Capitolo 86

Combinazioni e coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Vi sono tante mirabili proprietà nel triangolo aritmetico, che se ne potrebbe trarre un intero trattato.”

— Blaise Pascal, *Traité du triangle arithmétique* (1654)

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

86.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

Dopo aver contato gli ordinamenti (*permutazioni*, 84) e le scelte ordinate (*disposizioni*, 85), passiamo all'ultimo dei tre grandi tipi di conteggio combinatorio: le **combinazioni**. La differenza chiave dalle disposizioni è che, nelle combinazioni, *l'ordine delle scelte non conta*: $\{A, B, C\}$ e $\{C, A, B\}$ sono *la stessa* combinazione, non due.

Esempi tipici:

- In quanti modi si può scegliere una *mano di* 5 *carte* da un mazzo di 52? L'ordine in cui ricevo le carte non conta — quello che conta è solo *quali* carte ho in mano.
- In quanti modi si può formare un *comitato di* 3 *persone* tra 10 candidati? Una volta scelte le tre persone, l'ordine in cui le ho scelte è irrilevante.
- Al *SuperEnalotto* si scelgono 6 numeri tra 1 e 90: vince chi indovina i 6 numeri, indipendentemente dall'ordine.

La risposta a tutti questi problemi è data dal **coefficiente binomiale** $\binom{n}{k}$ ("n su k"), una delle entità più importanti della matematica. Lo ritroveremo nello sviluppo del *binomio di Newton* (87), nel *calcolo della probabilità* (67), nella formula della *distribuzione binomiale* (157), e in moltissime altre situazioni.

Inoltre, i valori dei coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ formano una tabella triangolare — il **triangolo di Tartaglia** (in Italia) o *triangolo di Pascal* (nei paesi anglosassoni) — ricca di proprietà matematiche affascinanti, studiata da Pingala in India (III sec. a.C.), da Halāyudha, da Khayyām in Persia (XI sec.), da Yang Hui in Cina (XIII sec.), da Niccolò Tartaglia in Italia (1556) e finalmente sistematizzata da Blaise Pascal (1654) — da cui i due nomi attuali.

In questo capitolo:

- definiamo la combinazione semplice e ricaviamo la formula $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$;
- studiamo le *proprietà* del coefficiente binomiale (simmetria, formula di Stifel/Pascal);
- costruiamo il *triangolo di Tartaglia* e ne esploriamo le proprietà;
- introduciamo (con cenni) le *combinazioni con ripetizione*.

86.2. Definizione di combinazione semplice

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 86.1 — Combinazione semplice

Siano n, k interi con $0 \le k \le n$. Una **combinazione semplice** di n oggetti distinti presi k alla volta è un *sottoinsieme* di k oggetti scelti tra gli n a disposizione (*senza considerare l'ordine*, e *senza ripetizioni*).
Il numero di combinazioni semplici si indica con $C_{n,k}$, o più comunemente con il simbolo

$$\binom{n}{k} \qquad (\text{"}n \text{ su } k\text{"}, \textit{coefficiente binomiale}).$$

Esempio 86.1 — Le 3 combinazioni di 3 oggetti presi 2 alla volta

Tre oggetti A, B, C, presi a due a due. Combinazioni semplici (sottoinsiemi di 2 elementi):

$$\{A, B\},\ \{A, C\},\ \{B, C\}.$$

Totale: $\binom{3}{2} = 3$.
(Confronto con le *disposizioni*: $D_{3,2} = 6$, perché ciascuna combinazione genera $2! = 2$ disposizioni $\{A, B\} \to AB, BA$.)

Nota — Riassunto: l'ordine conta o no?

Operazione	Ordine conta	Ripetizioni
Permutazione	sì, tutti gli n	no (semplice)
Disposizione semplice $D_{n,k}$	sì	no
Disposizione con ripetizione $D'_{n,k}$	sì	sì
Combinazione semplice $\binom{n}{k}$	NO	no
Combinazione con ripetizione	NO	sì

Esempio: nella mano di carte l'ordine non conta (combinazione); nella formazione di calcio assegnata posizione-per-posizione l'ordine conta (disposizione).

86.3. Calcolo binomiale n k=n!/k! n-k !

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Teorema 86.1 — Formula del coefficiente binomiale

Per ogni $0 \le k \le n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Equivalentemente:

$$\binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$$

Dimostrazione. Ogni combinazione $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ di k oggetti genera esattamente $k!$ disposizioni distinte (permutando l'ordine degli elementi al suo interno, 84). Quindi:

$$D_{n,k} = k! \cdot C_{n,k} \implies C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!/(n-k)!}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Nota — Calcolo pratico

Spesso la forma più efficiente per il calcolo è

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

(k fattori al numeratore, $k!$ al denominatore). Per esempio:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{720}{6} = 120.$$

Si evita così di calcolare $10! = 3\,628\,800$.

Esempio 86.2 — Mano di carte

Quante mani di 5 carte si possono formare da un mazzo di 52?

Soluzione.

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = \frac{311\,875\,200}{120} = 2\,598\,960.$$

Esempio 86.3 — SuperEnalotto

In quanti modi si possono scegliere 6 numeri tra 1 e 90?

Soluzione.

$$\binom{90}{6} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85}{6!} = 622\,614\,630.$$

(Quindi la probabilità di vincere il SuperEnalotto con una giocata singola è $1/622\,614\,630$, ovvero circa 1 su 623 milioni.)

Esempio 86.4 — Comitato

In quanti modi posso scegliere 3 persone tra 10 candidati per un comitato?

Soluzione.

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120.$$

86.4. Coefficiente binomiale e proprietà

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

I coefficienti binomiali soddisfano numerose identità eleganti, che si dimostrano sia algebricamente (manipolando la formula con i fattoriali) sia combinatoriamente (interpretando $\binom{n}{k}$ come numero di sottoinsiemi).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Teorema 86.2 — Proprietà fondamentali del coefficiente binomiale

Per ogni $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
3. *Simmetria*: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. *Formula di Stifel* (o di Pascal): $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (per $1 \leq k \leq n-1$).
5. *Somma dei coefficienti di una riga*: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Dimostrazione.

(1), (2): direttamente dalla formula con i fattoriali e dalla definizione combinatoria ($\binom{n}{0} = 1$ è il sottoinsieme vuoto; $\binom{n}{n} = 1$ è tutto l'insieme; $\binom{n}{1} = n$ è la scelta di un singolo elemento).

(3) *Simmetria.* Algebricamente:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

Combinatoriamente: scegliere k oggetti da includere in un sottoinsieme è equivalente a scegliere $n-k$ oggetti da *escludere*.

(4) *Formula di Stifel* (interpretazione combinatoria). Fissiamo un elemento x dei nostri n. Le $\binom{n}{k}$ scelte di k oggetti si dividono in due categorie disgiunte:

- Quelle che *contengono* x: gli altri $k-1$ oggetti vanno scelti tra i restanti $n-1$, in $\binom{n-1}{k-1}$ modi.
- Quelle che *non contengono* x: i k oggetti vanno scelti tra i restanti $n-1$, in $\binom{n-1}{k}$ modi.

Sommando: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

(5) *Somma di una riga.* Il numero totale di sottoinsiemi di un insieme di n elementi è 2^n (ciascun elemento o c'è o non c'è: 2 scelte indipendenti per ognuno degli n elementi). D'altra parte, i sottoinsiemi possono essere contati per cardinalità: ci sono $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di k elementi, $k = 0, 1, \ldots, n$. Quindi $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Nota — Casi particolari della formula di Stifel

La formula $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ è la *regola di costruzione* del triangolo di Tartaglia (vedi sezione successiva): ogni elemento si ottiene sommando i due immediatamente sopra di esso.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 86.5 — Calcolo con le proprietà

$$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190.$$

(Per simmetria, anziché calcolare $\binom{20}{18}$ direttamente — che richiederebbe 18 fattori al numeratore — passo a $\binom{20}{2}$, molto più rapido.)

86.5. Triangolo di Tartaglia

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

I valori di $\binom{n}{k}$ si possono disporre in una tabella triangolare nota in Italia come **triangolo di Tartaglia** (dal nome di Niccolò Tartaglia, che lo descrisse nel *General Trattato di Numeri et Misure* del 1556) e nei paesi anglosassoni come *Pascal's triangle* (dal *Traité du triangle arithmétique* di Pascal del 1654, anche se Pascal stesso non rivendicava la priorità della scoperta).

Teorema 86.3 — Triangolo di Tartaglia

La riga n-esima (con $n = 0, 1, 2, \ldots$) contiene i coefficienti binomiali $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$. Per la formula di Stifel, ogni coefficiente interno è uguale alla *somma dei due coefficienti immediatamente sopra*.

$n = 0$				1				
$n = 1$			1		1			
$n = 2$		1		2		1		
$n = 3$	1		3		3		1	
$n = 4$		1		4		6		4		1
$n = 5$	1		5		10		10		5		1
$n = 6$		1		6		15		20		15		6		1
$n = 7$	1		7		21		35		35		21		7		1

Figura 86.1: Triangolo di Tartaglia: le prime 8 righe ($n = 0, 1, \ldots, 7$). Ogni elemento interno è la somma dei due immediatamente sopra (formula di Stifel, frecce in rosso). I bordi del triangolo sono sempre 1.

Nota — Proprietà visibili nel triangolo

- I *bordi* sono tutti 1 ($\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$).
- Ogni riga è *simmetrica* ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$).
- La *seconda diagonale* (dal lato) contiene i numeri naturali $1, 2, 3, \ldots$ ($\binom{n}{1} = n$).
- La *terza diagonale* contiene i *numeri triangolari* $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ ($\binom{n}{2}$).
- La somma degli elementi della riga n-esima è 2^n.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

- La *somma a colori alternati* (con segno) è 0: $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ per $n \geq 1$.

Nota — Cenni storici

- *Pingala* (III sec. a.C., India): nei *Chandahsastra* appare la prima versione del triangolo (chiamato *Meru Prastara*).
- *Halāyudha* (X sec., India): primo commento esplicito al triangolo di Pingala.
- *Omar Khayyām* (XI-XII sec., Persia): usa il triangolo per estrarre radici n-esime.
- *Yang Hui* (XIII sec., Cina): primo a pubblicare la tavola triangolare in forma esplicita. In Cina è ancora chiamato *triangolo di Yang Hui*.
- *Niccolò Tartaglia* (1556, Italia): lo include nel *General Trattato* per la risoluzione di equazioni.
- *Blaise Pascal* (1654, Francia): pubblica il *Traité du triangle arithmétique*, sistematizzando teoria e applicazioni.

86.6. Combinazioni con ripetizione

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 86.2 — Combinazione con ripetizione

Siano $n, k \geq 1$. Una **combinazione con ripetizione** di n tipi di oggetti presi k alla volta è una scelta non ordinata di k oggetti tra gli n tipi, *con possibilità di ripetere lo stesso tipo*.
Il numero si indica con $C'_{n,k}$.

Teorema 86.4 — Numero delle combinazioni con ripetizione

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Dimostrazione (idea, "stelle e barre"). Una combinazione con ripetizione di k palline scelte tra n colori può essere rappresentata come una sequenza di k "stelle" separate in n gruppi da $n-1$ "barre". Il numero totale di simboli è $n+k-1$, e dobbiamo scegliere k posizioni per le stelle (le altre saranno barre): $\binom{n+k-1}{k}$.

Esempio 86.6 — Palline da scegliere tra 3 colori

Quanti modi diversi ho di scegliere 5 palline da 3 colori (R, B, V)?

Soluzione.

$$C'_{3,5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21.$$

Esempio 86.7 — Gelato da 3 gusti, 2 palline

Quante combinazioni di gelato a 2 palline esistono se ci sono 5 gusti (e si possono ripetere)?

Soluzione.

$$C'_{5,2} = \binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = 15.$$

86.7. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 86.8 — Combinazione dalla disposizione

30 studenti in una classe; quanti modi ci sono di sceglierne 4 per formare una squadra (ruoli identici)?

Soluzione. L'ordine non conta:

$$\binom{30}{4} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{4!} = \frac{657\,720}{24} = 27\,405.$$

Esempio 86.9 — Combinazioni con vincolo

In una classe di 20 studenti (di cui 8 maschi e 12 femmine) si vuole scegliere un gruppo di 5 persone, con la condizione che ci siano *esattamente* 2 maschi.

Soluzione. Scegliamo separatamente:

- I 2 maschi tra gli 8: $\binom{8}{2} = 28$ modi.
- Le 3 femmine tra le 12: $\binom{12}{3} = 220$ modi.

Per il principio del conteggio: $28 \cdot 220 = 6160$.

Esempio 86.10 — Ambo, terno, quaterna, cinquina al Lotto

Al gioco del Lotto si estraggono 5 numeri tra 1 e 90 su una ruota. La probabilità di una *cinquina* (indovinare tutti e 5) si calcola come:

$$P(\text{cinquina}) = \frac{1}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{43\,949\,268} \approx 2.3 \times 10^{-8}.$$

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 86.11 — Verifica della formula di Stifel

Calcolare $\binom{6}{3}$ usando la formula di Stifel (e i valori già calcolati di $\binom{5}{2}$ e $\binom{5}{3}$).
Soluzione.

$$\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20.$$

(Verifica diretta: $\binom{6}{3} = 6 \cdot 5 \cdot 4/6 = 120/6 = 20$. ✓)

Esempio 86.12 — Somma binomiale

Calcolare $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$.
Soluzione. Dalla riga $n = 5$ del triangolo: $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$. ✓

Esempio 86.13 — Trovare n

Determinare n tale che $\binom{n}{2} = 28$.
Soluzione. $\binom{n}{2} = n(n-1)/2 = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56$. Cerco due interi consecutivi il cui prodotto sia 56: $n = 8$ e $n - 1 = 7$, $8 \cdot 7 = 56$ ✓. Quindi $n = 8$.

86.8. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 86.1

1. Calcola:
   - (a) $\binom{6}{2}$;
   - (b) $\binom{8}{5}$ (suggerimento: simmetria);
   - (c) $\binom{10}{0}$;
   - (d) $\binom{20}{19}$;
   - (e) $\binom{15}{3}$.
2. Scrivi le prime 10 righe del triangolo di Tartaglia.
3. In quanti modi posso scegliere 3 libri tra 12 per portarli in vacanza?
4. In una classe di 25 studenti, quanti modi ci sono di formare un gruppo di 5 persone?
5. In un mazzo di 40 carte italiane (4 semi $\times$ 10 valori), quante mani di 5 carte sono possibili?
6. Quante diagonali ha un poligono regolare di n lati? (Suggerimento: $\binom{n}{2} - n$.)
7. In un piano vengono presi n punti, di cui k allineati (e gli altri in posizione generica). Quanti triangoli si possono formare?
8. Verifica la formula di Stifel per $\binom{7}{4}$: calcola $\binom{6}{3} + \binom{6}{4}$ e confronta.
9. Da una squadra di 11 giocatori si devono scegliere 3 per i tiri di rigore. In quanti modi?

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

10. Calcola con la calcolatrice $\binom{52}{5}$ e $\binom{52}{2}$, e confrontali. Quale è il numero di possibili *mani di poker* (5 carte) e quale il numero di possibili *ambi*?
11. In una pizzeria ci sono 12 tipi di ingredienti. Quante pizze diverse si possono fare scegliendo *esattamente* 3 ingredienti tra di essi?
12. Quanti modi ci sono di scegliere una squadra di calcio (11 giocatori) da una rosa di 20?
13. Determina n tale che $\binom{n}{3} = 56$.
14. (Stelle e barre.) In quanti modi posso comprare 10 biglie scelte tra 4 colori (con ripetizioni)?
15. (Discussione.) Spiega in parole la differenza tra:
    - $\binom{n}{k}$ (combinazione semplice);
    - $D_{n,k}$ (disposizione semplice);
    - $D'_{n,k}$ (disposizione con ripetizione);
    - $C'_{n,k}$ (combinazione con ripetizione).

    Dai un esempio concreto per ognuna.
16. (Sfida.) Mostra (con un argomento combinatorio) che $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. (*Identità di Vandermonde*, caso particolare.)

86.9. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- *Combinazione semplice*: scelta *non ordinata* di k oggetti tra n, senza ripetizioni. È un *sottoinsieme*.
- *Coefficiente binomiale*:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{D_{n,k}}{k!}.$$
- *Relazione* $D_{n,k} = k!\,\binom{n}{k}$: ogni combinazione genera $k!$ disposizioni distinte.
- *Proprietà fondamentali*:
  - $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$;
  - *Simmetria*: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
  - *Stifel*: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$;
  - *Somma di riga*: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

- *Triangolo di Tartaglia*: tabella triangolare dei coefficienti binomiali, costruita ricorsivamente con la formula di Stifel. Storia: Pingala (III sec. a.C.) → Halāyudha → Khayyām → Yang Hui → Tartaglia (1556) → Pascal (1654).
- *Combinazione con ripetizione*: $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$ (formula "stelle e barre").
- *Quando usare* $\binom{n}{k}$: ogni volta che si sceglie un sottoinsieme di k elementi da un insieme di n, senza che conti l'ordine.
- *Applicazioni*: probabilità (67), specie quando i casi favorevoli si contano come "k scelte su n"; sviluppo del binomio di Newton (87); distribuzione binomiale (157).
- *Prossimo passo*: il *binomio di Newton* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (87), che dà ai coefficienti binomiali il loro nome (sono i coefficienti dello sviluppo).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco