Capitolo 147

Integrazione di funzioni razionali fratte

WEB (Materiali vari)

“

Studia questo capitolo con l’AI: quiz, esercizi e altro

Ripassa con le flashcard

Esercizi auto-generati

Sorgente di questo capitolo

Schede, test e video di matematika.it

Ogni frazione razionale, comunque complicata, può scomporsi nella somma di frazioni più semplici, ciascuna delle quali ha per denominatore una potenza di fattore lineare o quadratico irriducibile. L’integrazione si riduce così a quella di pochi tipi elementari, e in tal modo il problema dell’integrazione delle funzioni razionali risulta sempre risolubile.”

— Johann Bernoulli, *Acta Eruditorum* (1702), traduzione adattata

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

147.1. Introduzione motivazionale

quiz e materiali con l'AI

Una *funzione razionale* è il quoziente di due polinomi: $f(x) = P(x)/Q(x)$ con P, Q polinomi a coefficienti reali e $Q \not\equiv 0$. Le funzioni razionali sono fra le più comuni nella matematica applicata, e abbiamo già visto vari esempi di studi di funzione razionale (141). In questo capitolo affrontiamo il loro *integrale*.

La buona notizia, scoperta sistematicamente da Johann Bernoulli nel 1702, è che *ogni funzione razionale ammette primitiva elementare*, esprimibile come somma di logaritmi e arcotangenti. Il metodo — la *decomposizione in fratti semplici* — riduce l'integrale di una qualsiasi funzione razionale a una somma finita di integrali tabellari. È una procedura completamente *algoritmica*: dato P/Q, si arriva alla primitiva in un numero finito di passi meccanici, senza colpi di genio.

Lo schema è il seguente:

1. Se $\deg P \geq \deg Q$, si esegue la divisione polinomiale: $P/Q = S(x) + R(x)/Q(x)$ con $\deg R < \deg Q$. Si integra S direttamente (polinomio) e si rinvia al passo successivo per il resto.
2. Si fattorizza $Q(x)$ in fattori lineari e quadratici irriducibili.
3. Si decompone $R(x)/Q(x)$ in *fratti semplici*.
4. Si integra ciascun fratto separatamente, usando le tabelle di 144–145.

Cominciamo dai casi più semplici e saliamo gradualmente.

147.2. Casi semplici: denominatore di primo grado

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Caso primo grado.

$$\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c, \qquad a \neq 0.$$

(Caso speciale dell'argomento lineare visto in 145.)

Esempio 147.1 — Denominatore lineare con coefficiente

$$\int \frac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-5| + c.$$

Se al numeratore c'è un polinomio di grado ≥ 1, si effettua prima la *divisione polinomiale*:

Esempio 147.2 — Divisione preliminare

$\displaystyle\int \frac{x^2+3x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x$. Eseguo la divisione: $(x^2+3x-1) : (x-2) = x+5$ con resto 9. Dunque

$\dfrac{x^2+3x-1}{x-2} = x+5+\dfrac{9}{x-2}$, e

$$\int \frac{x^2+3x-1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+5x+9\ln|x-2|+c.$$

147.3. Casi con denominatore di secondo grado

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Sia $Q(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$. Si distinguono tre casi in base al discriminante $\Delta = b^2-4ac$.

Caso $\Delta > 0$: due radici reali distinte

$Q(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. La decomposizione è

$$\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2},$$

con A, B da determinare. Una volta trovati, l'integrale è somma di due logaritmi.

Esempio 147.3 — $\Delta > 0$ classico

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$. Fattorizzo: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Decompongo:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}.$$

Moltiplicando per $(x-2)(x-3)$: $1=A(x-3)+B(x-2)$. Per $x=2$: $1=-A\Rightarrow A=-1$. Per $x=3$: $1=B$. Allora

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6} = -\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3} = -\ln|x-2|+\ln|x-3|+c = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+c.$$

Caso $\Delta = 0$: radice reale doppia

$Q(x)=a(x-x_0)^2$. L'integrale di $1/(x-x_0)^2$ è elementare:

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x-x_0}+c.$$

Per numeratore di primo grado, ci si riconduce con sostituzione lineare o con decomposizione $\dfrac{Ax+B}{(x-x_0)^2} = \dfrac{A}{x-x_0}+\dfrac{Ax_0+B}{(x-x_0)^2}$.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 147.4 — $\Delta = 0$

$\int \dfrac{x}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$. Scrivo $x = (x-1)+1$:

$$\int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$

Caso $\Delta < 0$: nessuna radice reale (denominatore irriducibile)

$Q(x)$ non si fattorizza in $\mathbb{R}$. Si usa il *completamento del quadrato* per ricondurre all'arcotangente.

Procedura — Caso $\Delta < 0$

1. Riscrivere $ax^2+bx+c = a\left[(x+b/(2a))^2 + (4ac-b^2)/(4a^2)\right]$, dove $4ac - b^2 > 0$.
2. Per il numeratore: se è di primo grado $Ax+B$, separare la parte "derivata del denominatore" (riconduce a logaritmo) dalla costante residua (riconduce ad arcotangente).

Esempio 147.5 — $\Delta < 0$, numeratore costante

$\int \dfrac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$. Completo: $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$. Pongo $t = x+1$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, e ottengo $\int \mathrm{d}t/(t^2+4) = (1/2)\operatorname{arctg}(t/2) + c$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + c.$$

Esempio 147.6 — $\Delta < 0$, numeratore lineare

$\int \dfrac{2x+3}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$. La derivata del denominatore è $2x+2$. Scrivo $2x+3 = (2x+2)+1$:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + c.$$

(Il primo addendo è pattern f'/f logaritmico; il secondo è l'arcotangente generalizzato del passo precedente.)

147.4. Decomposizione in fratti semplici

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Il metodo generale per integrare $P(x)/Q(x)$ (con $\deg P < \deg Q$) si basa sul seguente teorema di algebra:

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Teorema 147.1 — Decomposizione in fratti semplici (sui reali)

Sia $Q(x)$ un polinomio a coefficienti reali, fattorizzato come

$$Q(x) = a \cdot \prod_{i} (x - \alpha_i)^{m_i} \cdot \prod_{j} (x^2 + p_j x + q_j)^{n_j},$$

con α_i radici reali (di molteplicità m_i) e $x^2 + p_j x + q_j$ fattori quadratici irriducibili (di molteplicità n_j). Sia $P(x)$ un polinomio con $\deg P < \deg Q$. Allora P/Q si decompone in modo unico come somma di *fratti semplici*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{i,k}}{(x - \alpha_i)^k} + \sum_{j} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{B_{j,k} x + C_{j,k}}{(x^2 + p_j x + q_j)^k},$$

con $A_{i,k}, B_{j,k}, C_{j,k} \in \mathbb{R}$ costanti univocamente determinate.

L'integrale di ciascun fratto è elementare:

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x - \alpha} = \ln|x - \alpha| + c$;
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - \alpha)^k} = \frac{-1}{(k-1)(x - \alpha)^{k-1}} + c$ per $k \geq 2$;
- $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x$ con $\Delta < 0$ si tratta come nel passo precedente (separazione in f'/f + arcotangente);
- $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}\,\mathrm{d}x$ per $k \geq 2$ si tratta con una formula di riduzione (caso più raro a livello liceale).

Determinazione dei coefficienti: due metodi

Procedura — Principio di identità dei polinomi

1. Scrivere la decomposizione con i coefficienti $A, B, \ldots$ come incognite.
2. Moltiplicare per $Q(x)$, ottenendo un'identità polinomiale.
3. Imporre l'uguaglianza dei coefficienti termine a termine (oppure: sostituire valori specifici di x, in particolare i valori delle radici di Q, che annullano molti termini).
4. Risolvere il sistema lineare nelle incognite.

Procedura — Metodo della copertura (per radici semplici)

Per le radici semplici α di Q, il coefficiente A del termine $A/(x-\alpha)$ si calcola direttamente:

$$A = \lim_{x \to \alpha} (x - \alpha) \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

Mnemonica: "copri" il fattore $(x - \alpha)$ in Q e valuta il resto in $x = \alpha$.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 147.7 — Decomposizione con tre radici semplici

$\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$. Decomposizione:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Metodo della copertura:

- $A = \left.\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-3)}\right|_{x=1} = \dfrac{2}{(-1)(-2)} = 1.$
- $B = \left.\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-3)}\right|_{x=2} = \dfrac{5}{(1)(-1)} = -5.$
- $C = \left.\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}\right|_{x=3} = \dfrac{10}{(2)(1)} = 5.$

Verifica con $x=0$: $\dfrac{1}{(-1)(-2)(-3)} = -\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{A}{-1} + \dfrac{B}{-2} + \dfrac{C}{-3} = -1 + 5/2 - 5/3 = -6/6 + 15/6 - 10/6 = -1/6$. ✓

Integrale:

$$\int = \ln|x-1| - 5\ln|x-2| + 5\ln|x-3| + c = \ln\left|\frac{(x-1)(x-3)^5}{(x-2)^5}\right| + c.$$

Esempio 147.8 — Decomposizione con radice doppia

$\displaystyle\int \frac{2x+1}{x(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$. Decomposizione:

$$\frac{2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Moltiplicando per $x(x-1)^2$: $2x+1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$. Per $x=0$: $1 = A \Rightarrow A = 1$. Per $x=1$: $3 = C$. Per $x=2$ (o eguagliando i coefficienti di x^2): coeff. x^2 a sinistra $= 0$, a destra $= A + B = 1 + B \Rightarrow B = -1$.

Quindi

$$\int = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + c = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{3}{x-1} + c.$$

Esempio 147.9 — Decomposizione con quadratico irriducibile

$\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$. Decomposizione:

$$\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Moltiplicando: $x^2+x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A$. Eguaglianza dei coefficienti:

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

- $A = 1$ (termine noto);
- $C = 1$ (coeff. x);
- $A + B = 1 \Rightarrow B = 0$ (coeff. x^2).

Quindi $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + \operatorname{arctg} x + c$.

147.5. Casi con grado del numeratore ≥ del denominatore

quiz e materiali con l'AI
flashcard del paragrafo

Se $\deg P \geq \deg Q$, prima di applicare la decomposizione in fratti semplici si esegue la *divisione polinomiale*: $P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$ con $\deg R < \deg Q$. Allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

e si integra $S(x)$ (polinomio) e R/Q (frazione propria) separatamente.

Esempio 147.10 — Divisione preliminare con $\deg P > \deg Q$

$\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$. Divisione: $x^3 - 2x + 1 = (x)(x^2 - 1) + (-x + 1)$. Quindi

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{-x+1}{x^2-1} = x + \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = x - \frac{1}{x+1}.$$

Integrando: $\dfrac{x^2}{2} - \ln|x+1| + c$.

Esempio 147.11 — Stesso grado: $\deg P = \deg Q$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = x - \operatorname{arctg} x + c.$$

147.6. Esempi svolti

quiz e materiali con l'AI

Esempio 147.12 — Sintesi: caso completo

$\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x$.

Passo 1: divisione. $x^3 + 2x^2 - x + 3 = (x+3)(x^2 - x - 2) + (4x + 9)$. Verifica: $(x+3)(x^2-x-2) = x^3 - x^2 - 2x + 3x^2 - 3x - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, e $x^3 + 2x^2 - x + 3 - (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 4x + 9$. ✓

Passo 2: fattorizzo $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

Passo 3: decompongo $\dfrac{4x+9}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+1}$.

Per $x=2$: $17=3A\Rightarrow A=17/3$. Per $x=-1$: $5=-3B\Rightarrow B=-5/3$.

Passo 4: integro.

$$\int (x+3)\,\mathrm{d}x+\frac{17}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}-\frac{5}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=\frac{x^2}{2}+3x+\frac{17}{3}\ln|x-2|-\frac{5}{3}\ln|x+1|+c.$$

Esempio 147.13 — Caso con $\Delta<0$ in mezzo

$\displaystyle\int\frac{3x+5}{(x-1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$. Decomposizione:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

$3x+5=A(x^2+4)+(Bx+C)(x-1)=(A+B)x^2+(C-B)x+(4A-C)$. Sistema: $A+B=0$, $C-B=3$, $4A-C=5$. Dalla prima $B=-A$; sostituendo nella seconda $C+A=3$; sostituendo $C=3-A$ nella terza $4A-(3-A)=5\Rightarrow 5A=8\Rightarrow A=8/5$. Quindi $B=-8/5$, $C=3-8/5=7/5$.

Integrale:

$$\frac{8}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{-8x/5+7/5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\frac{8}{5}\ln|x-1|-\frac{4}{5}\ln(x^2+4)+\frac{7}{10}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+c.$$

(Nel secondo integrale: $\int(-8x/5)/(x^2+4)=-(4/5)\ln(x^2+4)$ pattern f'/f, e $\int(7/5)/(x^2+4)=(7/5)(1/2)\operatorname{arctg}(x/2)=(7/10)\operatorname{arctg}(x/2)$.)

Esempio 147.14 — Tutte le radici doppie

$$\int\frac{1}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Decomposizione: $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$.

Moltiplicando per $(x^2-1)^2$: $1=A(x-1)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^2$. $x=1$: $1=4B\Rightarrow B=1/4$. $x=-1$: $1=4D\Rightarrow D=1/4$. Coeff. x^3 a destra: $A+C=0$. Coeff. termine noto: $-A+B+C+D=1\Rightarrow C-A=1/2$. Combinando con $A+C=0$: $A=-1/4$, $C=1/4$.

Integrale:

$$-\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{4(x+1)}+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{x}{2(x^2-1)}+c.$$

(L'ultimo passaggio: $-\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=-\frac{(x+1)+(x-1)}{4(x-1)(x+1)}=-\frac{2x}{4(x^2-1)}=-\frac{x}{2(x^2-1)}$.)

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

Esempio 147.15 — Funzione razionale che si trasforma in razionale dopo sostituzione

$\int \dfrac{e^x}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x$. Pongo $t = e^x$, $\mathrm{d}t = e^x \mathrm{d}x$:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c.$$

(Formula di tabella $\int 1/(x^2-a^2) = (1/(2a))\ln|(x-a)/(x+a)|$ con $a = 1$.)

147.7. Esercizi proposti

quiz e materiali con l'AI

Esercizio 147.1

1. Denominatore di primo grado:
   (a) $\int \dfrac{3}{2x+1}\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\int \dfrac{x-1}{x+2}\,\mathrm{d}x$ (divisione preliminare);
   (c) $\int \dfrac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x$.
2. Denominatore di secondo grado, $\Delta > 0$:
   (a) $\int \dfrac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\int \dfrac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$;
   (c) $\int \dfrac{x}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$ (suggerimento: la derivata del denominatore è $2x-5$).
3. Denominatore di secondo grado, $\Delta = 0$:
   (a) $\int \dfrac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\int \dfrac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$;
   (c) $\int \dfrac{x+4}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$.
4. Denominatore di secondo grado, $\Delta < 0$:
   (a) $\int \dfrac{1}{x^2+6x+13}\,\mathrm{d}x$;
   (b) $\int \dfrac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$;
   (c) $\int \dfrac{2x+1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$;
   (d) $\int \dfrac{3x-1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$.
5. Decomposizione in fratti semplici:

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

(a) $\int \dfrac{x+1}{x^2+x-6}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\int \dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\int \dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$;

(d) $\int \dfrac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$ (suggerimento: $x^3+x = x(x^2+1)$);

(e) $\int \dfrac{x^2-1}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x$ (suggerimento: fattorizzare $x(x+1)^2$).

6. Grado del numeratore alto:

(a) $\int \dfrac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\int \dfrac{x^4+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\int \dfrac{x^5+1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ (suggerimento: $x^5+1 = (x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$).

7. Calcolare $\int \dfrac{1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ (suggerimento: $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$).

8. Calcolare $\int \dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$. (Suggerimento: $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$.)

9. Mostrare che la primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ vale $\operatorname{arctg} x + c$; quella di $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ vale $\dfrac{1}{2}\ln|(x-1)/(x+1)| + c$. Confronto: spiegare cosa "rappresenta" geometricamente la differenza fra i due casi (primitivamente uno legato all'iperbole, l'altro al cerchio).

10. Determinare $f(x)$ tale che $f'(x) = \dfrac{2x+5}{x^2+4x+5}$ e $f(0) = 0$.

11. Calcolare $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^2+4)^2}$ (più fattori, includendo un quadratico al quadrato).

12. Calcolare $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + 5\cos^2 x}$ (suggerimento: dividere per $\cos^2 x$ ottenendo $\int \mathrm{d}(\operatorname{tg} x)/(\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 5)$, e quindi razionale in $t = \operatorname{tg} x$).

13. Mostrare per induzione che $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = J_n$ soddisfa la *formula di riduzione*

$$J_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}J_{n-1}, \qquad n \geq 2,$$

con $J_1 = \operatorname{arctg} x + c$.

14. *Sfida.* Mostrare che, qualunque sia la funzione razionale $P(x)/Q(x)$ a coefficienti reali, la sua primitiva è esprimibile come somma di funzioni razionali, logaritmi (di polinomi a coefficienti reali) e arcotangenti (di funzioni lineari di x). Spiegare perché *nessun'altra funzione trascendente* è necessaria (suggerimento: questa proprietà è una conseguenza diretta del teorema di decomposizione in fratti semplici sui reali).

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco

147.8. Riepilogo del capitolo

quiz e materiali con l'AI

Riepilogo

- *Schema generale.* Per integrare $P(x)/Q(x)$:
  1. se $\deg P \geq \deg Q$, dividere per ridurre a $S(x) + R(x)/Q(x)$ con $\deg R < \deg Q$;
  2. fattorizzare Q in fattori lineari e quadratici irriducibili in $\mathbb{R}$;
  3. decomporre R/Q in fratti semplici;
  4. integrare ciascun fratto separatamente.
- *Casi tipo.* $\int 1/(x-a) = \ln|x-a|$; $\int 1/(x-a)^k = -1/[(k-1)(x-a)^{k-1}]$; $\int (Ax+B)/(x^2+px+q)$ con $\Delta < 0$: separare in f'/f (logaritmico) e arcotangente generalizzato; $\int 1/(x^2-a^2) = (1/(2a))\ln|(x-a)/(x+a)|$.
- *Determinazione dei coefficienti.* Due metodi equivalenti:
  1. principio di identità dei polinomi (sistema lineare);
  2. metodo della copertura (per radici semplici, sostituire $x = \alpha$ dopo aver "coperto" $(x-\alpha)$).
- *Risultato fondamentale.* Ogni funzione razionale ha primitiva elementare, somma finita di funzioni razionali, logaritmi e arcotangenti (teorema di Bernoulli, 1702).
- Nel prossimo capitolo (148) si passa dall'*integrale indefinito* (famiglia di primitive) all'*integrale definito* (numero, area sotto il grafico). Il *teorema fondamentale del calcolo* (149) collegherà i due concetti.

CC BY-NC-SA 4.0 · a cura di Giovanni Nicco