Capitolo 144

Primitiva di una funzione e integrale indefinito

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Sarà utile scrivere $\int$ *per “omnia”, cosicché* $\int \ell$ *sostituisca “omn.* ℓ*”. In tal modo apparirà un nuovo genere di calcolo, corrispondente al calcolo differenziale: come i differenziali* d *diminuiscono le dimensioni, così le somme* $\int$ *le accrescono.”*

— Gottfried Wilhelm Leibniz, manoscritto del 29 ottobre 1675 (introduzione del simbolo $\int$), traduzione adattata

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

144.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

Nei capitoli precedenti (133–143) abbiamo studiato il *calcolo differenziale*: data una funzione F, abbiamo imparato a calcolarne la derivata F'. Ci poniamo ora la domanda *inversa*:

Data una funzione f, esiste una F tale che $F' = f$? Se sì, come trovarla?

Una tale F si chiama *primitiva* (o *antiderivata*) di f. L'insieme di tutte le primitive di f si chiama *integrale indefinito* e si denota

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il simbolo $\int$ è una "S" allungata, e fu introdotto da Leibniz nel 1675 come abbreviazione del latino *summa*: il legame del calcolo integrale con le *somme* sarà chiaro nei capitoli successivi (148, 149), dove l'integrale apparirà come limite di somme infinite.

Il calcolo integrale, sviluppato a partire dalla seconda metà del Seicento da Newton (con il nome di "flussioni inverse") e Leibniz (con il nome di "calcolo delle somme"), ha applicazioni in tutta la matematica e la fisica: calcolo di aree, volumi, lunghezze d'arco, baricentri, valori medi, soluzioni di equazioni differenziali (153), e moltissimo altro. In questo primo capitolo presentiamo le definizioni di base e le proprietà fondamentali; nei capitoli successivi svilupperemo le tecniche di calcolo (145, 146, 147) e collegheremo l'integrale indefinito a quello *definito* (148) tramite il *teorema fondamentale del calcolo* (149).

144.2. Concetto di primitiva

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 144.1 — Primitiva di una funzione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. Una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva* (o *antiderivata*) di f su I se F è derivabile su I e

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Esempio 144.1 — Primitive elementari

- $F(x) = x^2$ è primitiva di $f(x) = 2x$, perché $(x^2)' = 2x$.
- $F(x) = \operatorname{sen} x$ è primitiva di $f(x) = \cos x$.
- $F(x) = e^x$ è primitiva di $f(x) = e^x$ (questa funzione è primitiva di se stessa!).
- $F(x) = \ln|x|$ è primitiva di $f(x) = 1/x$ sul dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (più precisamente su ciascuno degli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$).

Non tutte le funzioni *elementari* hanno primitive elementari: ad esempio, $f(x) = e^{-x^2}$ (gaussiana) non ammette primitiva esprimibile in termini di funzioni elementari (la sua

primitiva è la *funzione errore* erf, importantissima in statistica). Il fatto che f non ammetta primitiva *elementare non* significa che non ammetta primitiva: come vedremo nel teorema fondamentale del calcolo, ogni funzione continua ne ammette una.

Unicità a meno di costante

Teorema 144.1 — Caratterizzazione delle primitive su un intervallo

Sia f definita su un intervallo I, e sia F una primitiva di f su I. Allora:

1. ogni funzione della forma $G(x) = F(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ costante, è ancora una primitiva di f su I;
2. viceversa, ogni primitiva G di f su I ha la forma $G(x) = F(x) + c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$.

In altre parole, due primitive di una stessa funzione su un intervallo differiscono per una costante additiva.

Dimostrazione. Per il punto 1: $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$. Per il punto 2: se $G' = F' = f$ su I, allora $(G - F)' = 0$ su I. Per il corollario del teorema di Lagrange (137), una funzione con derivata nulla su un intervallo è costante: $G - F = c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$.

Attenzione!

L'ipotesi che I sia un *intervallo* è essenziale. Se il dominio è sconnesso, due primitive di f possono differire per costanti *diverse* sulle componenti connesse. Esempio: su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, le funzioni

$$F_1(x) = \ln|x|, \qquad F_2(x) = \begin{cases} \ln|x| + 5 & x > 0 \\ \ln|x| + 7 & x < 0 \end{cases}$$

sono entrambe primitive di $1/x$, ma non differiscono per una costante *globalmente*.

Esempio 144.2 — Famiglia delle primitive

La famiglia delle primitive di $f(x) = 3x^2$ è $\{x^3 + c : c \in \mathbb{R}\}$. Graficamente, è una famiglia di *curve parallele* (traslate verticalmente le une dalle altre).

144.3. Integrale indefinito: definizione e proprietà

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Definizione 144.2 — Integrale indefinito

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette primitive su un intervallo I. Si dice *integrale indefinito* di f su I l'insieme di tutte le primitive di f su I, e si denota

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R} \text{ (costante d'integrazione)},$$

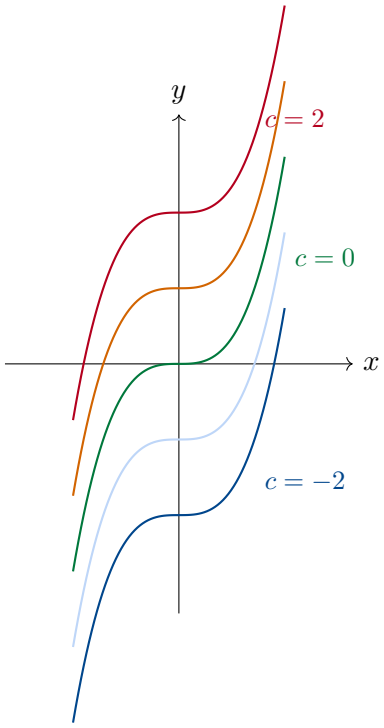


Figura 144.1: Famiglia delle primitive di $f(x) = 3x^2$: ciascuna ha la forma $F(x) = x^3 + c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Le curve sono "parallele" (traslate verticalmente).

dove F è una qualunque primitiva di f.

Terminologia e notazione.

- Il simbolo $\int$ è detto *segno di integrale*.
- La funzione $f(x)$ all'interno si dice *integranda*.
- Il fattore $\mathrm{d}x$ (il differenziale di x, vedi 142) indica la variabile rispetto a cui si integra. È importante esplicitarlo, anche quando l'integranda dipende solo da x: nei calcoli a più variabili (università), serve a distinguere fra $\int f\,\mathrm{d}x$ e $\int f\,\mathrm{d}t$.
- La costante c è la *costante d'integrazione*; va sempre indicata, altrimenti si scrive solo *una* primitiva, non l'integrale indefinito.

Esistenza delle primitive

Non tutte le funzioni hanno primitive (anche solo definite). Tuttavia, per le funzioni che ci interessano in pratica, vale il seguente risultato (lo dimostreremo come corollario del *teorema fondamentale del calcolo*, 149):

Teorema 144.2 — Esistenza delle primitive per funzioni continue

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è *continua* su un intervallo I, allora f ammette primitive su I.

Questo risultato è enormemente confortante: ogni funzione continua è "integrabile" (almeno in linea di principio), anche se la sua primitiva potrebbe non essere esprimibile in termini di funzioni elementari.

Tabella delle primitive immediate

Dalla definizione di derivata segue immediatamente la seguente tabella, che è il *vocabolario di base* del calcolo integrale e va memorizzata.

Integranda $f(x)$	**Primitiva** $\int f(x)\,\mathrm{d}x$
x^n, $n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
a^x $(a > 0, a \neq 1)$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + c$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + c$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + c$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(= 1 + \operatorname{tg}^2 x)$	$\operatorname{tg} x + c$
$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$-\operatorname{cotg} x + c$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsen x + c$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c$

Si verifica ogni riga semplicemente derivando la primitiva: ad esempio, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \dfrac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$, e analogamente per le altre.

Attenzione!

La regola $\int x^n\,\mathrm{d}x = x^{n+1}/(n+1)+c$ *non* vale per $n = -1$: nel caso $n = -1$ il denominatore $n+1$ è zero. È proprio per $n = -1$ che entra in gioco il logaritmo: $\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + c$. Questa è la prima volta che il logaritmo appare nel programma come *soluzione naturale* di un problema (la primitiva di $1/x$ è "mancante" fra le potenze, e va completata col logaritmo). Storicamente, è proprio così che il logaritmo *naturale* fu identificato e studiato per la prima volta da Saint-Vincent e Mengoli nel Seicento.

144.4. Linearità dell'integrale

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

L'integrale indefinito eredita dalla derivata la fondamentale proprietà di *linearità*: una combinazione lineare di funzioni si integra termine a termine.

Teorema 144.3 — Linearità dell'integrale indefinito

Siano f, g funzioni che ammettono primitive su un intervallo I, e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ due costanti. Allora $\alpha f + \beta g$ ammette primitive su I, e

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Siano F, G primitive di f, g rispettivamente. Allora $(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$, quindi $\alpha F + \beta G$ è una primitiva di $\alpha f + \beta g$. L'uguaglianza fra gli integrali indefiniti (come famiglie di primitive) segue dalla caratterizzazione delle primitive a meno di costante.

Attenzione!

L'integrale del prodotto non è il prodotto degli integrali! In generale

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \neq \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Per calcolare l'integrale di un prodotto serve la *tecnica dell'integrazione per parti*, che vedremo in 146.
Analogamente, $\int (f/g)\,\mathrm{d}x \neq (\int f)/(\int g)$, e per i quozienti ci sono tecniche specifiche (*integrazione per sostituzione*, *decomposizione in fratti semplici*; vedi 146, 147).

Esempio 144.3 — Applicazione diretta della linearità

$$\int (3x^2 - 5\cos x + 2)\,\mathrm{d}x = 3\int x^2\,\mathrm{d}x - 5\int \cos x\,\mathrm{d}x + 2\int 1\,\mathrm{d}x = x^3 - 5\operatorname{sen} x + 2x + c.$$

Esempio 144.4 — Polinomio

$$\int (4x^3 - 6x + 7)\,\mathrm{d}x = x^4 - 3x^2 + 7x + c.$$

Esempio 144.5 — Trasformazione algebrica prima di integrare

$$\int \frac{x^2+3}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{3}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 3\ln|x| + c.$$

Lezione: prima di integrare, conviene spesso semplificare algebricamente.

Problema di Cauchy: determinare la costante

Spesso si cerca una *specifica* primitiva tra l'infinità di tutte le primitive: quella che soddisfa una condizione assegnata, ad esempio passa per un dato punto. Il problema si chiama *problema di Cauchy* (vedi più sistematicamente in 153).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Procedura — Determinazione della costante

1. Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$.
2. Imporre la condizione assegnata (es. "$F(x_0) = y_0$").
3. Risolvere $F(x_0) + c = y_0$ rispetto a c.

Esempio 144.6 — Problema di Cauchy elementare

Determinare la primitiva di $f(x) = 2x$ che passa per il punto $(1, 5)$.
Integrale indefinito: $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c$. Condizione: $1^2 + c = 5 \Rightarrow c = 4$. *Soluzione*: $F(x) = x^2 + 4$.

144.5. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 144.7 — Potenza con esponente reale

$$\int x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{5/2}}{5/2} + c = \frac{2}{5}x^{5/2} + c = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c.$$

Esempio 144.8 — Radice

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c.$$

Esempio 144.9 — Potenza negativa

$$\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c.$$

Esempio 144.10 — Esponenziale di base a

$$\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + c.$$

Esempio 144.11 — Polinomio fratto, riduzione a immediati

$$\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c.$$

Esempio 144.12 — Quadrato di seno e coseno via formule di duplicazione

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + c.$$

(Si è usata la formula $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos(2x))/2$ e l'osservazione che $\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(2x)/2 + c$, che possiamo derivare per verifica.)

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 144.13 — Velocità → posizione (cinematica)

In cinematica, se l'accelerazione di un mobile è $a(t) = g$ (costante), allora la velocità è una primitiva di a: $v(t) = \int g\,\mathrm{d}t = gt + c_1$. Imponendo $v(0) = v_0$, ricaviamo $c_1 = v_0$, dunque $v(t) = gt + v_0$.
La posizione è una primitiva di v: $s(t) = \int (gt + v_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + c_2$. Imponendo $s(0) = s_0$, ricaviamo $c_2 = s_0$, dunque $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$ (la nota legge oraria del moto uniformemente accelerato). *Lezione fondamentale*: l'integrazione è il metodo naturale per passare da accelerazione a velocità a posizione in cinematica.

Esempio 144.14 — Problema di Cauchy con due condizioni

Trovare la funzione f derivabile due volte tale che $f''(x) = 6x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.
Integrando una volta: $f'(x) = \int 6x\,\mathrm{d}x = 3x^2 + c_1$. Condizione $f'(0) = 2$: $0 + c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = 2$, quindi $f'(x) = 3x^2 + 2$.
Integrando di nuovo: $f(x) = \int (3x^2 + 2)\,\mathrm{d}x = x^3 + 2x + c_2$. Condizione $f(0) = 1$: $0 + 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$. *Soluzione*: $f(x) = x^3 + 2x + 1$.

144.6. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 144.1

1. Verificare per derivazione le seguenti uguaglianze:
   (a) $\int 4x^3\,\mathrm{d}x = x^4 + c$;
   (b) $\int (2x+3)e^{x^2+3x}\,\mathrm{d}x = e^{x^2+3x} + c$;
   (c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$.
2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti immediati:
   (a) $\int (x^5 - 3x^2 + 2x - 1)\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\int 5\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;
   (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$;
   (d) $\int (e^x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x$;
   (e) $\displaystyle\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$;
   (f) $\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,\mathrm{d}x$.
3. Calcolare gli integrali dopo opportuna trasformazione algebrica:
   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
   (c) $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

(d) $\int (1+\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x$.

4. Determinare la primitiva di $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ che passa per il punto $(1, 7)$.
5. Determinare la primitiva di $f(x) = \cos x$ che si annulla in $x = 0$.
6. Determinare la primitiva di $f(x) = e^{-x}$ il cui grafico passa per $(0, 3)$.
7. Calcolare $\int (3\operatorname{sen} x + 2e^x)\,\mathrm{d}x$.
8. Calcolare $\int (4 - \cos(2x))\,\mathrm{d}x$ (suggerimento: $\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(2x)/2 + c$, verificabile per derivazione).
9. Mostrare che $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + c$.
10. Determinare $f(x)$ sapendo che $f''(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$.
11. Determinare $f(x)$ sapendo che $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
12. Un corpo si muove con accelerazione $a(t) = 2t - 4\,\mathrm{m/s^2}$, parte da fermo all'istante $t = 0$ dalla posizione $s_0 = 5\,\mathrm{m}$. Calcolare $v(t)$ e $s(t)$. A quale istante il corpo è momentaneamente fermo?
13. Per ciascuna delle seguenti, indicare se la formula è una primitiva corretta della funzione data; correggere quelle sbagliate:
    (a) $\int x^2\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} 3x^3 + c$;
    (b) $\int e^{2x}\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} e^{2x} + c$;
    (c) $\int \operatorname{sen}(3x)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} -\cos(3x) + c$.
14. Mostrare che le funzioni $F(x) = \arcsen x$ e $G(x) = -\arccos x$ differiscono per una costante, e calcolarla.
15. *Sfida.* Mostrare che la funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ (segno di x) *non* ammette primitive su tutto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ che si estendono con continuità in 0 (suggerimento: una primitiva continua su $\mathbb{R}$ avrebbe derivata destra $+1$ e sinistra -1 in 0, impossibile per la derivabilità). Tuttavia, su ciascuna delle semirette $x > 0$ e $x < 0$, f ammette primitive: indicarle.

144.7. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- *Primitiva.* F è primitiva di f su un intervallo I se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Concetto inverso della derivata.
- *Caratterizzazione su un intervallo.* Due primitive di una stessa funzione su un intervallo

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

differiscono per una costante additiva. (Conseguenza del corollario di Lagrange, vedi 137.)

- *Integrale indefinito.* $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c$ con F primitiva qualunque di f e $c \in \mathbb{R}$ *costante d'integrazione.* È l'insieme di *tutte* le primitive.
- *Esistenza delle primitive.* Ogni funzione *continua* su un intervallo ammette primitive (corollario del teorema fondamentale del calcolo, 149).
- *Tabella delle primitive immediate*: x^n (con eccezione $n = -1$, dove appare $\ln|x|$), e^x, a^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $1/\cos^2 x$, $1/\sqrt{1-x^2}$, $1/(1+x^2)$.
- *Linearità.* $\int(\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f\,\mathrm{d}x + \beta \int g\,\mathrm{d}x$. *Non* vale per prodotti o quozienti: per quelli servono tecniche più sofisticate (vedi 146).
- *Problema di Cauchy.* Per individuare *una* primitiva specifica fra le infinite, si impone una condizione (es. $F(x_0) = y_0$) e si determina la costante.
- Nei prossimi capitoli: 145 approfondisce la tabella degli *integrali immediati* con primitiva "composta"; 146 introduce le tecniche di *integrazione per sostituzione e per parti*; 147 tratta le funzioni razionali. Il *teorema fondamentale del calcolo* (149) collegherà infine l'integrale indefinito a quello *definito*, mostrando che integrazione e derivazione sono operazioni inverse l'una dell'altra.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco