Capitolo 142

Differenziale di una funzione

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l'AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Chiamerò differenziale *di una grandezza variabile x una quantità infinitamente piccola, indicata con $\mathrm{d}x$. Allora il differenziale di una funzione $y = f(x)$ è $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Il calcolo dei differenziali è di gran lunga più potente del calcolo per quozienti, e si presta meglio alle applicazioni fisiche.”*

— Gottfried Wilhelm Leibniz, *Nova methodus pro maximis et minimis*, Acta Eruditorum (1684), traduzione adattata

142.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

Nel capitolo 133 abbiamo introdotto la *derivata* $f'(x_0)$ come limite del rapporto incrementale $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. La notazione $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, dovuta a Leibniz, suggerisce di separare "numeratore" e "denominatore" interpretandoli come oggetti propri: i *differenziali* $\mathrm{d}f$ e $\mathrm{d}x$. Da qui nasce un linguaggio — quello del *calcolo differenziale* — che si rivela enormemente potente in due direzioni:

- come strumento di *approssimazione lineare*: per h piccolo, $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h$. Questa è la migliore approssimazione lineare di f vicino a x_0; il grafico viene sostituito con quello della retta tangente.
- come strumento per la *propagazione degli errori*: se misuriamo una grandezza x con incertezza Δx e calcoliamo $y = f(x)$, allora l'incertezza su y è ben approssimata da $\Delta y \approx |f'(x)|\,\Delta x$. È la formula-base della fisica sperimentale.

Storicamente, il *differenziale* di Leibniz e il *rapporto incrementale* di Newton hanno percorsi paralleli e una rivalità feroce; ma la notazione di Leibniz si è imposta perché è più maneggevole nelle applicazioni. Oggi, nell'analisi moderna, $\mathrm{d}f$ è formalizzato in modo rigoroso (come "forma differenziale"); per i nostri scopi liceali, possiamo trattarlo come una pratica e suggestiva variazione lineare lungo la tangente.

142.2. Definizione di differenziale

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 142.1 — Differenziale di una funzione

Sia f derivabile in x_0, e sia $h \in \mathbb{R}$ (chiamato *incremento*). Si dice *differenziale di f in x_0 relativo all'incremento h* il numero

$$\mathrm{d}f(x_0; h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Adottando la convenzione $\mathrm{d}x = h$ (che equivale a dire "il differenziale della variabile indipendente x coincide con il suo incremento"), si scrive in forma compatta:

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Notazione e terminologia.

- Δx e $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$: *incremento finito* della variabile e della funzione (variazione reale).
- $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$: *differenziale* di variabile e di funzione (variazione idealizzata lineare).
- Per definizione, $\mathrm{d}x = \Delta x$ (essi coincidono, per la variabile indipendente).

- Per f generica, invece, $\mathrm{d}f \neq \Delta f$ in generale: i due differiscono di un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\mathrm{d}x$.

Esempio 142.1 — Differenziale di funzioni elementari

- $f(x) = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}f = 2x\,\mathrm{d}x$.
- $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \mathrm{d}f = \cos x\,\mathrm{d}x$.
- $f(x) = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}f = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
- $f(x) = e^x \Rightarrow \mathrm{d}f = e^x\,\mathrm{d}x$.

Esempio 142.2 — Differenziale composto

Se $y = f(g(x))$ è una composizione, allora per la chain rule (135):

$$\mathrm{d}y = f'(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f'(g(x))\,\mathrm{d}g.$$

La notazione di Leibniz rende particolarmente naturale la chain rule: $\mathrm{d}y = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}u)(\mathrm{d}u/\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$.

142.3. Significato geometrico

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Geometricamente, il differenziale $\mathrm{d}f$ rappresenta l'incremento subito dall'*ordinata della retta tangente* al grafico di f nel passare da x_0 a $x_0 + \mathrm{d}x$. La grandezza Δf, invece, è l'incremento dell'ordinata sul *grafico stesso*.

In simboli, il rapporto fra l'errore $\Delta f - \mathrm{d}f$ e l'incremento $\mathrm{d}x$ tende a zero quando $\mathrm{d}x \to 0$:

$$\lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right] = 0.$$

Questo è il senso preciso in cui "$\mathrm{d}f$ è la migliore approssimazione lineare di Δf".

142.4. Approssimazione lineare

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

L'idea operativa è semplice: per $h = \Delta x$ piccolo, ci aspettiamo

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h,$$

e la qualità dell'approssimazione migliora al diminuire di $|h|$.

Approssimazione lineare (sviluppo del primo ordine).

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h, \qquad \text{per } |h| \text{ piccolo.}$$

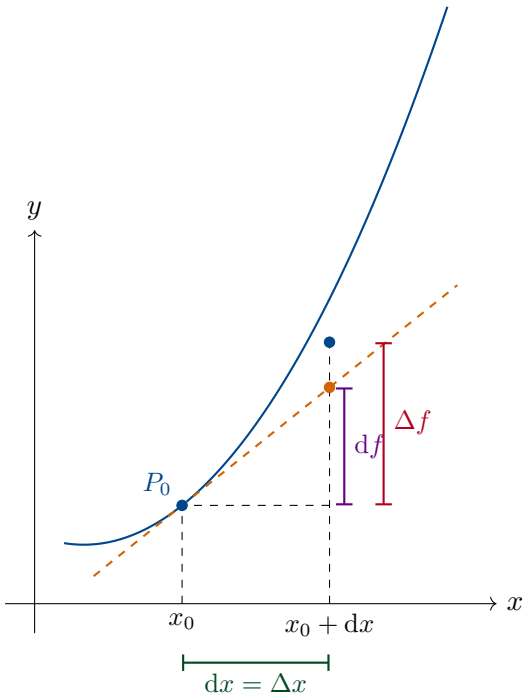


Figura 142.1: Significato geometrico del differenziale: $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$ è l'incremento sulla retta tangente, mentre $\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$ è l'incremento sul grafico. La differenza $\Delta f - \mathrm{d}f$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\mathrm{d}x$.

Equivalentemente, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è l'equazione della retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$: l'approssimazione lineare *sostituisce* il grafico con la tangente.

Procedura — Calcolare un'approssimazione lineare

1. Scegliere un punto x_0 "comodo" vicino al valore x di interesse, in cui $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ siano facili da calcolare.
2. Calcolare $f(x_0)$ e $f'(x_0)$.
3. Approssimare $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h$ con $h = x - x_0$.

Esempio 142.3 — Stima di $\sqrt{4.1}$

$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $h = 0.1$. $f(4) = 2$, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, $f'(4) = 1/4 = 0.25$. Quindi

$$\sqrt{4.1} \approx 2 + 0.25 \cdot 0.1 = 2.025.$$

Il valore vero è $\sqrt{4.1} = 2.0248\ldots$, dunque l'errore è ≈ 0.0002: ottima approssimazione con $h/x_0 = 2.5\%$.

Esempio 142.4 — Stima di $\operatorname{sen} 0.05$

$f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$, $h = 0.05$. $f(0) = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$. Quindi $\operatorname{sen} 0.05 \approx 0 + 1 \cdot 0.05 = 0.05$. Valore vero: $0.049\,98$. Per piccoli angoli (in radianti), $\operatorname{sen} x \approx x$: è la

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

versione lineare del limite notevole $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x/x = 1$, vista in 129.

Esempio 142.5 — Stima di $\ln 1.02$

$f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $h = 0.02$. $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$. $\ln 1.02 \approx 0 + 1 \cdot 0.02 = 0.02$. Valore vero: 0.0198. In generale $\ln(1+h) \approx h$ per h piccolo.

Esempio 142.6 — Approssimazioni utili al primo ordine

Conviene memorizzare alcune approssimazioni-tipo per h piccolo:

- $(1+h)^\alpha \approx 1 + \alpha h$ (binomio generalizzato al primo ordine);
- $e^h \approx 1 + h$;
- $\ln(1+h) \approx h$;
- $\operatorname{sen} h \approx h$, $\cos h \approx 1$, $\operatorname{tg} h \approx h$.

142.5. Differenziale e calcolo degli errori (link alla fisica)

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

In laboratorio di fisica, ogni grandezza misurata x è affetta da un'*incertezza* (errore sperimentale) Δx. Se calcoliamo poi una grandezza derivata $y = f(x)$, l'incertezza si propaga: l'incertezza su y sarà Δy, e il differenziale ci dà subito una buona stima:

Propagazione lineare dell'errore (caso a una variabile).

$$\Delta y \approx |f'(x)|\,\Delta x, \qquad \frac{\Delta y}{|y|} \approx \left|\frac{x\,f'(x)}{f(x)}\right| \frac{\Delta x}{|x|}.$$

La seconda formula è la *propagazione dell'errore relativo*: il fattore $|x f'(x)/f(x)|$ è la cosiddetta *elasticità* di f in x. Casi notevoli:

- $y = x^n \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{|y|} = n\dfrac{\Delta x}{|x|}$ (gli errori relativi si moltiplicano per il grado);
- $y = \sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{|y|} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x}{|x|}$ (la radice quadrata "dimezza" l'errore relativo);
- $y = 1/x \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{|y|} = \dfrac{\Delta x}{|x|}$ (errore relativo invariato in modulo).

Esempio 142.7 — Errore sull'area di un cerchio

Si misura il raggio di un cerchio $r = 5.0\,\text{cm}$ con incertezza $\Delta r = 0.1\,\text{cm}$. Quanto vale l'incertezza sull'area $A = \pi r^2$?
$A'(r) = 2\pi r$. $\Delta A \approx 2\pi r\,\Delta r = 2\pi \cdot 5.0 \cdot 0.1\,\text{cm}^2 = \pi\,\text{cm}^2 \approx 3.14\,\text{cm}^2$.
L'area vale $A = \pi \cdot 25\,\text{cm}^2 \approx 78.5\,\text{cm}^2$, quindi $A = 78.5(31)\,\text{cm}^2$. L'errore relativo: $\Delta A/A \approx 2\,\Delta r/r = 4\%$ (il doppio dell'errore relativo sul raggio, come prevede la regola

dell'esponente $n = 2$).

Esempio 142.8 — Errore sul periodo di un pendolo

Il periodo del pendolo è $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Si misura $L = 1.000\,\text{m}$ con incertezza $\Delta L = 2\,\text{mm}$. Stimare l'errore relativo su T (assumendo g noto esattamente).
Trattando $T(L) = 2\pi\sqrt{L/g}$, $T \propto \sqrt{L}$: per la regola della radice quadrata,

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1000} = 0.1\%.$$

Numericamente, con $L = 1.000\,\text{m}$ e $g = 9.81\,\text{m/s}^2$, $T \approx 2.006\,\text{s}$, $\Delta T \approx 0.002\,\text{s}$.

Limiti della formula. Quando l'incertezza relativa è grande (diciamo $> 10\%$) o f è molto non-lineare nella zona di interesse, la stima lineare $\Delta y \approx |f'|\Delta x$ può sottovalutare o sovrastimare; in tal caso conviene calcolare direttamente $f(x+\Delta x)$ e $f(x-\Delta x)$ e prendere la massima differenza.

Caso multivariata. Se $y = f(x_1, \dots, x_n)$, la formula generale è

$$\Delta y \approx \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i,$$

ma per il liceo ci si limita di solito al caso a una variabile. (Il caso multivariata si tratta sistematicamente all'università.)

142.6. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 142.9 — Stima della radice cubica $(8.06)^{1/3}$

$f(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 8$, $h = 0.06$. $f(8) = 2$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f'(8) = \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$. Quindi

$$\sqrt[3]{8.06} \approx 2 + \frac{0.06}{12} = 2 + 0.005 = 2.005.$$

Valore vero: $2.004\,99$. Errore $< 1 \times 10^{-5}$.

Esempio 142.10 — Stima di $\operatorname{tg} 46°$

$f(x) = \operatorname{tg} x$ (radianti). $x_0 = 45° = \pi/4$, $h = 1° = \pi/180$. $f(\pi/4) = 1$, $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $f'(\pi/4) = 2$. Quindi

$$\operatorname{tg} 46° \approx 1 + 2\cdot\frac{\pi}{180} \approx 1 + 0.0349 = 1.0349.$$

Valore vero: 1.0355. Buona approssimazione con errore $\approx 0.06\%$.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 142.11 — Errore sul volume di una sfera

Una sfera ha raggio $r = 10.0\,\text{cm}$ con incertezza $\Delta r = 0.5\,\text{cm}$. Stimare il volume e la sua incertezza.
$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. $V(10) \approx 4189\,\text{cm}^3$. $V'(r) = 4\pi r^2$, $V'(10) = 400\pi\,\text{cm}^2 \approx 1257\,\text{cm}^2$. $\Delta V \approx 1257 \cdot 0.5\,\text{cm}^3 \approx 628\,\text{cm}^3$.
Risultato: $V = 4200(600)\,\text{cm}^3$ (l'errore relativo è $15\% = 3 \cdot 5\%$, come prevede la regola $\Delta V/V = 3\,\Delta r/r$).

Esempio 142.12 — Differenziale di una funzione composta

Sia $y = \ln(1 + x^2)$. $\mathrm{d}y = \dfrac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Calcolare il differenziale in $x = 1$ per $\mathrm{d}x = 0.1$: $\mathrm{d}y = \dfrac{2}{2} \cdot 0.1 = 0.1$. Stimato così, $\ln(1 + 1.1^2) = \ln 2.21 \approx \ln 2 + 0.1 = 0.793$. Valore vero: 0.793. Coincidono nelle 3 cifre.

Esempio 142.13 — Confronto Δf vs $\mathrm{d}f$

$f(x) = x^2$ in $x_0 = 3$, $h = 0.2$. $\Delta f = f(3.2) - f(3) = 10.24 - 9 = 1.24$. $\mathrm{d}f = 2 \cdot 3 \cdot 0.2 = 1.2$. Differenza $\Delta f - \mathrm{d}f = 0.04 = h^2$, esattamente di ordine h^2 (infinitesimo di ordine superiore rispetto a $h = \mathrm{d}x$).

Esempio 142.14 — Errore relativo nella legge di Boyle

Nella legge dei gas ideali $PV = \text{cost}$, fissato il volume vale $P \propto T$, ma se invece teniamo T fissa, $P = k/V$. Misurato $V = 2.00\,\text{L}$ con incertezza $0.05\,\text{L}$ (errore relativo 2.5%), l'errore relativo su P è uguale a quello su V (in modulo), perché $P = k/V$ ha $|xf'/f| = 1$.

142.7. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 142.1

1. Calcolare il differenziale $\mathrm{d}f$ delle seguenti funzioni:
   (a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7$;
   (b) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$;
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;
   (d) $f(x) = e^{x^2}$;
   (e) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$.
2. Usando l'approssimazione lineare, stimare:
   (a) $\sqrt{16.2}$;
   (b) $\sqrt[3]{27.3}$;
   (c) $\operatorname{sen} 31°$;

(d) $e^{0.1}$;

(e) $\ln 0.99$.

3. Calcolare Δf e $\mathrm{d}f$ per $f(x) = x^3$ in $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.1$, e mostrare che la differenza è di ordine $(\Delta x)^2$.

4. Una lastra quadrata ha lato $\ell = 20.0\,\text{cm}$ con incertezza $0.2\,\text{cm}$. Calcolare area e incertezza sull'area, sia in cifra che in percentuale.

5. Una vasca cilindrica ha base di raggio $r = 30.0\,\text{cm}$ e altezza $h = 50.0\,\text{cm}$, entrambi con incertezza $0.5\,\text{cm}$. Stimare l'errore relativo sul volume $V = \pi r^2 h$ (formula multivariata: $\Delta V/V \approx 2\Delta r/r + \Delta h/h$).

6. Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo: $T = 1.50(3)\,\text{s}$. Sapendo che $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, stimare L e l'incertezza assoluta su L (assumere $g = 9.81\,\text{m/s}^2$ esatto).

7. Il diametro di una moneta è $d = 2.10\,\text{cm}$, lo spessore $s = 0.20\,\text{cm}$, entrambi con incertezza $0.05\,\text{mm}$. Calcolare volume e incertezza sul volume.

8. In una resistenza elettrica si misurano corrente $I = 0.50\,\text{A}$ ($\Delta I = 0.02\,\text{A}$) e tensione $U = 12.0\,\text{V}$ ($\Delta U = 0.5\,\text{V}$). Calcolare la resistenza $R = U/I$ e l'errore relativo (suggerimento: $\Delta R/R \approx \Delta U/U + \Delta I/I$).

9. Mostrare che, se $y = Ax^a y^b z^c$ è un *monomio generalizzato* di più variabili, allora l'errore relativo si propaga come $\dfrac{\Delta y}{y} = |a|\dfrac{\Delta x}{x} + |b|\dfrac{\Delta y}{y} + |c|\dfrac{\Delta z}{z}$ (formula molto usata in laboratorio).

10. Calcolare l'approssimazione lineare di $f(x) = \cos x$ in $x_0 = \pi/3$ e usarla per stimare $\cos 61^\circ$.

11. Calcolare $\operatorname{sen} 32^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ$ usando l'approssimazione lineare in $x_0 = 30^\circ = \pi/6$.

12. Stimare $\sqrt{1.04}\cdot\sqrt[3]{0.96}$ usando il fatto che $(1+h)^\alpha \approx 1 + \alpha h$ per h piccolo.

13. Un cubo di lato ℓ subisce una dilatazione termica $\Delta\ell/\ell = \alpha\Delta T$ con $\alpha = 1.2\times10^{-5}/\text{K}$ (acciaio). Se $\ell = 1.000\,\text{m}$ e $\Delta T = 50\,\text{K}$, stimare $\Delta V/V$ e ΔV in valore assoluto.

14. Sia f derivabile in x_0 con $f'(x_0) = 0$. Mostrare che il differenziale $\mathrm{d}f(x_0; h) = 0$ per ogni h, e che Δf è in tal caso un infinitesimo di ordine *superiore* a $\mathrm{d}x$. Commentare come questo si lega alla discussione dei massimi e minimi (139).

15. *Sfida.* La densità di un materiale è calcolata come $\rho = m/V$ dove m è la massa e V il volume. Si misura $m = 50.0\,\text{g}$ ($\Delta m = 0.1\,\text{g}$) e $V = 18.5\,\text{cm}^3$ ($\Delta V = 0.3\,\text{cm}^3$). Determinare ρ e $\Delta\rho$ con la formula della propagazione, e confrontare il risultato con la densità nota del piombo ($\rho_{\text{Pb}} = 11.34\,\text{g/cm}^3$). Il campione è di piombo?

142.8. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Riepilogo

- *Differenziale.* $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Per la variabile indipendente, $\mathrm{d}x = \Delta x$ per convenzione. Il differenziale è la migliore approssimazione lineare di Δf.
- *Significato geometrico.* $\mathrm{d}f$ è l'incremento sulla retta tangente; Δf è l'incremento sul grafico. La differenza $\Delta f - \mathrm{d}f$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\mathrm{d}x$.
- *Approssimazione lineare.* $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,h$ per h piccolo. Casi notevoli: $(1+h)^\alpha \approx 1 + \alpha h$, $e^h \approx 1 + h$, $\ln(1+h) \approx h$, $\operatorname{sen} h \approx h$, $\cos h \approx 1$.
- *Propagazione dell'errore* (una variabile). Se $y = f(x)$ e x ha incertezza Δx, allora $\Delta y \approx |f'(x)|\Delta x$ (assoluto), e $\dfrac{\Delta y}{|y|} \approx \left|\dfrac{x f'(x)}{f(x)}\right| \dfrac{\Delta x}{|x|}$ (relativo).
- *Regole pratiche per il relativo*: $y = x^n \Rightarrow \Delta y/y = n\,\Delta x/x$; $y = \sqrt{x} \Rightarrow \Delta y/y = \frac{1}{2}\Delta x/x$; $y = Ax^a z^b \Rightarrow \Delta y/y \approx |a|\Delta x/x + |b|\Delta z/z$.
- Nel capitolo 143 useremo lo studio di funzione (141) per risolvere *problemi di massimo e minimo* applicati a contesti geometrici, fisici ed economici. Più avanti, nel capitolo 148, il differenziale ricomparirà sotto altra veste: come "elemento infinitesimo" di un integrale definito ($\int f(x)\,\mathrm{d}x$, dove il $\mathrm{d}x$ è proprio il differenziale qui introdotto).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco