Capitolo 97

Archi associati e angoli notevoli

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Le simmetrie del cerchio sono le simmetrie delle funzioni goniometriche: ogni asse di simmetria, ogni rotazione di un quarto di giro, ogni inversione attraverso l’origine si traduce in una identità tra seno, coseno e tangente. Memorizzare cinque tabelle è meno utile che capire le cinque figure da cui discendono.”

— Felix Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (1908) — approccio geometrico unificato alla trigonometria

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

97.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

Nei capitoli precedenti abbiamo definito seno, coseno e tangente per un angolo α qualsiasi. In pratica però la calcolatrice (e la nostra memoria) sa fornire solo i *valori notevoli* per gli angoli del I quadrante: $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$. Come si fa quando l'angolo cade negli altri quadranti, oppure è negativo, oppure è più grande di un giro?

La risposta è negli *archi associati*: angoli che, partendo da un dato α, si ottengono per simmetria sul cerchio goniometrico. Per ognuno di essi le funzioni goniometriche valgono *le stesse* dell'angolo α, eventualmente cambiate di segno.

Cinque sono i casi fondamentali, corrispondenti alle cinque simmetrie naturali del cerchio:

- $\pi - \alpha$ (angoli *supplementari*) — simmetria rispetto all'asse y;
- $\pi + \alpha$ (angoli che *differiscono di* π) — simmetria centrale rispetto all'origine;
- $-\alpha$ (angoli *opposti*) — simmetria rispetto all'asse x;
- $\pi/2 - \alpha$ (angoli *complementari*) — simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$;
- $\pi/2 + \alpha$ (angoli che *differiscono di* $\pi/2$) — rotazione antioraria di un quarto di giro.

Imparare a usare queste cinque relazioni permette di *ridurre* il calcolo di una funzione goniometrica su *qualunque* angolo al calcolo sull'angolo notevole equivalente nel I quadrante.

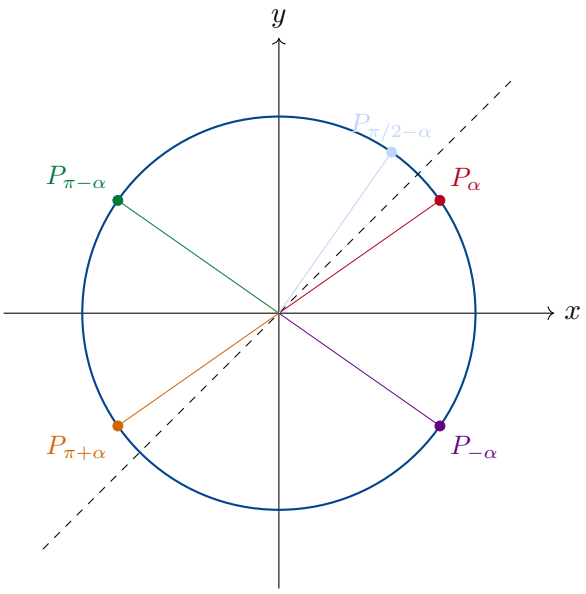


Figura 97.1: I cinque archi associati a α: $\pi - \alpha$ (verde, riflesso rispetto all'asse y), $\pi + \alpha$ (arancio, simmetrico rispetto all'origine), $-\alpha$ (viola, riflesso rispetto all'asse x), $\pi/2 - \alpha$ (celeste, riflesso rispetto alla bisettrice $y = x$). Ogni simmetria si traduce in una identità sulle funzioni goniometriche.

97.2. Angoli supplementari: $\pi - \alpha$

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Due angoli α e β si dicono *supplementari* se $\alpha+\beta=\pi$ (cioè $\beta=\pi-\alpha$). Sulla circonferenza goniometrica, il punto $P_{\pi-\alpha}$ è il *simmetrico* di P_α rispetto all'asse y: ha stessa ordinata e ascissa opposta. Dunque:

Angoli supplementari ($\beta=\pi-\alpha$):

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha,\qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\qquad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Visualizzare: se α è nel I quadrante, $\pi-\alpha$ è nel II; il seno (ordinata) si conserva, il coseno (ascissa) cambia segno. Esempio: $\operatorname{sen}(2\pi/3)=\operatorname{sen}(\pi-\pi/3)=\operatorname{sen}(\pi/3)=\sqrt{3}/2$.

Dimostrazione formale. Ruotando di π il punto $(1,0)$ si arriva in $(-1,0)$. Ruotando *indietro* di α (cioè di $-\alpha$ partendo dal nuovo orientamento) si arriva nel punto simmetrico di P_α rispetto all'asse y: $(-\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$. Quindi $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$. Per la tangente: $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}(\pi-\alpha)/\cos(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha/(-\cos\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

97.3. Angoli che differiscono di π: $\pi+\alpha$

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Il punto $P_{\pi+\alpha}$ è il *simmetrico* di P_α rispetto all'origine: ha ascissa e ordinata opposte. Geometricamente $P_{\pi+\alpha}=-P_\alpha$. Dunque:

Angoli che differiscono di π (cioè $\beta=\pi+\alpha$):

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha,\qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\qquad \operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Osservazione importante. La tangente *non cambia*: questo è un altro modo di vedere il fatto che la tangente ha periodo π (cap. 95), invece di 2π. sen e cos cambiano entrambi segno, ma il loro rapporto resta invariato.

97.4. Angoli opposti: $-\alpha$

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Il punto $P_{-\alpha}$ è il *simmetrico* di P_α rispetto all'asse x: stessa ascissa, ordinata opposta. È la situazione che fa di seno una funzione *dispari* e di coseno una funzione *pari*.

Angoli opposti ($\beta=-\alpha$):

$$\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha,\qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\qquad \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Conseguenza. La tangente è dispari: $\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. Si verifica dividendo le due relazioni precedenti: $\operatorname{tg}(-\alpha)=\operatorname{sen}(-\alpha)/\cos(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha=-\operatorname{tg}\alpha$.

Lo stesso vale, ovviamente, per cotangente e cosecante (dispari) e per secante (pari, come il coseno).

97.5. Angoli complementari: $\pi/2-\alpha$

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Due angoli α e β si dicono *complementari* se $\alpha + \beta = \pi/2$ (cioè $\beta = \pi/2 - \alpha$). Sulla circonferenza, $P_{\pi/2-\alpha}$ è il *simmetrico* di P_α rispetto alla bisettrice del I quadrante ($y = x$). La simmetria rispetto a quella retta *scambia* le coordinate $(x, y) \to (y, x)$:

Angoli complementari ($\beta = \pi/2 - \alpha$):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Etimologia. È da questa relazione che "co-seno" (latino *cosinus*, da *complementi sinus*, "seno del complemento") prende il nome: $\cos\alpha = \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha)$. Analogamente *cotangente* e *cosecante* sono tangente e secante dell'angolo complementare.

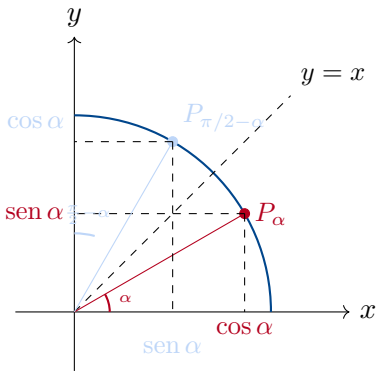


Figura 97.2: Angoli complementari: $P_{\pi/2-\alpha}$ è il riflesso di P_α rispetto alla bisettrice $y = x$. Le coordinate si scambiano: ascissa e ordinata di un punto sono ordinata e ascissa dell'altro. Da qui $\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$ e $\cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$.

97.6. Angoli che differiscono di $\pi/2$: $\pi/2 + \alpha$

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Il punto $P_{\pi/2+\alpha}$ si ottiene da P_α con una *rotazione antioraria di* $\pi/2$. La rotazione di un quarto di giro nel piano cartesiano manda $(x, y) \to (-y, x)$. Quindi:

Angoli che differiscono di $\pi/2$ ($\beta = \pi/2 + \alpha$):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{cotg}\alpha.$$

Osservazione. La differenza rispetto ai *complementari* è il segno del coseno: $\cos(\pi/2 - \alpha) = +\operatorname{sen}\alpha$, mentre $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$. Bisogna prestare attenzione a distinguere $\pi/2 - \alpha$ (sottrazione) da $\pi/2 + \alpha$ (addizione).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Tabella riassuntiva

Arco associato	sen	cos	tg
$\pi - \alpha$ (supplementare)	$+\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi + \alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\operatorname{tg}\alpha$
$-\alpha$ (opposto)	$-\operatorname{sen}\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi/2 - \alpha$ (complementare)	$+\cos\alpha$	$+\operatorname{sen}\alpha$	$+\operatorname{cotg}\alpha$
$\pi/2 + \alpha$	$+\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

Strategia operativa: ridurre al I quadrante

Procedura — Ridurre il calcolo al I quadrante

Per calcolare $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ di un angolo α qualsiasi:

1. *Periodicità*: portare α nell'intervallo $[0, 2\pi)$ sommando o sottraendo multipli di 2π.
2. *Quadrante*: identificare in quale quadrante cade α.
3. *Riduzione*: scrivere α come $\pi - \alpha'$, $\pi + \alpha'$, $2\pi - \alpha'$ $(= -\alpha')$, con α' nel I quadrante.
4. *Applicare* l'identità degli archi associati per ottenere il valore in funzione di $\operatorname{sen}\alpha'$, $\cos\alpha'$, $\operatorname{tg}\alpha'$.
5. *Calcolare* il valore numerico se α' è un angolo notevole.

Esempio 97.1 — Riduzione di un angolo del II quadrante

Calcolare $\operatorname{sen}(5\pi/6)$ e $\cos(5\pi/6)$.
Quadrante: $5\pi/6 = \pi - \pi/6$, è nel II quadrante.
Riduzione (supplementare):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

97.7. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 97.2 — Angolo del III quadrante

Calcolare $\operatorname{sen}(7\pi/6)$ e $\operatorname{tg}(7\pi/6)$.
Quadrante: $7\pi/6 = \pi + \pi/6$, nel III quadrante.
Riduzione (differenza di π):

$$\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Esempio 97.3 — Angolo del IV quadrante

Calcolare $\cos(11\pi/6)$.
Quadrante: $11\pi/6 = 2\pi - \pi/6 = -\pi/6 + 2\pi$. Nel IV quadrante.
Riduzione (opposto):

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esempio 97.4 — Angolo negativo grande

Calcolare $\operatorname{sen}(-19\pi/4)$.
Periodicità: $-19\pi/4 + 6\pi = -19\pi/4 + 24\pi/4 = 5\pi/4$. (Abbiamo sommato $3 \cdot 2\pi = 6\pi$.)
Quadrante: $5\pi/4 = \pi + \pi/4$, nel III quadrante.
Riduzione:

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{19\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esempio 97.5 — Espressione con il complementare

Semplificare $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$.
Algebra:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha.$$

Dunque l'espressione vale $\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$.

Esempio 97.6 — Catena di riduzioni

Semplificare $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) \cdot \cos(-\alpha) - \cos(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{sen}(-\alpha)$.
Riduzioni una a una:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha, \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha.$$

Sostituendo:

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha - (-\cos\alpha)(-\operatorname{sen}\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 0.$$

Esempio 97.7 — Tabella estesa di valori notevoli

Determinare i valori di sen e cos per tutti gli angoli "notevoli" di $[0, 2\pi)$ multipli di $\pi/6$ o $\pi/4$.
Tecnica: ridurre ciascun angolo a uno del I quadrante usando le formule degli archi associati. Si ottiene la tabella estesa:

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

α	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\operatorname{sen}\alpha$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\cos\alpha$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1

α	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$
$\operatorname{sen}\alpha$	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$
$\cos\alpha$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$

97.8. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 97.1

1. Calcolare a mente, riducendo a un angolo notevole del I quadrante, le seguenti quantità:
   (a) $\operatorname{sen}(3\pi/4)$;
   (b) $\cos(5\pi/4)$;
   (c) $\operatorname{tg}(4\pi/3)$;
   (d) $\operatorname{sen}(7\pi/4)$;
   (e) $\cos(11\pi/6)$;
   (f) $\operatorname{tg}(2\pi/3)$;
   (g) $\operatorname{sen}(-\pi/3)$;
   (h) $\cos(-5\pi/6)$.
2. Usando la periodicità e gli archi associati, ridurre all'intervallo $[0, \pi/2]$ e poi calcolare:
   (a) $\operatorname{sen}(25\pi/6)$;
   (b) $\cos(-13\pi/4)$;
   (c) $\operatorname{tg}(17\pi/3)$;
   (d) $\operatorname{sen}(-31\pi/6)$.
3. Semplificare, usando gli archi associati, le seguenti espressioni:
   (a) $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)$;
   (b) $\operatorname{sen}(-\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)$;
   (c) $\cos(\pi/2-\alpha)-\operatorname{sen}(\pi/2+\alpha)$;
   (d) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\operatorname{cotg}(\pi/2-\alpha)$;
   (e) $\operatorname{sen}(\pi/2+\alpha)\cdot\cos(-\alpha)-\operatorname{sen}(\pi-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)$.
4. Mostrare che, per ogni α,
$$\operatorname{sen}^2(\pi-\alpha)+\cos^2(\pi/2+\alpha)=1.$$

(Suggerimento: ridurre entrambe le funzioni a $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$.)

5. Mostrare che
$$\operatorname{sen}(\pi/2+\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

6. Verificare le identità (cioè dimostrarle):
   (a) $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$;
   (b) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}(-\alpha)}=1$ (specificando il dominio);
   (c) $\cos(\pi/2-\alpha)+\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha$.

7. Determinare l'angolo $\alpha\in[0,2\pi)$ tale che $\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(\pi/7)$ ma $\alpha\neq\pi/7$. (Suggerimento: usare la formula degli angoli supplementari.)

8. Determinare tutti gli angoli $\alpha\in[0,2\pi)$ tali che $\cos\alpha=\cos(2\pi/9)$. (Suggerimento: oltre allo stesso $2\pi/9$, c'è il suo opposto modulo 2π.)

9. Calcolare la somma $\operatorname{sen}(\pi/6)+\operatorname{sen}(2\pi/6)+\operatorname{sen}(3\pi/6)+\operatorname{sen}(4\pi/6)+\operatorname{sen}(5\pi/6)$. (Suggerimento: notare le coppie supplementari.)

10. *Sfida.* Mostrare che
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}(\pi+\alpha)$$
vale -1 *per ogni* α. (Suggerimento: ridurre e usare $\operatorname{sen}^2+\cos^2=1$.)

11. Mostrare che la somma $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}(\pi/2+\alpha)+\operatorname{sen}(\pi+\alpha)+\operatorname{sen}(3\pi/2+\alpha)$ è identicamente nulla per ogni α. Lo stesso vale per la corrispondente somma di coseni.

12. Disegnare sul cerchio goniometrico, per $\alpha=\pi/5$, i cinque punti P_α, $P_{\pi-\alpha}$, $P_{\pi+\alpha}$, $P_{-\alpha}$, $P_{\pi/2-\alpha}$. Verificare graficamente le simmetrie.

13. Si consideri la funzione $f(\alpha)=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}(\pi-\alpha)$. Mostrare che $f(\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha$, e dedurre che f assume valori in $[-2,2]$ (e non in $[-1,1]$ come ci si potrebbe aspettare per il solo seno).

14. Una calcolatrice scientifica fornisce $\operatorname{sen}(1.234)\approx 0.9436$ (in radianti). Senza usare la calcolatrice, dedurne i valori approssimati di $\operatorname{sen}(\pi-1.234)$, $\operatorname{sen}(\pi+1.234)$, $\cos(\pi/2-1.234)$, $\cos(\pi/2+1.234)$.

97.9. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- Gli *archi associati* a α sono cinque angoli ottenuti per simmetria sul cerchio goniometrico: $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $-\alpha$, $\pi/2-\alpha$, $\pi/2+\alpha$.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

- Ognuno corrisponde a una simmetria del piano cartesiano:
  - $\pi - \alpha$: riflessione rispetto all'asse y;
  - $\pi + \alpha$: simmetria centrale rispetto all'origine;
  - $-\alpha$: riflessione rispetto all'asse x;
  - $\pi/2 - \alpha$: riflessione rispetto alla bisettrice $y = x$;
  - $\pi/2 + \alpha$: rotazione antioraria di $\pi/2$.
- *Identità chiave* (memorizzare la tabella):

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi - \alpha) &= +\operatorname{sen}\alpha, \quad & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha;\\
\operatorname{sen}(\pi + \alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha, \quad & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos\alpha;\\
\operatorname{sen}(-\alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha, \quad & \cos(-\alpha) &= +\cos\alpha;\\
\operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) &= \cos\alpha, \quad & \cos(\pi/2 - \alpha) &= \operatorname{sen}\alpha;\\
\operatorname{sen}(\pi/2 + \alpha) &= \cos\alpha, \quad & \cos(\pi/2 + \alpha) &= -\operatorname{sen}\alpha.
\end{aligned}$$

- Da queste si deducono le relazioni per tg, cotg ecc. dividendo seno per coseno: la tangente è dispari ($\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$) e ha periodo π ($\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$).
- *Etimologia*: il prefisso "co-" (coseno, cotangente, cosecante) viene da *complementi*: $\cos\alpha = \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha)$, $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi/2 - \alpha)$, $\operatorname{cosec}\alpha = \sec(\pi/2 - \alpha)$.
- *Procedura operativa di calcolo*: (1) portare l'angolo in $[0, 2\pi)$ con la periodicità; (2) identificare il quadrante; (3) ricondurre a un angolo α' del I quadrante; (4) applicare la formula corrispondente; (5) calcolare $\operatorname{sen}\alpha'$, $\cos\alpha'$, $\operatorname{tg}\alpha'$ sul valore notevole.
- Nel prossimo capitolo (98) studiamo i *grafici* delle funzioni goniometriche e le loro trasformazioni (ampiezza, periodo, fase).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco