Capitolo 117

Equazione del piano nello spazio

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Un piano nello spazio è interamente determinato dal suo vettore normale e da un punto. L’equazione cartesiana che ne deriva, $ax + by + cz = d$, è la naturale generalizzazione della retta nel piano, $ax + by = c$: si aggiunge una variabile, ma la forma è la stessa. Algebra e geometria si incontrano in una formula di una eleganza disarmante.”

— Adattato da Joseph-Louis Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques* (1797) — formalizzazione moderna della rappresentazione cartesiana dei piani

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

117.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

In questo capitolo applichiamo gli strumenti vettoriali del capitolo precedente (116) al problema fondamentale della geometria analitica nello spazio: *come si scrive l'equazione di un piano*?

Il principio guida è il *vettore normale*: un piano è caratterizzato dalla direzione perpendicolare a esso. Conoscendo questa direzione (un vettore $\vec{n}$) e un punto del piano, l'equazione si scrive immediatamente. Tutte le proprietà del piano — parallelismo, perpendicolarità, distanza da un punto — si esprimono in termini di operazioni vettoriali sul vettore normale.

L'equazione cartesiana del piano è $ax + by + cz = d$, dove (a, b, c) sono le componenti del vettore normale. È la naturale generalizzazione della retta nel piano $ax + by = c$ (cap. 70): si aggiunge una coordinata, ma la struttura algebrica è la stessa.

117.2. Equazione cartesiana del piano

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 117.1 — Equazione cartesiana del piano

Un piano π nello spazio ha equazione cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0,$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ (cioè i tre coefficienti non sono tutti nulli).

Cosa rappresentano i coefficienti. Il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ è il *vettore normale* al piano (vedremo nella prossima sezione perché). Il termine noto d è legato alla distanza del piano dall'origine.

Equazione di un piano passante per un punto, dato il vettore normale

Piano per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con vettore normale $\vec{n} = (a, b, c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Sviluppando: $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$, cioè $ax + by + cz + d = 0$ con $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Derivazione. Sia $P = (x, y, z)$ un punto generico del piano. Allora $\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ giace nel piano e dunque è perpendicolare al vettore normale $\vec{n}$. La condizione di perpendicolarità è $\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Equazione di un piano per tre punti non allineati

Dati tre punti A, B, C non allineati nello spazio, l'equazione del piano è data dal determinante:

Piano per tre punti A, B, C:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{pmatrix} = 0.$$

Interpretazione. L'equazione esprime che il prodotto misto $[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}] = 0$, cioè i tre vettori sono complanari — esattamente quanto richiediamo se P deve appartenere al piano per A, B, C.

Equazione segmentaria del piano

Se un piano non passa per l'origine, lo si può scrivere in *forma segmentaria*:

Forma segmentaria:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

dove p, q, r sono le coordinate dei punti di intersezione del piano con i tre assi (intercette).

Piani particolari

Piani coordinati e paralleli:

- $z = 0$: piano xy;
- $y = 0$: piano xz;
- $x = 0$: piano yz;
- $z = k$: piano parallelo al piano xy a quota k;
- π passante per l'origine: $d = 0$, cioè $ax + by + cz = 0$.

117.3. Vettore normale al piano

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 117.2 — Vettore normale al piano

Dato un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, il vettore $\vec{n} = (a, b, c)$ si chiama *vettore normale* al piano: è perpendicolare a ogni vettore giacente nel piano.

Proprietà. Il vettore normale è definito a meno di un fattore moltiplicativo: $\vec{n} = (a, b, c)$ e $\lambda\vec{n} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ individuano lo stesso piano (le equazioni $ax + by + cz + d = 0$ e $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz + \lambda d = 0$ sono equivalenti).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Calcolo del vettore normale da tre punti

Dati tre punti A, B, C del piano, il vettore normale si calcola tramite il *prodotto vettoriale*:

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}.$$

È perpendicolare sia a $\vec{AB}$ sia a $\vec{AC}$, dunque a tutto il piano determinato dai tre punti.

Procedura — Equazione del piano per tre punti, via vettore normale

Dati A, B, C non allineati:

1. Calcolare $\vec{AB} = B - A$ e $\vec{AC} = C - A$.
2. Calcolare $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (a, b, c)$.
3. Scrivere l'equazione: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

117.4. Posizione fra due piani

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Dati due piani $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, con vettori normali $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$:

Posizioni reciproche:

- *paralleli (coincidenti o distinti)*: $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, cioè i coefficienti (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono proporzionali. Se anche d è in proporzione: coincidenti; altrimenti: distinti paralleli.
- *perpendicolari*: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, cioè $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.
- *incidenti* (non paralleli): formano una retta come intersezione, e si incontrano con un angolo diedro.

Angolo fra due piani

Angolo fra due piani incidenti (l'angolo diedro acuto):

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

(Il valore assoluto al numeratore garantisce $\theta \in [0, \pi/2]$.)

117.5. Distanza punto-piano

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Distanza di un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ dal piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$:

$$d(P_1, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dimostrazione. Sia P_0 il piede della perpendicolare da P_1 al piano. Il vettore $\vec{P_0P_1}$ è parallelo al vettore normale $\vec{n} = (a, b, c)$. La sua proiezione scalare lungo $\vec{n}$ è $d(P_0, P_1)$ (con segno).

Per un punto P_* qualunque del piano (con $ax_* + by_* + cz_* + d = 0$), la proiezione di $\vec{P_*P_1}$ su $\vec{n}$ vale:

$$\text{proj}_{\vec{n}}\vec{P_*P_1} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{P_*P_1}}{|\vec{n}|} = \frac{a(x_1 - x_*) + b(y_1 - y_*) + c(z_1 - z_*)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Espandendo e usando $ax_* + by_* + cz_* = -d$:

$$= \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Prendendo il valore assoluto si ottiene la distanza.

Forma normalizzata dell'equazione del piano

Equazione normalizzata: dividendo per $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0,$$

si ottiene il primo membro che, valutato in un punto P_1, dà direttamente $\pm d(P_1, \pi)$ (positivo nel "semispazio" indicato da $\vec{n}$, negativo nell'altro).

117.6. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 117.1 — Piano per un punto, dato il normale

Scrivere l'equazione del piano passante per $P_0 = (1, 2, -1)$ con vettore normale $\vec{n} = (3, -1, 2)$.
Algebra: $3(x - 1) - (y - 2) + 2(z + 1) = 0 \iff 3x - y + 2z + (-3 + 2 + 2) = 0 \iff 3x - y + 2z + 1 = 0$.

Esempio 117.2 — Piano per tre punti

Scrivere l'equazione del piano passante per $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (0, 0, 3)$.
Strategia 1 (forma segmentaria). Le intercette sono $p = 1, q = 2, r = 3$:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \iff 6x + 3y + 2z = 6.$$

Strategia 2 (vettore normale). $\vec{AB} = (-1, 2, 0)$, $\vec{AC} = (-1, 0, 3)$.

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (6, 3, 2).$$

Equazione: $6(x-1) + 3y + 2z = 0 \iff 6x + 3y + 2z = 6$. ✓

Esempio 117.3 — Piani paralleli

Stabilire se i piani $\pi_1 : 2x - y + 3z + 5 = 0$ e $\pi_2 : -4x + 2y - 6z + 1 = 0$ sono paralleli.
Vettori normali: $\vec{n}_1 = (2, -1, 3)$, $\vec{n}_2 = (-4, 2, -6)$.
Verifica: $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$, dunque sono proporzionali.
Conclusione: i piani sono paralleli. Sono coincidenti? No: per esserlo dovrebbe valere anche $d_2 = -2d_1$, ma $1 \neq -2 \cdot 5 = -10$. Dunque sono *paralleli distinti*.

Esempio 117.4 — Piani perpendicolari

Stabilire se i piani $\pi_1 : x + 2y + 3z = 0$ e $\pi_2 : 2x + y - \frac{4}{3}z + 1 = 0$ sono perpendicolari.
Prodotto scalare dei normali: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4/3) = 2 + 2 - 4 = 0$.
Conclusione: sì, $\pi_1 \perp \pi_2$.

Esempio 117.5 — Angolo fra due piani

Calcolare l'angolo fra i piani $\pi_1 : x + y + z = 0$ e $\pi_2 : x - y = 0$.
Normali: $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$.
Prodotto scalare: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 - 1 + 0 = 0$.
Angolo: $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$. I piani sono perpendicolari.

Esempio 117.6 — Distanza punto-piano

Calcolare la distanza del punto $P_1 = (1, -1, 2)$ dal piano $\pi : 2x + 2y + z - 3 = 0$.
Algebra:

$$d = \frac{|2(1) + 2(-1) + 1(2) - 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|2 - 2 + 2 - 3|}{3} = \frac{1}{3}.$$

Esempio 117.7 — Distanza fra piani paralleli

Calcolare la distanza fra i piani paralleli $\pi_1 : x + 2y - 2z + 1 = 0$ e $\pi_2 : x + 2y - 2z + 4 = 0$.
Strategia. Prendere un punto qualunque di π_1 e calcolarne la distanza da π_2.
Punto su π_1: ponendo $y = z = 0$ in $x + 1 = 0$, $P_1 = (-1, 0, 0)$.
Distanza da π_2:

$$d = \frac{|(-1) + 0 - 0 + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{3}{3} = 1.$$

117.7. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 117.1

1. Scrivere l'equazione del piano passante per il punto P_0 con vettore normale $\vec{n}$:
   (a) $P_0 = (1,0,0)$, $\vec{n} = (1,1,1)$;
   (b) $P_0 = (2,-3,1)$, $\vec{n} = (4,0,-2)$;
   (c) $P_0 = (0,0,0)$, $\vec{n} = (2,-1,3)$;
   (d) $P_0 = (1,2,3)$, $\vec{n} = (0,1,0)$ (piano parallelo al piano xz).
2. Scrivere l'equazione del piano passante per tre punti:
   (a) $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$;
   (b) $A = (1,1,1)$, $B = (2,0,0)$, $C = (0,2,0)$;
   (c) $A = (-1,2,3)$, $B = (2,1,-1)$, $C = (3,0,4)$.
3. Determinare il vettore normale e il punto di intersezione con l'asse z dei seguenti piani:
   (a) $2x + 3y - z = 6$;
   (b) $x - y + 2z + 4 = 0$;
   (c) $z = 5$.
4. Stabilire la posizione reciproca dei seguenti piani (paralleli, perpendicolari, incidenti generici):
   (a) $\pi_1 : x + y + z = 1$, $\pi_2 : 2x + 2y + 2z = 5$;
   (b) $\pi_1 : x - y + z = 0$, $\pi_2 : x + y = 0$;
   (c) $\pi_1 : 3x + 4y - 5z + 7 = 0$, $\pi_2 : -6x - 8y + 10z + 1 = 0$;
   (d) $\pi_1 : x + 2y + 3z = 0$, $\pi_2 : 2x + 4y + 6z = 0$.
5. Calcolare l'angolo fra i piani:
   (a) $\pi_1 : x + y = 0$, $\pi_2 : x + z = 0$;
   (b) $\pi_1 : 2x - y + z = 1$, $\pi_2 : x + y + z = 2$;
   (c) $\pi_1 : x = 0$, $\pi_2 : x + y + z = 0$.
6. Calcolare la distanza dal punto P al piano π:
   (a) $P = (0,0,0)$, $\pi : 2x + y - 2z + 6 = 0$;
   (b) $P = (1,2,3)$, $\pi : x + y + z = 0$;
   (c) $P = (1,0,-1)$, $\pi : 3x - 4z + 5 = 0$;
   (d) $P = (2,-1,4)$, $\pi : x + 2y + 2z - 9 = 0$.
7. Calcolare la distanza fra i seguenti piani paralleli:
   (a) $\pi_1 : x + y + z = 0$, $\pi_2 : x + y + z = 3$;

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

(b) $\pi_1 : 2x + y - 2z + 1 = 0$, $\pi_2 : 2x + y - 2z + 10 = 0$.

8. Scrivere l'equazione del piano passante per $P = (1, 2, 3)$ e parallelo al piano $\pi : 2x - 3y + z + 5 = 0$.
9. Scrivere l'equazione del piano passante per $P = (1, -1, 2)$ e perpendicolare alla retta che congiunge $A = (1, 1, 1)$ e $B = (3, 2, 0)$.
10. Determinare per quale valore di k i piani $\pi_1 : x + ky + 2z = 1$ e $\pi_2 : 2x - y + (k-1)z = 0$ sono perpendicolari.
11. *Sfida.* Un piano contiene la retta di equazione (parametrica) $r : (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$ (cioè passa per $(1, 0, 0)$ con direzione $(0, 1, 1)$) ed è anche perpendicolare al piano $\pi : x + 2y + z = 0$. Scriverne l'equazione.
12. Determinare l'equazione del piano che taglia gli assi cartesiani nei punti di ascissa 2, ordinata 3, quota 4. (Suggerimento: forma segmentaria.)
13. Mostrare che la distanza dall'origine al piano $ax + by + cz + d = 0$ è $|d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
14. Determinare il *simmetrico* del punto $P = (1, 2, 3)$ rispetto al piano $\pi : x + y + z = 0$. (Suggerimento: il punto medio fra P e il suo simmetrico è la proiezione di P sul piano.)
15. Una stanza ha pareti che si intersecano negli spigoli (rette del soffitto e del pavimento) e nei vertici (angoli). Modellare un cubo di lato 3 m con vertice in origine e spigoli sugli assi: scrivere le equazioni di tutte e 6 le facce.
16. *Sfida (fascio di piani).* Mostrare che, dati due piani non paralleli $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, l'insieme di tutti i piani che contengono la loro retta di intersezione è la famiglia parametrizzata da $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$:

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0.$$

117.8. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- *Equazione cartesiana del piano*: $ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
- *Vettore normale*: $\vec{n} = (a, b, c)$, perpendicolare al piano. Definito a meno di un fattore moltiplicativo.
- *Piano per un punto con vettore normale dato*:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

- *Piano per tre punti non allineati*: usare $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$, poi scrivere l'equazione col

primo metodo. Equivalentemente: condizione $[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}] = 0$ (determinante $= 0$).

- *Forma segmentaria* (per piani non passanti per l'origine): $x/p + y/q + z/r = 1$ con $p, q, r =$ intercette sugli assi.
- *Posizione fra due piani*:
  - paralleli sse $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ (componenti proporzionali);
  - perpendicolari sse $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$;
  - incidenti generici: intersezione $=$ retta.
- *Angolo fra piani*: $\cos\theta = |\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|/(|\vec{n}_1||\vec{n}_2|)$.
- *Distanza punto-piano*:

$$d(P_1, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

  È l'analogo tridimensionale della distanza punto-retta nel piano (cap. 72).
- *Distanza fra piani paralleli*: distanza dal piano di un punto qualunque dell'altro.
- *Fascio di piani* attraverso una retta data come intersezione di due piani: combinazione lineare delle loro equazioni.
- Nel prossimo capitolo (118) studiamo l'*equazione della retta* nello spazio: forma parametrica e cartesiana (= intersezione di due piani).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco