
2. Si costruisce l'asse di $\overline{AB}$ (procedura precedente).

L'asse passa per P (perché $PA = PB$ per costruzione) ed è perpendicolare a r.

57.7. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 57.1 — Centro di una circonferenza data

Data una circonferenza disegnata, trovare il suo centro.
Soluzione. Si scelgono due corde qualsiasi della circonferenza, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Si costruiscono gli assi delle due corde (procedura della bisettrice/asse). Per il teorema visto nel capitolo 56, l'asse di una corda passa per il centro. Quindi i due assi si intersecano nel centro O della circonferenza.

Esempio 57.2 — Punto equidistante da tre rette concorrenti

Tre rette passano per uno stesso punto V formando tre angoli a due a due. Determinare un punto interno a uno dei sei settori, equidistante dalle tre rette.
Soluzione. Per le considerazioni sulla bisettrice, il luogo dei punti equidistanti da due rette concorrenti è la coppia di bisettrici dei quattro angoli che formano. Prendendo due bisettrici (una per coppia di rette), il loro punto di intersezione è equidistante da tutte e tre le rette.

Esempio 57.3 — Circoscrivere una circonferenza a un triangolo

Dato un triangolo ABC, trovare la circonferenza che passa per i tre vertici (*circoscritta*).
Soluzione. Il centro O della circonferenza circoscritta è equidistante da A, B, C (perché tutti e tre sono sulla circonferenza, cioè a distanza R). Quindi O appartiene all'asse di

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

$\overline{AB}$ (equidistanza da A e B) e anche all'asse di $\overline{BC}$ (equidistanza da B e C). Intersezione dei due assi: O. Raggio: $R = OA = OB = OC$. O è detto *circocentro*.
(L'asse di $\overline{AC}$ passa automaticamente per O, per la proprietà transitiva dell'equidistanza.)

Esempio 57.4 — Iscrivere una circonferenza in un triangolo

Dato un triangolo ABC, trovare la circonferenza tangente ai tre lati (*inscritta*).
Soluzione. Il centro I della circonferenza inscritta è equidistante dai tre lati (perché tutti i lati sono tangenti, a distanza r dal centro). Quindi I appartiene alla bisettrice dell'angolo in A (equidistanza dai lati AB e AC) e alla bisettrice in B (equidistanza da AB e BC). Intersezione: l'*incentro* I. Raggio r = distanza di I da uno qualsiasi dei lati.

Esempio 57.5 — Luogo definito da una distanza

Trova il luogo dei punti del piano che distano esattamente 3 cm dal punto A e esattamente 5 cm dal punto B, sapendo che $\overline{AB} = 4$ cm.
Soluzione. I punti a distanza 3 da A formano una circonferenza $\mathcal{C}_1$ di centro A e raggio 3. I punti a distanza 5 da B formano una circonferenza $\mathcal{C}_2$ di centro B e raggio 5. Il luogo cercato è $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Poiché $|R_1 - R_2| = 2 < 4 < 8 = R_1 + R_2$, le due circonferenze sono *secanti*: il luogo è formato da *due punti*.

57.8. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 57.1

1. Descrivi il luogo dei punti del piano che: (a) distano 4 cm da un punto fissato O; (b) distano 2 cm da una retta r; (c) sono equidistanti da due rette parallele (caso speciale!); (d) sono equidistanti da due rette incidenti.
2. Costruisci con riga e compasso (descrivi i passaggi): (a) l'asse di un segmento dato; (b) la bisettrice di un angolo dato; (c) la perpendicolare a una retta data per un suo punto; (d) la perpendicolare a una retta data per un punto esterno.
3. Trova, descrivendolo come intersezione di luoghi noti: (a) un punto equidistante da due punti A, B dati e a distanza 5 cm da un terzo punto C; (b) un punto equidistante dai tre vertici di un triangolo dato; (c) un punto equidistante dai tre lati di un triangolo dato.
4. Spiega perché i tre assi dei lati di un triangolo si incontrano in un *unico* punto (circocentro). (Suggerimento: usa la proprietà transitiva dell'equidistanza.)
5. Spiega perché le tre bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in un *unico* punto (incentro).
6. Determina il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a una retta data r, di raggio fissato R. (Suggerimento: il centro è equidistante dalla retta?)

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

7. In un piano, dati due punti A e B, trova il luogo dei punti P tali che $\widehat{APB}$ è un angolo retto. (Suggerimento: cosa dice il teorema di Talete sull'angolo nel semicerchio?)
8. (Discussione.) Considera la frase "il luogo dei punti tali che $\overline{PA} > \overline{PB}$ dove A e B sono due punti fissi". È un luogo geometrico? Quale figura del piano descrive?

57.9. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- Un *luogo geometrico* è l'insieme di *tutti e soli* i punti del piano che godono di una proprietà P.
- *Tecnica della doppia inclusione*: per dimostrare che un insieme è un luogo, si dimostrano due implicazioni ("ogni punto con P è nell'insieme" e "ogni punto dell'insieme ha P").
- *Luoghi fondamentali*:
  - **Circonferenza** di centro O e raggio r: distanza da O uguale a r.
  - **Asse del segmento** $\overline{AB}$: punti equidistanti da A e B. Perpendicolare ad AB per il punto medio.
  - **Bisettrice dell'angolo** $\widehat{aOb}$: punti equidistanti dai due lati. Divide l'angolo in due parti uguali.
  - **Parallele a una retta** r a distanza d: due rette parallele, una per lato.
- *Coniche come luoghi* (cenni, approfondimento nei capitoli di geometria analitica):
  - *Parabola*: equidistanti da un fuoco e una direttrice.
  - *Ellisse*: somma delle distanze da due fuochi costante.
  - *Iperbole*: differenza delle distanze da due fuochi (in valore assoluto) costante.
- *Punti notevoli del triangolo* (anticipazione capitolo 64): *circocentro* (intersezione degli assi, equidistante dai vertici, centro della circonferenza circoscritta); *incentro* (intersezione delle bisettrici, equidistante dai lati, centro della circonferenza inscritta).
- *Costruzioni con riga e compasso*: ogni luogo elementare si costruisce con un numero finito di operazioni base; sono il modello classico di "costruzione esatta".

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco