Capitolo 89

Funzioni definite a tratti

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Per descrivere un mondo a tratti — interruzioni, soglie, salti di stato — la matematica si dota di funzioni che cambiano natura passando da un intervallo all’altro.”

— adattamento didattico

89.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l’AI

Non tutte le funzioni si scrivono con una formula unica valida su tutto il dominio. Spesso la regola *cambia* a seconda del valore di x in ingresso: pensiamo alla tariffa di una bolletta della luce, che ha un prezzo unitario fino a una certa soglia di consumo e uno diverso oltre; al costo delle spedizioni postali, “a peso”; all’IRPEF, in cui ogni scaglione ha un’aliquota propria; alla funzione che dice se un numero è positivo, negativo o nullo. In tutti questi casi, una funzione *a tratti*.

Le funzioni a tratti sono perfettamente legittime — è la regola di definizione a essere "a pezzi", non il loro essere funzioni. In questo capitolo introduciamo la *notazione* con sistema, impariamo a tracciare il grafico (con l'uso *cruciale* dei *pallini pieni/vuoti* agli estremi), e incontriamo le funzioni a tratti più famose: *valore assoluto* (già nota), *segno*, *parte intera*, *Heaviside*. Vedremo anche un'applicazione pratica importante: il calcolo a *scaglioni*, come quello delle imposte sul reddito.

Tutte queste funzioni potranno avere "salti" in certi punti, anticipando il concetto di *continuità* che incontreremo in modo rigoroso nel capitolo 130.

89.2. Definizione e rappresentazione

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 89.1 — Funzione definita a tratti

Una **funzione definita a tratti** (o *piecewise*) è una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ in cui la regola di calcolo cambia a seconda della regione del dominio in cui si trova x. Si scrive nella forma a sistema:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in I_1, \\ f_2(x) & \text{se } x \in I_2, \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & \text{se } x \in I_n, \end{cases}$$

dove $I_1, I_2, \dots, I_n$ sono intervalli (eventualmente puntuali) che formano una *partizione* del dominio: la loro unione è D, e non si sovrappongono.

Esempio 89.1 — Il valore assoluto è una funzione a tratti

La funzione $|x|$ (capitolo 25) è una funzione a tratti:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Su $[0, +\infty)$ si comporta come la funzione identità x; su $(-\infty, 0)$ si comporta come $-x$. Le due regole si "saldano" in $x = 0$, dove entrambe danno il valore 0.

Procedura — Calcolare $f(x_0)$ per una funzione a tratti

1. Identificare in quale intervallo I_k cade x_0.
2. Applicare la formula $f_k(x_0)$ corrispondente.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 89.2 — Valutazione

Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.
Calcolare $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$.

Soluzione.

- $-2 < 1$: $f(-2) = (-2)^2 = 4$.
- $0 < 1$: $f(0) = 0^2 = 0$.
- $1 \geq 1$: $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.
- $3 \geq 1$: $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Grafico: pallini pieni e pallini vuoti

Nota — Convenzione grafica per i punti di confine

Quando una funzione a tratti ha *discontinuità* (salti) negli estremi degli intervalli, è essenziale indicare con chiarezza se il punto di confine è incluso o no in ciascun pezzo.

- *Pallino pieno* (•) all'estremo di un tratto: il punto *appartiene* a quel tratto (cioè, f vale lì il valore di quel tratto).
- *Pallino vuoto* (○) all'estremo: il punto *non appartiene* a quel tratto.

Per ogni x del dominio deve esserci esattamente un pallino pieno (perché $f(x)$ è univoca!).

Esempio 89.3 — Grafico di una funzione con salto

Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.
Il grafico è formato da due segmenti orizzontali: $y = 1$ a sinistra di 0 (pallino vuoto in $(0, 1)$, perché $x = 0$ *non* fa parte di questo tratto), e $y = 3$ a destra di 0 (pallino pieno in $(0, 3)$, perché $x = 0$ ricade in $x \geq 0$). La funzione "salta" di 2 in $x = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

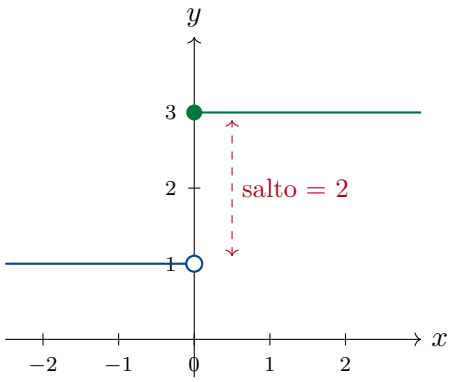


Figura 89.1: Grafico di una funzione a tratti con *salto* in $x = 0$: $f(x) = 1$ se $x < 0$ (con pallino *vuoto* a $(0, 1)$, escluso), $f(x) = 3$ se $x \geq 0$ (con pallino *pieno* a $(0, 3)$, incluso). Si osservi che esattamente uno dei due punti a quota $x = 0$ è "pieno": la funzione vale univocamente 3 in quel punto.

89.3. Funzione segno

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 89.2 — Funzione segno

La **funzione segno** (o *signum*) è la funzione $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Teorema 89.1 — Caratteristiche

- Dominio: $\mathbb{R}$; Immagine: $\{-1, 0, +1\}$ (insieme finito di tre valori).
- Funzione *dispari*: $\operatorname{sgn}(-x) = -\operatorname{sgn}(x)$.
- Discontinua in $x = 0$ (salto di ampiezza 2, da -1 a $+1$).
- Relazione utile: $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 89.4

$\operatorname{sgn}(-3) = -1$; $\operatorname{sgn}(0) = 0$; $\operatorname{sgn}(\sqrt{2}) = +1$; $\operatorname{sgn}(\pi - 4) = -1$ (perché $\pi < 4$).

89.4. Funzione parte intera

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 89.3 — Funzione parte intera

La **funzione parte intera** (o *floor*) di $x \in \mathbb{R}$ è il più grande intero che non supera x:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \le x \,\}.$$

Esempio 89.5

- $\lfloor 3{,}7 \rfloor = 3$; $\lfloor 5 \rfloor = 5$; $\lfloor \pi \rfloor = 3$;
- $\lfloor -1{,}3 \rfloor = -2$ (attenzione: il più grande intero $\le -1{,}3$ è -2, non -1).
- $\lfloor -3 \rfloor = -3$; $\lfloor 0{,}5 \rfloor = 0$.

Teorema 89.2 — Caratteristiche

- Dominio: $\mathbb{R}$; Immagine: $\mathbb{Z}$.
- Grafico: "a gradini" (*staircase*): su ogni intervallo $[n, n+1)$ vale costantemente n.
- Discontinua in ogni intero (salto di 1).
- Funzione *né pari né dispari*, ma vale $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$.

Definizione 89.4 — Funzione mantissa

La **mantissa** (o *parte frazionaria*) di $x \in \mathbb{R}$ è $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Vale sempre $0 \le \{x\} < 1$.

Esempio 89.6

$\{3{,}7\} = 3{,}7 - 3 = 0{,}7$; $\{-1{,}3\} = -1{,}3 - (-2) = 0{,}7$; $\{5\} = 0$.

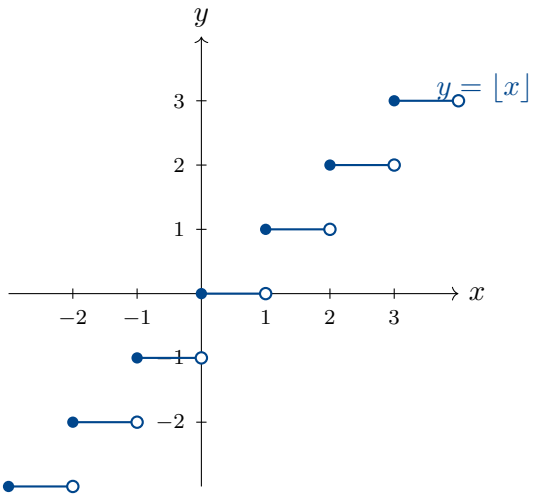


Figura 89.2: Grafico della funzione parte intera $\lfloor x \rfloor$. Su ogni intervallo $[n, n+1)$ la funzione è costante uguale a n: il pallino pieno $\bullet$ in (n, n) indica che il punto è incluso (da sinistra), quello vuoto $\circ$ in $(n+1, n)$ indica che il punto è escluso. La funzione "salta" di 1 a ogni intero.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Nota — Heaviside

Una funzione a tratti molto usata in fisica e ingegneria è la **funzione di Heaviside**

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0, \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Modella un "interruttore" che si accende in $x = 0$: spento prima, acceso da quel punto in poi. È strettamente legata alla funzione segno: $H(x) = \frac{1+\operatorname{sgn}(x)}{2}$ per $x \neq 0$.

89.5. Funzioni a tratti applicate

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Molte tariffe della vita reale sono *a scaglioni*: il prezzo unitario cambia man mano che si supera una certa soglia. Sono naturalmente modellate da funzioni a tratti.

Esempio 89.7 — Bolletta dell'acqua a scaglioni

Una società idrica applica le seguenti tariffe per x metri cubi consumati in un anno:

- fino a $30\,\mathrm{m}^3$: $0.40\,€/\mathrm{m}^3$;
- da $31\,\mathrm{m}^3$ a $100\,\mathrm{m}^3$: $0.80\,€/\mathrm{m}^3$ sulla *parte eccedente* 30;
- oltre $100\,\mathrm{m}^3$: $1.50\,€/\mathrm{m}^3$ sulla *parte eccedente* 100.

La spesa totale $C(x)$ è una funzione a tratti:

$$C(x) = \begin{cases} 0{,}40\,x & \text{se } 0 \leq x \leq 30, \\ 12 + 0{,}80\,(x - 30) & \text{se } 30 < x \leq 100, \\ 12 + 56 + 1{,}50\,(x - 100) = 68 + 1{,}50\,(x - 100) & \text{se } x > 100. \end{cases}$$

La funzione è continua nei punti di passaggio (lo studente verifichi che $C(30)$ vale 12 in entrambe le formule, e che $C(100)$ vale 68 in entrambe), perché i prezzi sono "saldati". Non c'è un salto, ma cambia la *pendenza*: il grafico è una spezzata.

Nota — IRPEF: imposta a scaglioni

L'imposta sul reddito (IRPEF) funziona allo stesso modo: ad esempio, fino a $15\,000\,€$ aliquota 23%; oltre, sulla parte eccedente, un'aliquota più alta; e così via per scaglioni successivi. Il calcolo totale è una funzione a tratti del reddito R.

Nota — Continuità a tratti: anticipo

Le funzioni a tratti possono o no avere *salti* nei punti di confine: dipende dal *raccordo* tra le formule.

- Se nei punti di confine i valori coincidono, la funzione è *continua* (anche se la regola cambia): pensa al valore assoluto, alle bollette, alle imposte.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

- Se non coincidono, la funzione è *discontinua* in quel punto: pensa al segno, alla parte intera, a Heaviside.

La *continuità* sarà studiata in modo rigoroso nel capitolo 130.

89.6. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 89.8 — Calcolo di valori

Sia $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \le 2 \\ x^2 - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$.
Calcolare $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.
Soluzione.

- $-1 \le 2$: $f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$.
- $0 \le 2$: $f(0) = 1$.
- $2 \le 2$: $f(2) = 2(2) + 1 = 5$. (Il punto $x = 2$ ricade nel *primo* tratto, per la condizione $x \le 2$.)
- $3 > 2$: $f(3) = 9 - 3 = 6$.

Si noti che nel passaggio $x = 2$, il *primo* tratto darebbe 5, mentre il *secondo* (se applicato) darebbe $4 - 3 = 1$: c'è un *salto* di 4. La funzione è discontinua in $x = 2$.

Esempio 89.9 — Determinare il parametro per la continuità

Determinare k in modo che la funzione $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x \le 1 \\ kx + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sia *senza salti* in $x = 1$.
Soluzione. Per la continuità, i due tratti devono assumere lo stesso valore in $x = 1$:

$$3(1) - 1 = 2 \quad \text{e} \quad k(1) + 2 = k + 2.$$

Imponiamo $k + 2 = 2 \Rightarrow k = 0$. Per $k = 0$, f vale 2 a sinistra di 1 e 2 a destra di 1: niente salto.

Esempio 89.10 — Riscrivere il valore assoluto

Riscrivere $f(x) = |x - 2|$ come funzione a tratti senza moduli.
Soluzione.

$$|x-2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \ge 2, \\ -(x-2) = 2 - x & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

Grafico: V con vertice in $(2, 0)$, pendenze -1 a sinistra e $+1$ a destra.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 89.11 — Parte intera in concreto

Calcolare $\lfloor 7{,}3 \rfloor$, $\lfloor -2{,}5 \rfloor$, $\lfloor 0 \rfloor$, $\{4{,}1\}$, $\{-4{,}1\}$.

Soluzione.

- $\lfloor 7{,}3 \rfloor = 7$;
- $\lfloor -2{,}5 \rfloor = -3$ (il più grande intero $\leq -2{,}5$);
- $\lfloor 0 \rfloor = 0$;
- $\{4{,}1\} = 4{,}1 - 4 = 0{,}1$;
- $\{-4{,}1\} = -4{,}1 - (-5) = 0{,}9$ (la mantissa è sempre in $[0, 1)$).

Esempio 89.12 — Tariffa postale

Una raccomandata costa 4.00 € fino a 20 g, 5.30 € tra 20 g e 100 g (esclusi), 6.90 € tra 100 g e 350 g (esclusi). Esprimere il costo $C(g)$ del peso g in grammi come funzione a tratti, e calcolare $C(15)$, $C(50)$, $C(100)$.

Soluzione.

$$C(g) = \begin{cases} 4{,}00 & \text{se } 0 < g \leq 20, \\ 5{,}30 & \text{se } 20 < g \leq 100, \\ 6{,}90 & \text{se } 100 < g \leq 350. \end{cases}$$

(Notiamo che le soglie sono chiuse a destra in modo che il peso esatto vada nello scaglione inferiore.)

- $C(15) = 4{,}00\,€$;
- $C(50) = 5{,}30\,€$;
- $C(100) = 5{,}30\,€$ (perché $g \leq 100$ ricade nel secondo tratto);
- Per $C(101)$ servirebbe il terzo tratto: $6{,}90\,€$.

La funzione è a gradini, con salti in 20, 100, 350.

89.7. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 89.1

1. Per la funzione $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, calcola: $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
   La funzione è continua in $x = 0$? Motiva.
2. Per la funzione $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$, calcola $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
   Traccia il grafico, indicando pallini pieni/vuoti.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

3. Calcola, riconducendo a una funzione a tratti se necessario: (a) $\operatorname{sgn}(-4)$, $\operatorname{sgn}(0)$, $\operatorname{sgn}(\pi)$; (b) $\lfloor 2{,}9 \rfloor$, $\lfloor -3{,}1 \rfloor$, $\lfloor 5 \rfloor$, $\lfloor -7 \rfloor$; (c) $\{3{,}25\}$, $\{-0{,}75\}$, $\{0\}$.

4. Verifica che, per ogni $x \in \mathbb{R}$: (a) $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$; (b) $|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$; (c) $\lfloor x \rfloor + \{x\} = x$.

5. Riscrivi come funzione a tratti, senza moduli: (a) $f(x) = |x+3|$; (b) $f(x) = |2x-1|$; (c) $f(x) = |x| + |x-2|$ (suggerimento: tre tratti).

6. Determina i valori dei parametri perché la funzione sia continua nei punti di confine: (a) $f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{se } x \le 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$; (b) $f(x) = \begin{cases} bx - 3 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$.

7. Tariffa idrica: usando l'esempio del paragrafo applicativo, calcola la spesa per $50\,\mathrm{m}^3$, $120\,\mathrm{m}^3$, $200\,\mathrm{m}^3$.

8. IRPEF semplificata: per redditi annui R, l'imposta è $I(R) = 0{,}23\,R$ se $R \le 15\,000$ e $I(R) = 3\,450 + 0{,}27(R - 15\,000)$ se $R > 15\,000$. Calcola l'imposta per $R = 10\,000$, $R = 15\,000$, $R = 20\,000$.

9. (Discussione.) Una funzione a tratti può essere iniettiva? Costruisci un esempio di funzione a tratti definita su $\mathbb{R}$ che sia anche iniettiva.

89.8. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- Una *funzione a tratti* è definita da formule diverse in diverse parti del dominio, ognuna su un intervallo. La notazione standard usa il sistema con parentesi graffa.
- Per valutare $f(x_0)$: si individua in quale tratto cade x_0 e si applica la formula corrispondente.
- Convenzione grafica: *pallino pieno* $\bullet$ = punto incluso; *pallino vuoto* $\circ$ = punto escluso. Per ogni x del dominio deve esserci esattamente un pallino pieno.
- Funzioni a tratti notevoli:
  - *valore assoluto* $|x|$: continua, V con vertice in 0;
  - *segno* $\operatorname{sgn}(x)$: tre valori $-1, 0, +1$, salto in $x = 0$;
  - *parte intera* $\lfloor x \rfloor$: funzione a gradini, salti su ogni intero;
  - *mantissa* $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, sempre in $[0, 1)$;
  - *Heaviside* $H(x)$: interruttore 0/1.
- Applicazioni concrete: *tariffe a scaglioni* (bollette, IRPEF, postali). La spesa è una funzione a tratti del consumo/reddito/peso. Può essere *continua* (i tratti si saldano) o *a gradini* (salti).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

- La *continuità* di una funzione a tratti nei punti di confine richiede che i valori dei due tratti coincidano: tema che riprenderemo nel capitolo 130.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco