Capitolo 111

Poliedri: prismi, piramidi, parallelepipedi

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Un poliedro è una pietra preziosa sfaccettata: facce piane, spigoli netti, vertici acuti. Eulero scoprì che fra queste tre quantità — V, S, F — c’è una relazione cristallina, $V - S + F = 2$, valida per ogni poliedro convesso. È il primo invariante topologico della storia, e prelude alla teoria moderna delle superfici.”

— Leonhard Euler, lettera a Goldbach del 1750 — prima formulazione esplicita della relazione $V - S + F = 2$

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

111.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

In questo capitolo iniziamo lo studio sistematico dei *poliedri*, le figure solide delimitate da poligoni piani. Sono gli oggetti più semplici della geometria solida: scatole, dadi, prismi triangolari, piramidi, tetraedri. In natura li troviamo nei *cristalli* (la cui forma esterna riflette la struttura geometrica reticolare degli atomi), nelle costruzioni umane (case, edifici, casse di trasporto), nei materiali da imballaggio.

Studieremo le tre famiglie principali:

- i *prismi*: due basi parallele e congruenti, facce laterali parallelogrammi;
- le *piramidi*: una base e un vertice "in alto", facce laterali triangoli;
- i *parallelepipedi*: caso particolare di prisma con base parallelogramma.

Per ciascuna famiglia definiremo gli elementi (basi, facce, spigoli, vertici, altezza, apotema) e introdurremo le formule per area di superficie e volume (queste ultime in dettaglio nel cap. 113).

111.2. Definizione di poliedro

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 111.1 — Poliedro

Si chiama *poliedro* una figura solida delimitata da un numero finito di *poligoni piani*, detti *facce*, che si toccano lungo *spigoli* (lati comuni a due facce) e *vertici* (punti comuni a tre o più facce).

Convenzione. In questo capitolo ci limiteremo ai poliedri *convessi*: poliedri tali che, presi due punti qualunque del solido, il segmento che li unisce è ancora interamente contenuto nel solido. I poliedri convessi sono per esempio cubi, parallelepipedi, piramidi, tetraedri. Esempi di poliedri non convessi: la "stella" a punte, alcuni cristalli.

Elementi di un poliedro

Elementi: per un poliedro, denotiamo

- V = numero di *vertici*;
- S = numero di *spigoli*;
- F = numero di *facce*.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Formula di Eulero per i poliedri convessi

Formula di Eulero: per ogni poliedro convesso vale

$$V - S + F = 2.$$

Verifica su esempi:

- *Cubo*: $V = 8, S = 12, F = 6 \Rightarrow 8 - 12 + 6 = 2$. ✓
- *Tetraedro regolare*: $V = 4, S = 6, F = 4 \Rightarrow 4 - 6 + 4 = 2$. ✓
- *Piramide a base quadrata*: $V = 5, S = 8, F = 5 \Rightarrow 5 - 8 + 5 = 2$. ✓
- *Prisma triangolare*: $V = 6, S = 9, F = 5 \Rightarrow 6 - 9 + 5 = 2$. ✓

Significato. La formula di Eulero è un'*identità topologica*: dipende solo dalla "forma generale" del poliedro (essere convesso, o più in generale topologicamente equivalente a una sfera), non dalla specifica geometria (lunghezze, angoli). Per superfici diverse dalla sfera (es. il toro = "ciambella"), $V - S + F$ assume valori diversi (per il toro: 0). È il primo esempio storico di *invariante topologico*.

Superficie e volume

Definizione 111.2 — Area totale e volume di un poliedro

- *Area totale* (o *superficie*): somma delle aree delle singole facce.
- *Area laterale*: area delle facce laterali (esclude le basi, per prismi e piramidi).
- *Volume*: misura tridimensionale dello spazio racchiuso dal poliedro.

Le formule specifiche dipendono dal tipo di poliedro; vedremo cilindri e coni in cap. 112 e una sintesi delle formule in cap. 113.

111.3. Prismi

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 111.3 — Prisma

Si chiama *prisma* il poliedro delimitato da:

- due poligoni congruenti e paralleli, le *basi*;
- un numero di parallelogrammi (le *facce laterali*) ottenuti unendo i lati corrispondenti delle due basi.

La distanza fra le due basi (misurata perpendicolarmente) è l'*altezza* del prisma.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

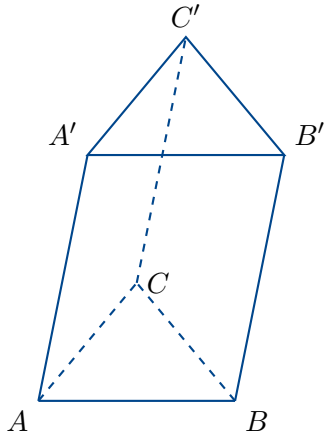


Figura 111.1: Prisma triangolare obliquo: due basi triangolari congruenti ABC e $A'B'C'$ collegate da tre facce laterali parallelogramme. In un prisma *retto* gli spigoli laterali AA', BB', CC' sono perpendicolari alle basi.

Tipologie di prismi

Classificazione dei prismi:

- *prisma retto*: gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi (le facce laterali sono *rettangoli*);
- *prisma obliquo*: gli spigoli laterali sono *inclinati* rispetto alle basi (le facce laterali sono parallelogrammi non rettangoli);
- *prisma regolare*: prisma retto in cui le basi sono poligoni *regolari*.

In base al numero di lati della base: prisma triangolare (3 lati), quadrangolare (4), pentagonale (5), esagonale (6), n-gonale.

Elementi numerici di un prisma a base n-gonale

Per un prisma a base n-gonale:

- $V = 2n$ vertici (n per ogni base);
- $S = 3n$ spigoli (n per base, $\times 2$ basi, $+n$ spigoli laterali);
- $F = n + 2$ facce (n facce laterali $+2$ basi).

Verifica di Eulero: $V - S + F = 2n - 3n + (n + 2) = 2$. ✓

Area laterale di un prisma retto

In un prisma retto, le facce laterali sono rettangoli con base = lato della base, altezza = altezza h del prisma. L'area laterale totale è:

Area laterale di un prisma retto:

$$A_\ell = 2p \cdot h,$$

dove $2p$ è il perimetro della base e h l'altezza del prisma.

Area totale: $A_{\text{tot}} = A_\ell + 2A_{\text{base}}$.

111.4. Parallelepipedi e cubo

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 111.4 — Parallelepipedo

Si chiama *parallelepipedo* il prisma a base parallelogramma. Ha 6 facce, tutte parallelogrammi, a due a due parallele e congruenti.

Tipologie di parallelepipedo:

- *parallelepipedo retto*: prisma retto a base parallelogramma (basi parallelogrammi, facce laterali rettangoli);
- *parallelepipedo rettangolo* (o *parallelepipedo retto a base rettangolare*): tutte le 6 facce sono rettangoli; ha tre coppie di dimensioni a, b, c;
- *cubo*: parallelepipedo rettangolo con $a = b = c$: tutte le 6 facce sono quadrati congruenti.

Diagonali del parallelepipedo rettangolo

In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c:

Diagonale della base (rettangolo): $d_{\text{base}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Diagonale del parallelepipedo (segmento che congiunge vertici opposti):

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Dimostrazione. Due applicazioni di Pitagora: prima si calcola la diagonale della base d_{base} nel triangolo rettangolo con cateti a e b; poi nel triangolo rettangolo formato da d_{base}, dall'altezza c e dalla diagonale del parallelepipedo, si ottiene $d^2 = d_{\text{base}}^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Cubo

Il cubo è il parallelepipedo regolare per eccellenza:

Cubo di spigolo ℓ:

- $V = 8, S = 12, F = 6$;

- area di una faccia: ℓ^2;
- area totale: $6\ell^2$;
- diagonale di faccia: $\ell\sqrt{2}$;
- diagonale del cubo: $\ell\sqrt{3}$;
- volume: ℓ^3.

111.5. Piramidi

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 111.5 — Piramide

Si chiama *piramide* il poliedro delimitato da:

- un poligono detto *base*;
- un vertice V, detto *apice*, non appartenente al piano della base;
- i triangoli che congiungono V a ciascun lato della base, detti *facce laterali*.

La *altezza* h della piramide è la distanza dal vertice V al piano della base.

Tipologie di piramidi

Classificazione:

- *piramide retta*: la proiezione ortogonale dell'apice cade nel *centro* della base (se la base ha un centro, cioè per poligoni regolari);
- *piramide obliqua*: la proiezione cade fuori dal centro;
- *piramide regolare*: piramide retta con base poligono regolare. Le facce laterali sono triangoli isosceli *congruenti*.

Elementi numerici di una piramide a base n-gonale

- $V = n + 1$ (n vertici della base + l'apice);
- $S = 2n$ (n spigoli della base + n spigoli laterali);
- $F = n + 1$ (n facce laterali + 1 base).

Verifica di Eulero: $V - S + F = (n + 1) - 2n + (n + 1) = 2$. ✓

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Apotema

Definizione 111.6 — Apotema della piramide regolare

In una piramide regolare, l'*apotema* (o *apotema laterale*) è la distanza dall'apice a uno spigolo della base, misurata lungo una faccia laterale. Equivale all'altezza di una faccia laterale (triangolo isoscele) relativa alla base.

Relazione fra altezza piramide h, apotema della base a_b (= distanza dal centro della base a un lato), e apotema della piramide a_p:

$$a_p^2 = h^2 + a_b^2.$$

(Pitagora nel triangolo rettangolo con cateti h e a_b e ipotenusa a_p.)

Area laterale di una piramide regolare

In una piramide regolare, le n facce laterali sono triangoli isosceli congruenti, ciascuno di base = lato della base e altezza = apotema a_p. L'area di una faccia è $(\ell \cdot a_p)/2$; sommando:

Area laterale di una piramide regolare:

$$A_\ell = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot a_p,$$

dove $2p$ è il perimetro della base e a_p l'apotema della piramide.

Area totale: $A_{\text{tot}} = A_\ell + A_{\text{base}}$.

111.6. Tronchi di piramide

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 111.7 — Tronco di piramide

Si chiama *tronco di piramide* la parte di una piramide compresa fra la base e una sezione *piana parallela* alla base (effettuata fra la base e l'apice). Ha:

- due *basi*: il poligono originale (base maggiore) e il poligono ottenuto dalla sezione (base minore), *simili* e *parallele*;
- facce laterali *trapezi* (uno per ciascun lato delle basi).

Apotema del tronco di piramide regolare

Per un tronco di piramide *regolare* (cioè ottenuto da una piramide regolare), le facce laterali sono trapezi isosceli. L'altezza di un trapezio laterale si chiama *apotema del tronco*.

Apotema del tronco regolare: indicando con a_b, a'_b gli apotemi delle due basi (distanza dal centro al lato) e con h l'altezza del tronco:

$$a_p = \sqrt{h^2 + (a_b - a'_b)^2}.$$

Area laterale del tronco di piramide regolare

Area laterale:

$$A_\ell = \frac{1}{2}(2p + 2p') \cdot a_p,$$

dove $2p$ e $2p'$ sono i perimetri delle due basi.

111.7. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 111.1 — Verifica di Eulero su un ottaedro

L'ottaedro regolare ha 8 facce triangolari equilatere. Calcolare V e S e verificare la formula di Eulero.
Vertici. L'ottaedro è duale del cubo: ha tanti vertici quanti il cubo ha facce, cioè $V = 6$.
Spigoli. Ogni faccia ha 3 lati, ogni spigolo è condiviso da 2 facce: $S = 8 \cdot 3/2 = 12$.
Eulero: $V - S + F = 6 - 12 + 8 = 2$. ✓

Esempio 111.2 — Diagonale del parallelepipedo

Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni 3 m, 4 m, 12 m. Calcolare la diagonale.
Pitagora doppia: $d = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$ m.
Curiosità. Questa è una *terna pitagorica spaziale*: $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$. Le terne $(3, 4, 12, 13)$ e $(1, 4, 8, 9)$ sono fra le più semplici.

Esempio 111.3 — Apotema e area laterale di una piramide regolare

Una piramide regolare a base quadrata ha lato di base 6 m e altezza 4 m. Calcolare apotema e area laterale.
Apotema della base. Per un quadrato di lato ℓ, l'apotema (distanza dal centro al lato) vale $a_b = \ell/2 = 3$ m.
Apotema della piramide: $a_p = \sqrt{h^2 + a_b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ m.
Area laterale: $A_\ell = (1/2) \cdot 2p \cdot a_p = (1/2) \cdot 24 \cdot 5 = 60\,\text{m}^2$.
Area totale: $A_{\text{tot}} = A_\ell + \ell^2 = 60 + 36 = 96\,\text{m}^2$.

Esempio 111.4 — Piramide a base esagonale

Una piramide regolare ha base esagonale di lato 4 cm e apotema della piramide 10 cm. Calcolare altezza e area totale.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Apotema della base esagonale. Per un esagono regolare di lato ℓ, l'apotema vale $a_b = \ell\sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3} \approx 3.46\,\text{cm}$.
Altezza: $h = \sqrt{a_p^2 - a_b^2} = \sqrt{100 - 12} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22} \approx 9.38\,\text{cm}$.
Area laterale: $A_\ell = (1/2) \cdot (6 \cdot 4) \cdot 10 = 120\,\text{cm}^2$.
Area della base esagonale: $A_b = (3\sqrt{3}/2)\ell^2 = (3\sqrt{3}/2) \cdot 16 = 24\sqrt{3} \approx 41.57\,\text{cm}^2$.
Area totale: $A_{\text{tot}} = 120 + 24\sqrt{3} \approx 161.6\,\text{cm}^2$.

Esempio 111.5 — Spigolo del cubo dato il volume

Un cubo ha volume $125\,\text{cm}^3$. Calcolare spigolo, area totale e diagonale.
Spigolo: $\ell = \sqrt[3]{125} = 5\,\text{cm}$.
Area totale: $A_{\text{tot}} = 6\ell^2 = 150\,\text{cm}^2$.
Diagonale: $d = \ell\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \approx 8.66\,\text{cm}$.

Esempio 111.6 — Tronco di piramide quadrangolare

Un tronco di piramide regolare ha basi quadrate di lati $8\,\text{cm}$ e $4\,\text{cm}$, e altezza $3\,\text{cm}$. Calcolare apotema del tronco e area laterale.
Apotemi delle basi: $a_b = 4$, $a_b' = 2$ (metà dei lati).
Apotema del tronco: $a_p = \sqrt{h^2 + (a_b - a_b')^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3.61\,\text{cm}$.
Area laterale: $A_\ell = (1/2)(2p + 2p') \cdot a_p = (1/2)(32 + 16)\sqrt{13} = 24\sqrt{13} \approx 86.5\,\text{cm}^2$.

111.8. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 111.1

1. Per ciascun poliedro, calcolare V, S, F e verificare Eulero $V - S + F = 2$:
   (a) prisma esagonale;
   (b) piramide a base pentagonale;
   (c) tronco di piramide quadrangolare (suggerimento: $V = 8, F = 6, S = 12$);
   (d) dodecaedro regolare (12 facce pentagonali; calcolare V, S);
   (e) icosaedro regolare (20 facce triangolari).
2. Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni $6\,\text{m} \times 8\,\text{m} \times 10\,\text{m}$. Calcolare:
   (a) diagonale di ciascuna faccia;
   (b) diagonale del parallelepipedo;
   (c) area totale;
   (d) somma di tutti gli spigoli.
3. Un cubo ha area totale $96\,\text{cm}^2$. Calcolare spigolo, volume, diagonale.
4. Una piramide regolare a base triangolare equilatera ha lato di base $6\,\text{cm}$ e altezza $4\,\text{cm}$. Calcolare:

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

   (a) apotema della base ($= \ell\sqrt{3}/6$ per il triangolo equilatero — attenzione: è metà altezza);
   (b) apotema della piramide;
   (c) area laterale;
   (d) area totale.

5. Una piramide regolare a base quadrata ha apotema della piramide 13 cm e altezza 5 cm. Calcolare il lato di base e l'area totale.
6. Un prisma retto a base esagonale regolare ha lato di base 5 cm e altezza 12 cm. Calcolare area laterale e area totale.
7. Un prisma retto ha base un triangolo rettangolo con cateti 3 cm e 4 cm e altezza 10 cm. Calcolare area laterale, totale, e la diagonale dello spigolo laterale "massimo".
8. Un cubo è inscritto in una sfera di raggio R. Calcolare lo spigolo del cubo. (Suggerimento: la diagonale del cubo è il diametro della sfera.)
9. Un cubo è circoscritto a una sfera di raggio r. Calcolare lo spigolo del cubo. (Suggerimento: il diametro della sfera è il lato del cubo — la sfera tocca le facce dall'interno.)
10. In una piramide regolare a base quadrata di lato 10 cm e altezza 12 cm, calcolare lo *spigolo laterale* (segmento dall'apice a un vertice di base). (Suggerimento: piano contenente apice, centro base, vertice di base.)
11. Mostrare che, in una piramide regolare, gli spigoli laterali sono tutti congruenti.
12. Un tronco di piramide regolare a base quadrata ha basi di lato 12 cm e 6 cm. La sua altezza è 4 cm. Calcolare:
    (a) apotema del tronco;
    (b) area laterale;
    (c) spigolo laterale.
13. *Sfida (formula di Eulero generale).* Considerare un poliedro non convesso ottenuto "incavando" una faccia (per esempio un parallelepipedo a cui togliamo un cubetto da un vertice). Verificare la formula di Eulero generalizzata sul caso specifico. In generale, per una superficie con g "manici" (genere g), $V - S + F = 2 - 2g$.
14. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b, c, mostrare che le diagonali *principali* (che congiungono vertici opposti) sono tutte e quattro congruenti e di lunghezza $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
15. In un prisma regolare a base quadrata di lato ℓ e altezza h, calcolare:
    (a) la diagonale di una faccia laterale;
    (b) la diagonale dello stesso prisma (segmento da un vertice di base a un vertice opposto dell'altra base);

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

(c) l'angolo che la diagonale forma con la base.

16. Un casco da motociclista ha forma approssimata di mezza sfera (anticipo cap. 112) appoggiata su un cubo. Se la sfera ha raggio 10 cm e il cubo ha spigolo 8 cm, calcolare l'altezza totale del casco.

111.9. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- *Poliedro*: figura solida delimitata da un numero finito di poligoni piani (facce), con spigoli (lati comuni a due facce) e vertici (punti comuni a più facce). Ci limitiamo ai poliedri convessi.
- *Formula di Eulero per poliedri convessi*: $V - S + F = 2$. È un invariante topologico (vale per ogni poliedro topologicamente equivalente a una sfera).
- *Prisma*: due basi congruenti e parallele, n facce laterali parallelogramme. Retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi (facce laterali rettangoli). Regolare se retto a base regolare.
- Per un prisma a base n-gonale: $V = 2n$, $S = 3n$, $F = n + 2$.
- Area laterale prisma retto: $A_\ell = 2p \cdot h$ (perimetro base $\times$ altezza).
- *Parallelepipedo*: prisma a base parallelogramma. *Rettangolo*: facce tutte rettangoli (dimensioni a, b, c). *Cubo*: $a = b = c$.
- Diagonale del parallelepipedo rettangolo: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Cubo di spigolo ℓ: diagonale $\ell\sqrt{3}$, area totale $6\ell^2$, volume ℓ^3.
- *Piramide*: base (poligono) + apice (vertice). *Retta*: apice sopra il centro della base. *Regolare*: retta a base regolare; facce laterali triangoli isosceli congruenti.
- Per una piramide a base n-gonale: $V = n + 1$, $S = 2n$, $F = n + 1$.
- *Apotema della piramide* a_p: altezza di una faccia laterale. Relazione: $a_p^2 = h^2 + a_b^2$ (apotema della base).
- Area laterale piramide regolare: $A_\ell = (1/2)(2p)a_p$.
- *Tronco di piramide*: parte fra base e una sezione parallela. Basi simili e parallele; facce laterali trapezi.
- Apotema del tronco: $a_p = \sqrt{h^2 + (a_b - a_b')^2}$. Area laterale: $A_\ell = (1/2)(2p + 2p')a_p$.
- Nel prossimo capitolo (112) studiamo i *solidi di rotazione*: cilindro, cono, sfera.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco