Capitolo 96

Identità goniometrica fondamentale

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Una sola relazione, $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$*, collega per sempre seno e coseno. Da essa discende l’intero edificio delle identità trigonometriche: conoscere una funzione goniometrica, e il quadrante in cui giace l’angolo, basta a determinare tutte le altre.”*

— Adattato da Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) — Gauss esprimeva con questa formula il legame “pitagorico” tra le coordinate di un punto sul cerchio unitario

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

96.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

Nel capitolo precedente (95) abbiamo definito seno e coseno come coordinate del punto P_α sulla circonferenza goniometrica, e abbiamo già visto, di passaggio, l'identità $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. In questo capitolo le diamo la centralità che merita: è la *relazione fondamentale* della goniometria, e da essa discendono praticamente tutte le altre identità.

A che cosa serve?

- *Calcolare* una funzione goniometrica conoscendone un'altra (es.: dato $\operatorname{sen}\alpha$ trovare $\cos\alpha$).
- *Semplificare* espressioni trigonometriche complicate fino a una forma elementare.
- *Dimostrare* l'equivalenza di due scritture diverse della stessa quantità.
- *Risolvere* equazioni e disequazioni goniometriche, riducendo tutto a una sola funzione (o seno, o coseno, o tangente).

Imparare a manovrare l'identità fondamentale — e i suoi corollari — è il primo passo verso la fluidità in trigonometria.

96.2. La relazione fondamentale $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 96.1 — Identità goniometrica fondamentale

Per ogni angolo $\alpha\in\mathbb{R}$ vale

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

(Si scrive anche $\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$; la potenza ^{2} qui significa $(\operatorname{sen}\alpha)^2$, non $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\alpha)$.)

Dimostrazione (per via geometrica analitica). Il punto $P_\alpha=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$ appartiene per definizione alla circonferenza goniometrica $x^2+y^2=1$. Sostituendo $x=\cos\alpha$ e $y=\operatorname{sen}\alpha$ si ottiene direttamente la tesi.

Dimostrazione (col teorema di Pitagora). Sia α un angolo del I quadrante. Il triangolo rettangolo OHP_α, dove $H=(\cos\alpha,0)$ è il piede della perpendicolare da P_α all'asse x, ha cateti di lunghezza $|\cos\alpha|$ e $|\operatorname{sen}\alpha|$ e ipotenusa di lunghezza 1 (raggio del cerchio). Per il teorema di Pitagora:

$$|\cos\alpha|^2+|\operatorname{sen}\alpha|^2=1^2\iff\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1.$$

Negli altri quadranti la stessa dimostrazione vale ripetendo il ragionamento con i moduli; il risultato è lo stesso perché compaiono solo quadrati. Vedi fig. 96.1.

Attenzione!

La scrittura $\operatorname{sen}^2\alpha$ è una convenzione comoda ma ambigua a chi inizia: significa $(\operatorname{sen}\alpha)^2$, mai $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\alpha)$ né $\operatorname{sen}(\alpha^2)$. Per gli esponenti negativi, però, la convenzione *non* si usa:

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

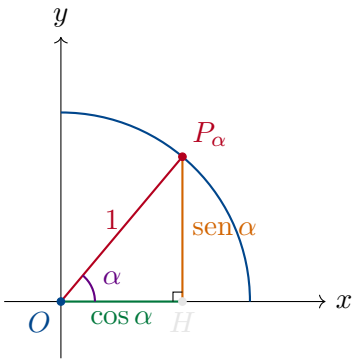


Figura 96.1: Dimostrazione pitagorica dell'identità fondamentale: nel triangolo rettangolo OHP_α i cateti misurano $|\cos\alpha|$ e $|\operatorname{sen}\alpha|$, l'ipotenusa misura 1 (il raggio). Pitagora dà $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$.

$\operatorname{sen}^{-1}\alpha$ indica la funzione inversa $\operatorname{arcsen}\alpha$, *non* $1/\operatorname{sen}\alpha$ (che si scrive $\operatorname{cosec}\alpha$ o $1/\operatorname{sen}\alpha$).

96.3. Seno in funzione del coseno (e viceversa)

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Dall'identità fondamentale si ricavano subito le *relazioni inverse*, che permettono di esprimere il seno conoscendo il coseno (o viceversa). La cosa importante — e dove gli studenti sbagliano più spesso — è la *scelta del segno*, che dipende dal quadrante.

Risolvendo l'identità rispetto al seno:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \iff \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Analogamente, risolvendo rispetto al coseno:

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \iff \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Relazioni inverse (con scelta del segno secondo il quadrante):

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Regole per il segno

Quadrante	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$
I	$+$	$+$
II	$+$	$-$
III	$-$	$-$
IV	$-$	$+$

Procedura — Da $\cos\alpha$ a $\operatorname{sen}\alpha$ (o viceversa)

1. Calcolare $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (o $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$).
2. Determinare il quadrante di α dalla traccia.
3. Scegliere il segno coerente col quadrante.

Esempio 96.1 — Calcolo con il segno corretto

Sapendo che $\cos\alpha = -3/5$ e che $\alpha \in (\pi/2, \pi)$ (II quadrante), determinare $\operatorname{sen}\alpha$.
Algebra. $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 9/25 = 16/25$, dunque $\operatorname{sen}\alpha = \pm 4/5$.
Scelta del segno. Nel II quadrante il seno è *positivo*, dunque $\operatorname{sen}\alpha = +4/5$.

Esempio 96.2 — Quadrante non specificato

Sapendo solo che $\operatorname{sen}\alpha = -0.6$, determinare $\cos\alpha$.
Algebra. $\cos^2\alpha = 1 - 0.36 = 0.64$, dunque $\cos\alpha = \pm 0.8$.
Senza informazioni sul quadrante il segno del coseno resta indeterminato: α potrebbe essere nel III quadrante (con $\cos\alpha = -0.8$) o nel IV quadrante (con $\cos\alpha = +0.8$).
Lezione: l'informazione sul quadrante è *essenziale*; senza, ci sono sempre due possibili soluzioni.

96.4. Tangente in funzione di seno e coseno

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Dalla definizione $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha$ e dall'identità fondamentale si ricavano le espressioni della tangente in funzione di una sola fra le altre due funzioni.

Tangente da coseno

Combinando $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ con $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Il segno è positivo nel I e III quadrante, negativo nel II e IV.

Tangente da seno

Analogamente, da $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

Il segno è positivo nel I e III quadrante, negativo nel II e IV (cioè il segno della tangente).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Seno e coseno da tangente

Talvolta serve l'operazione inversa: dato $\operatorname{tg}\alpha$, ricavare $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$. Si parte dall'identità $\sec^2\alpha = 1+\operatorname{tg}^2\alpha$ (dimostrata in cap. 95):

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\operatorname{tg}^2\alpha \iff \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \iff \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Da cui $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$.

Da tangente a seno e coseno:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

(Il segno si sceglie in base al quadrante.)

Esempio 96.3 — Da tangente a seno e coseno

Sapendo che $\operatorname{tg}\alpha = -2$ e che $\alpha\in(3\pi/2, 2\pi)$ (IV quadrante), determinare $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.
Algebra. $1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1+4 = 5$, dunque

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{-2}{\sqrt{5}} = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Nel IV quadrante il coseno è positivo, dunque

$$\cos\alpha = +\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Verifica: $\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha = -2$ ✓; $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 4/5+1/5 = 1$ ✓.

96.5. Identità derivate e tecniche di dimostrazione

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 96.2 — Identità goniometrica

Un'*identità goniometrica* è un'uguaglianza che coinvolge funzioni goniometriche e che è vera per *tutti* i valori dell'angolo per cui i due membri sono definiti.

Identità vs equazione. Un'*equazione* goniometrica è invece vera solo per certi valori particolari dell'angolo (che vanno trovati). Per esempio:

- identità: $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$ (vera per ogni α);
- equazione: $\operatorname{sen}\alpha = 1/2$ (vera per $\alpha = \pi/6+2k\pi$ o $\alpha = 5\pi/6+2k\pi$).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Identità derivate fondamentali

Identità ricorrenti, derivate dalla fondamentale:

$$1-\cos^2\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha, \qquad 1-\operatorname{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha, \qquad \operatorname{cotg}^2\alpha+1=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Tecniche per dimostrare un'identità

Procedura — Verifica di un'identità goniometrica

1. Lavorare *separatamente* sul primo e sul secondo membro: non passare quantità da una parte all'altra (potrebbe sembrare un'equazione).
2. Trasformare il membro più "complicato" (più termini, frazioni, potenze) per ricondurlo all'altro.
3. Strumenti standard:
   - sostituire $\operatorname{sen}^2\alpha$ con $1-\cos^2\alpha$ o viceversa;
   - esprimere $\operatorname{tg},\operatorname{cotg},\sec,\operatorname{cosec}$ in termini di sen e cos;
   - portare a denominatore comune le frazioni;
   - raccogliere fattori comuni, riconoscere prodotti notevoli (somma per differenza, quadrato di binomio).
4. *Verificare* il dominio: l'identità vale dove entrambi i membri sono definiti.

Esempio 96.4 — Identità con prodotto notevole

Dimostrare che $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.
Sviluppo del primo membro. Quadrato di binomio:

$$(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha.$$

Identità fondamentale: $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Sostituendo:

$$=1+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha,$$

che è il secondo membro. ✓

Esempio 96.5 — Riduzione a sen e cos

Dimostrare che $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$, per $\operatorname{sen}\alpha,\cos\alpha\neq 0$.
Primo membro a sen e cos:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Denominatore comune:

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha},$$

usando l'identità fondamentale. ✓

Esempio 96.6 — Differenza di quadrati

Dimostrare che $\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$.
Primo membro, scomponendo come differenza di quadrati:

$$\operatorname{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = (\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = (\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)\cdot 1.$$

Conclusione: l'espressione è uguale a $\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$, come voluto. ✓

96.6. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 96.7 — Da sen a cos, con scelta del segno

Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{3}/3$ e che $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, determinare $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$.
Algebra. $\cos^2\alpha = 1 - 1/3 = 2/3$, dunque $\cos\alpha = \pm\sqrt{2/3} = \pm\sqrt{6}/3$.
Scelta del segno: nel II quadrante il coseno è negativo, dunque $\cos\alpha = -\sqrt{6}/3$.
Tangente: $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha = (\sqrt{3}/3)/(-\sqrt{6}/3) = -\sqrt{3}/\sqrt{6} = -\sqrt{1/2} = -\sqrt{2}/2$.

Esempio 96.8 — Espressione semplificata

Semplificare $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}$ per $\cos\alpha \neq 1$.
Algebra. Sostituendo $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$:

$$\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1-\cos\alpha} = 1 + \cos\alpha.$$

Risultato: $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha} = 1 + \cos\alpha$ (per $\cos\alpha \neq 1$, cioè $\alpha \neq 2k\pi$).

Esempio 96.9 — Verifica di un'identità con tangente

Dimostrare che $(1-\cos^2\alpha)\cdot\sec\alpha = \operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\alpha$, per $\cos\alpha \neq 0$.
Primo membro: $(1-\cos^2\alpha)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$.
Secondo membro: $\operatorname{sen}\alpha\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$.
Conclusione: i due membri coincidono. ✓

Esempio 96.10 — Espressione in termini di tangente

Esprimere $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ in funzione di $\operatorname{tg}\alpha$.

Algebra. Moltiplichiamo e dividiamo per $\cos^2\alpha$:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha}{1/\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

E poiché $\cos^2\alpha = 1/(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

(Formula utilissima negli integrali e nelle sostituzioni $t=\operatorname{tg}(\alpha/2)$.)

Esempio 96.11 — Razionalizzazione di un'espressione goniometrica

Mostrare che $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha} = 2\sec^2\alpha$.

Algebra. Denominatore comune (prodotto somma per differenza):

$$\frac{(1+\operatorname{sen}\alpha)+(1-\operatorname{sen}\alpha)}{(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{2}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha} = 2\sec^2\alpha.$$

✓

Esempio 96.12 — Verifica con valori notevoli

Verificare numericamente l'identità $\operatorname{tg}^2\alpha+1 = 1/\cos^2\alpha$ per $\alpha=\pi/3$.

Calcolo. $\operatorname{tg}(\pi/3)=\sqrt{3}$, $\cos(\pi/3)=1/2$.

Primo membro: $\operatorname{tg}^2(\pi/3)+1 = 3+1 = 4$.

Secondo membro: $1/\cos^2(\pi/3) = 1/(1/4) = 4$. ✓

96.7. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 96.1

1. Per ciascuna delle seguenti tracce, determinare le altre due funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente). Attenzione alla scelta del segno!

   (a) $\operatorname{sen}\alpha = 4/5$, $\alpha\in(\pi/2,\pi)$;

   (b) $\cos\alpha = -5/13$, $\alpha\in(\pi,3\pi/2)$;

   (c) $\operatorname{tg}\alpha = -7/24$, $\alpha\in(3\pi/2,2\pi)$;

   (d) $\operatorname{sen}\alpha = -1/3$, $\alpha\in(\pi,3\pi/2)$;

   (e) $\cos\alpha = 0.6$, $\alpha\in(-\pi/2,0)$.

2. Verificare le seguenti identità (cioè dimostrarle):

(a) $\operatorname{sen}^2\alpha(1+\operatorname{cotg}^2\alpha)=1$;

(b) $\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=1$;

(c) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\operatorname{sen}^2\alpha$;

(d) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha=1$ (specificando il dominio);

(e) $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{cosec}\alpha=1$ (specificando il dominio).

3. Verificare le seguenti identità un po' più ricche:

(a) $\operatorname{sen}^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$;

(b) $\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$;

(c) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ (con $\operatorname{sen}\alpha\neq 1$, $\cos\alpha\neq 0$);

(d) $\dfrac{1}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1}{1-\cos\alpha}=2\operatorname{cosec}^2\alpha$;

(e) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}^2\alpha$.

4. Semplificare le espressioni:

(a) $(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)$;

(b) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$;

(c) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ (per $\operatorname{sen}\alpha\neq 0$);

(d) $\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha-1$;

(e) $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

5. Esprimere in funzione della sola tangente:

(a) $\operatorname{sen}^2\alpha$ (formula utile per le sostituzioni in integrali);

(b) $\cos^2\alpha$;

(c) $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ (verificare il risultato dell'esempio: $\operatorname{tg}\alpha/(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$);

(d) $1+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.

6. Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=1.2$, calcolare $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$. (Suggerimento: elevare al quadrato e usare l'identità fondamentale.)

7. Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha=k$, esprimere $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$ in funzione di k.

8. Sapendo che $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=a$ e $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=b$, mostrare che $a^2-2b=1$. (Lega fra due quantità simmetriche.)

9. Mostrare che, per ogni α con $\cos\alpha\neq 0$, vale $1+\operatorname{tg}^2\alpha\geq 1$, e quindi $|\cos\alpha|\leq 1$.

10. *Sfida.* Mostrare che $\operatorname{sen}^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$. (Suggerimento: $\operatorname{sen}^6+\cos^6=(\operatorname{sen}^2+\cos^2)(\operatorname{sen}^4-\operatorname{sen}^2\cos^2+\cos^4)$.)

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

11. Determinare per quali $\alpha \in [0, 2\pi)$ l'espressione $\sqrt{1-\cos^2\alpha} - \operatorname{sen}\alpha$ è uguale a 0. (Suggerimento: la radice è $|\operatorname{sen}\alpha|$, dunque l'espressione vale 0 quando $\operatorname{sen}\alpha \geq 0$, cioè $\alpha \in [0, \pi]$.)

12. Una calcolatrice difettosa fornisce $\cos\alpha = -0.97$ ma cancella ogni informazione sul quadrante. Quali sono i due possibili valori di $\operatorname{sen}\alpha$?

13. *Sfida algebrica.* Mostrare che, per ogni α in cui le funzioni sono definite,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}^3\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}.$$

(Suggerimento: a primo membro raccogliere $\operatorname{sen}\alpha$ al numeratore.)

96.8. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- *Identità goniometrica fondamentale*: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, valida per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Si dimostra in due modi: equivalentemente come "P_α sta sul cerchio unitario" o col teorema di Pitagora applicato al triangolo OHP_α.
- *Convenzione di scrittura*: $\operatorname{sen}^2\alpha = (\operatorname{sen}\alpha)^2$. Eccezione: $\operatorname{sen}^{-1}\alpha = \operatorname{arcsen}\alpha$, *non* $1/\operatorname{sen}\alpha$.
- *Relazioni inverse* (uno in funzione dell'altro):

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha},$$

con il segno scelto in base al quadrante.

- *Tangente da seno o coseno* (con segno da quadrante):

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \pm\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

- *Seno e coseno da tangente*: $\cos\alpha = \pm 1/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\operatorname{sen}\alpha = \pm\operatorname{tg}\alpha/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.
- *Identità di Pitagora generalizzate*: $\sec^2\alpha = 1+\operatorname{tg}^2\alpha$, $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1+\operatorname{cotg}^2\alpha$.
- *Identità vs equazione*: un'identità è vera per ogni angolo in cui i due membri sono definiti; un'equazione solo per certi valori particolari.
- *Tecniche per dimostrare un'identità*: lavorare separatamente sui due membri; ridurre tutto a sen e cos; portare a denominatore comune; riconoscere prodotti notevoli (somma per differenza, quadrato di binomio, differenza di quadrati).
- Nel prossimo capitolo (97) studiamo come trasformano seno e coseno per *archi associati*: $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $-\alpha$, $\pi/2-\alpha$, $\pi/2+\alpha$.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco