

1.1 operazioni generiche con gli insiemi

Problema: IN0001 - Insiemistica

Testo [IN0001] [1★ 1🕒 1📖] Dati gli insiemi indicati, indica se le affermazioni fatte sono vere o false. Motiva le risposte eseguendo le operazioni e/o mostrando i diagrammi Eulero-Venn (o altre rappresentazioni)

(a) $A = \{1; 2; 3\}$ $B = \{2; 3; 4\}$ $C = \{2; 3\}$

Affermazioni	
$A \cap B = \{2; 3\}$	$C \subset A$
$A \cap B = \emptyset$	$B \cap C = B$
$C \cap B = A \cap B$	$B \subset A$
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$	$A \subset B$

(b) $A = \{a; b; c\}$ $B = \{b; c; d\}$ $C = \{b; c\}$

Affermazioni	
$A \cap B = \{b; c\}$	$C \subset A$
$A \cap B = \emptyset$	$B \cap C = B$
$C \cap B = A \cap B$	$B \subset A$
$A \cup B = \{a; b; c; d\}$	$A \subset B$

(c) $X = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ $Y = \{2; 3; 5; 7\}$ $Z = \{1; 2; 3; 6\}$

Affermazioni	
$X \cap Y = \{2\}$	$Y \subseteq Z$
$X \cup Z = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 8\}$	$Z \setminus X = \{1; 3\}$
$Y \cap Z = \{2; 3\}$	$X \cap Z \subset X$
$X \setminus Y = X$	$Y \cup Z = Y \cap Z$

(d) $X = \{a; e; i; o; u\}$ $Y = \{a; b; c; d; e\}$ $Z = \{a; e\}$

Affermazioni	
$X \cap Y = \{a; e\}$	$Z \subset X$
$X \cup Y = \{a; b; c; d; e; i; o; u\}$	$Y \subset Z$
$X \cap Z = Z$	$Y \cup Z = Y$
$X \cap Y = Z$	$X \subset Y$

(e) $P = \{2; 3; 5; 7\}$ $D = \{1; 3; 5; 7\}$ $Q = \{3; 5\}$

Affermazioni	
$P \cap D = \{3; 5; 7\}$	$Q \subset P$
$P \cup D = \{1; 2; 3; 5; 7\}$	$D \subset P$
$P \cap Q = Q$	$D \cup Q = D$
$P \cap D = Q$	$P \subset D$

(f) $X = \{a; b; c; d\}$ $Y = \{c; d; e\}$ $Z = \{c; d\}$

Affermazioni	
$X \cap Y = Z$	$Z \subset X$
$X \cup Y = \{a; b; c; d; e\}$	$Y \cap Z = Y$
$X \cap Z = \emptyset$	$X \subset Y$
$Y \cup Z = Y$	$Z \subset Y$

Spiegazione Esegui le operazioni indicate e verifica di conseguenza la veridicità dell'affermazione proposta.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) [...].

(b) [...].

(c) [...].

(d) [...].

(e)

Affermazione	V/F	Motivazione
$P \cap D = \{3; 5; 7\}$	V	L'intersezione $P \cap D$ contiene gli elementi comuni ai due insiemi.
$Q \subset P$	V	Ogni elemento di Q (3, 5) è anche un elemento di P .
$P \cup D = \{1; 2; 3; 5; 7\}$	V	L'unione $P \cup D$ include tutti gli elementi di P e D senza ripetizioni.
$D \subset P$	F	L'elemento 1 appartiene a D ma non appartiene a P .
$P \cap Q = Q$	V	Poiché Q è un sottoinsieme di P ($Q \subset P$), la loro intersezione è Q stesso.
$D \cup Q = D$	V	Poiché Q è un sottoinsieme di D ($Q \subset D$), la loro unione è D stesso.
$P \cap D = Q$	F	$P \cap D = \{3; 5; 7\}$, mentre $Q = \{3; 5\}$, quindi non sono uguali.
$P \subset D$	F	L'elemento 2 appartiene a P ma non appartiene a D .

(f)

Affermazione	V/F	Motivazione
$X \cap Y = Z$	V	L'intersezione $X \cap Y = \{c; d\}$, che è proprio Z .
$X \cup Y = \{a; b; c; d; e\}$	V	L'unione contiene tutti gli elementi: $\{a; b; c; d; e\}$.
$X \cap Z = \emptyset$	F	L'intersezione $X \cap Z = \{c; d\}$, non è l'insieme vuoto.
$Y \cup Z = Y$	V	Poiché $Z \subset Y$, l'unione $Y \cup Z$ è Y stesso.
$Z \subset X$	V	Tutti gli elementi di Z ($\{c; d\}$) sono contenuti in X .
$Y \cap Z = Y$	F	L'intersezione $Y \cap Z = \{c; d\}$, che è Z , non è Y .
$X \subset Y$	F	Ad esempio, $a \in X$ ma $a \notin Y$.
$Z \subset Y$	V	Tutti gli elementi di Z ($\{c; d\}$) sono contenuti in Y .

Problema: *IN0010 - Insiemistica*

Testo [\[IN0010\]](#) [1½★ 1½🕒 1📖] Dati gli insiemi indicati, riscrivili elencando tutti i loro elementi e rispondi alle domande date.

- (a) Sono dati $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 < x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2n - 1 \text{ con } n \in \{0, 1, 2\}\}$.
Calcola $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\overline{B}_A$ (il complementare di B rispetto ad A), l'insieme delle parti di B

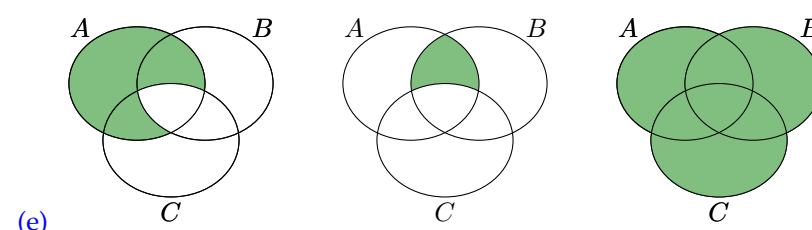
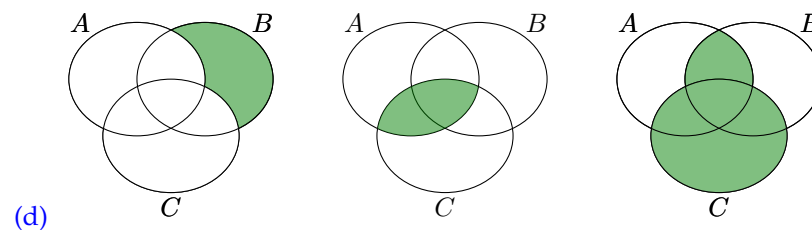
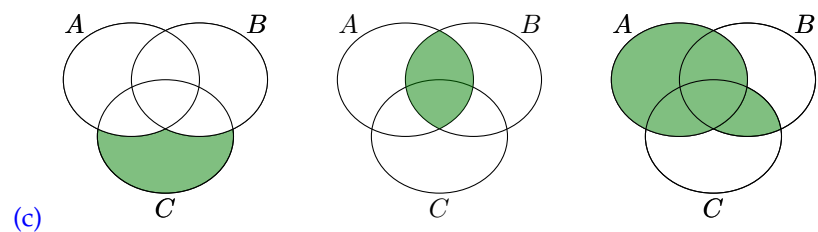
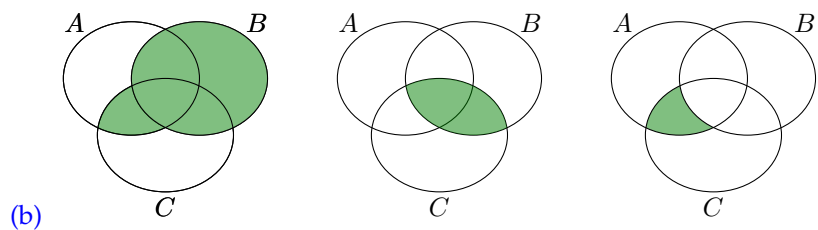
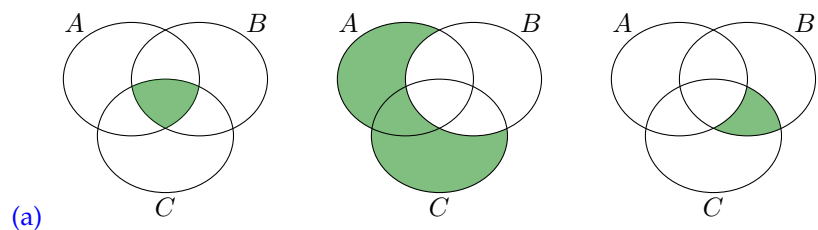
Spiegazione Esegui le operazioni indicate e verifica di conseguenza la veridicità dell'affermazione proposta.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) .

Problema: IN0004 - Insiemistica

Testo [IN0004] [1★ 2⌚ 1📖] Dati gli insiemi indicati A B C , indica quale operazione è necessario fare per ottenere l'insieme rappresentato dalla parte colorata.



Spiegazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $A \cap B \cap C$; $C \cup A - B$; $B \cap C - A$.

(b) $(A \cap C) \cup B$; $B \cap C$; $A \cap C - B$.

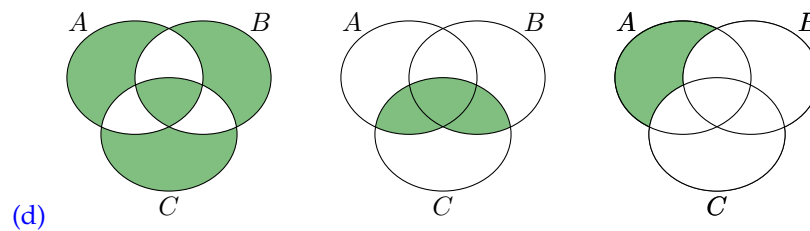
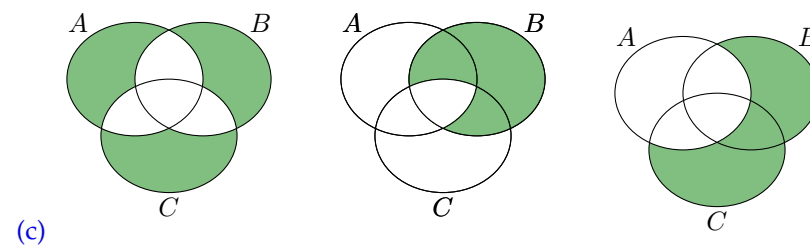
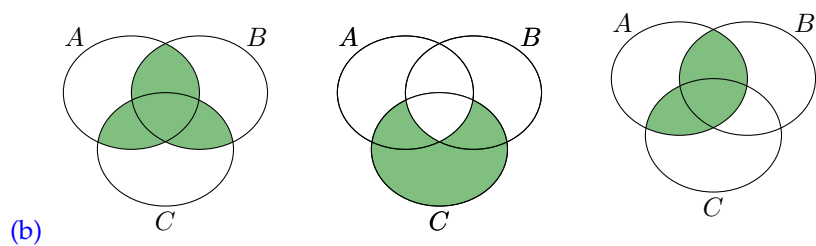
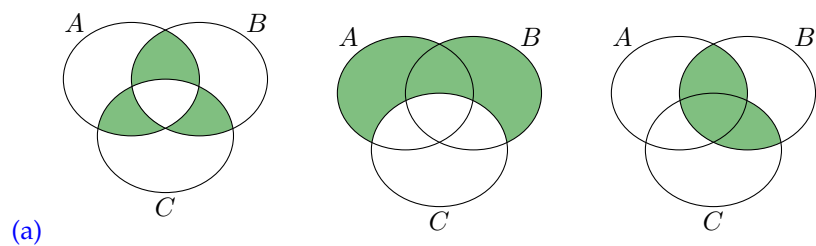
(c) $A - (B \cup C)$; $A \cap B$; $(B \cap C) \cup A$;

(d) $A - (B \cup C)$; $A \cap C$; $(A \cap B) \cup C$;

(e) $A - (A \cap B \cap C)$; $A \cap B - C$; $A \cap B \cap C$;

Problema: IN0005 - Insiemistica

Testo [IN0005] [2★ 3⌚ 1📖] Dati gli insiemi indicati A B C , indica quale operazione è necessario fare per ottenere l'insieme rappresentato dalla parte colorata.



Spiegazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) - A \cap B \cap C; \quad A \cup B - C; \quad (A \cap B) \cup (C \cap B).$

(b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C); \quad C - (A \cap B \cap C); \quad (C \cap A) \cup (B \cap A).$

(c) $(A \cup B \cup C) - (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C); \quad B - (A \cap B \cap C); \quad B \cup C - A.$

(d) $[(A \cup B \cup C) - (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)] - (A \cap B \cap C); \quad (B \cap C) \cup (A \cap C);$
 $A - (B \cup C).$

Problema: IN0006 - Insiemistica

Testo [IN0006] [1½★ 3🕒 1📖] Sono dati gli insiemi A B C , rappresentati da tre cerchi ognuno dei quali interseca gli altri due. Indica, colorandola, a quale regione del piano corrisponde l'insieme indicato.

(a) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) - A \cap B \cap C;$
 $A \cup B - C;$
 $(A \cap B) \cup (C \cap B)$

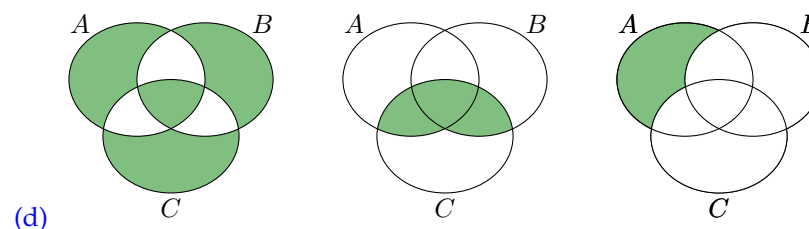
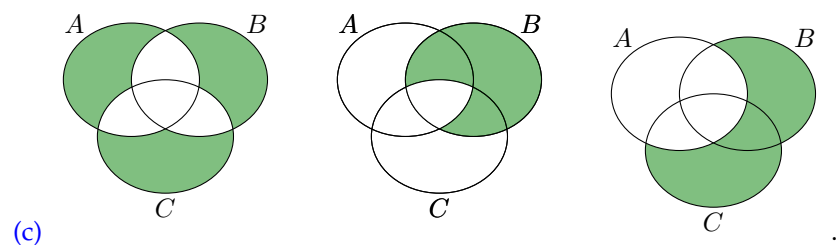
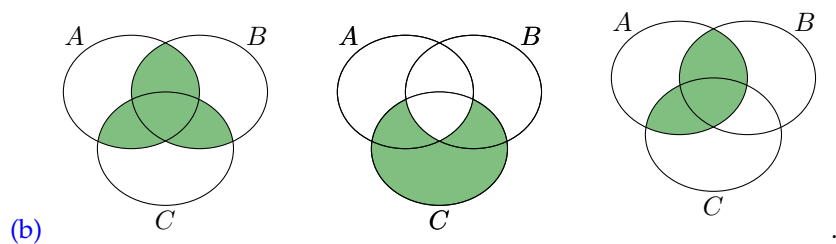
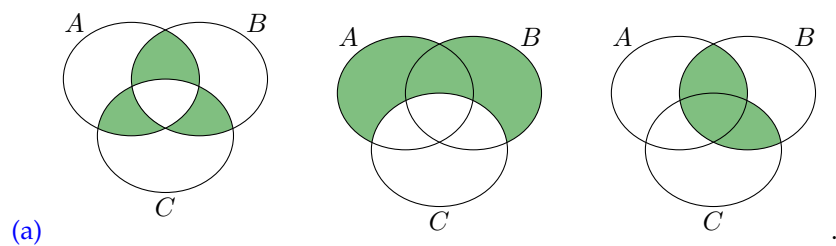
(b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C);$
 $C - (A \cap B \cap C);$
 $(C \cap A) \cup (B \cap A)$

(c) $(A \cup B \cup C) - (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B);$
 $B - (A \cap B \cap C);$
 $B \cup C - A$

(d) $[(A \cup B \cup C) - (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B)] \cup (A \cap B \cap C);$
 $(B \cap C) \cup (A \cap C);$
 $A - (B \cup C)$

Spiegazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti



Problema: IN0007 - Insiemistica

Testo [IN0007] [1★ 2🕒 1📖] Dati gli insiemi indicati A B C , rappresentati da tre cerchi ognuno dei quali interseca gli altri due, indica quale indica colorandola, a quale regione del piano essa corrisponde.

(a) $A \cap B \cap C$; $C \cup A - B$; $B \cap C - A$

(b) $(A \cap C) \cup B$; $B \cap C$; $A \cap C - B$

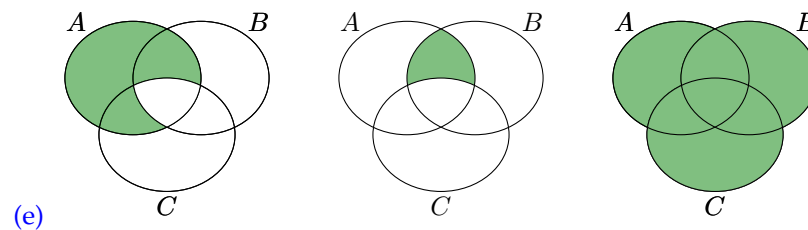
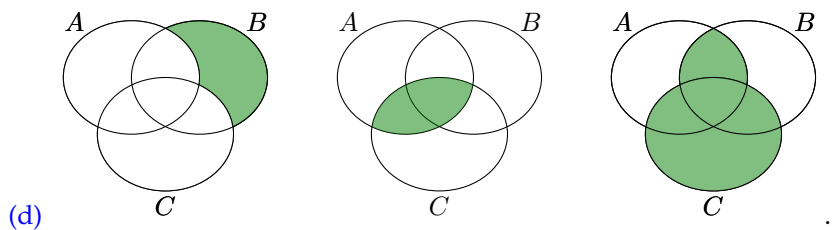
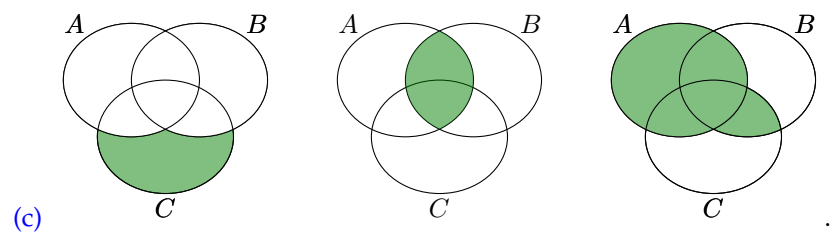
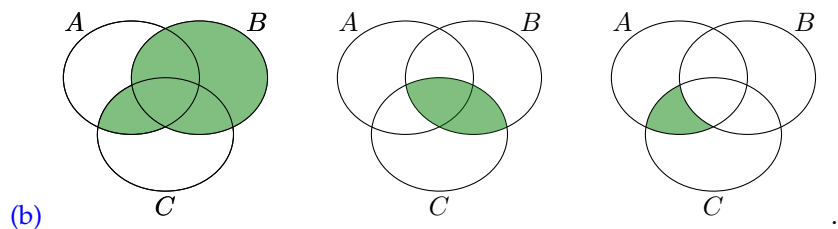
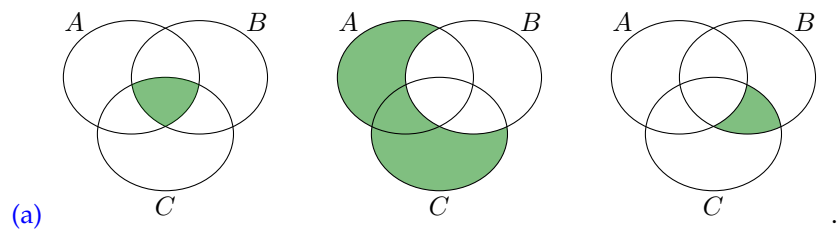
(c) $C - (A \cup B)$; $A \cap B$; $(B \cap C) \cup A$

(d) $B - (A \cup C)$; $A \cap C$; $(A \cap B) \cup C$

(e) $A - (A \cap B \cap C)$; $A \cap B - C$; $A \cap B \cap C$

Spiegazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti



1.2 operazioni sugli insiemi numerici

Problema: IN0002 - Insiemistica

Testo [IN0002] [2★ 2🕒 1📖] Indica, motivando la risposta, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) (a) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists! y \in \mathbb{Z} : x^3 = y$

(b) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{Q} : \sqrt{x} = y$

(c) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{N} : x^2 = y$

(d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! y \in \mathbb{R} : y^2 = x$

(b) (a) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists! y \in \mathbb{N} : x^3 = y$

(b) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{R} : \sqrt{x} = y$

(c) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{N} : x^4 = y$

(d) $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{N}, x < y$

(c) (a) $\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{Q} : \frac{x}{2} = y$

(b) $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} : x \leq y$

(c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! y \in \mathbb{R} : e^y = x$

(d) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2 = 3$

(d) (a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$

(b) $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{Z} : x + y \in \mathbb{N}$

(c) $\forall x \in \mathbb{Q} \quad \exists! y \in \mathbb{R} : y^3 = x$

(d) $\exists x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{Z} : x^2 - 1 = y^2$

Spiegazione In questi esercizi, per indicare se una certa affermazione è vera o falsa è necessario in primo luogo capirla, sapendo tradurre in concetti il linguaggio matematico proposto.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $[V, F, V, F]$.

(b) $[F, E, V, V]$.

(c) (a) **V**. Dato un qualsiasi intero x , il rapporto $\frac{x}{2}$ è sempre un numero razionale y , per definizione di $\mathbb{Q}$ come insieme di frazioni tra interi.

(b) **V**. L'affermazione è vera. Esiste $x = 0$ (o $x = 1$ se $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$) che è il minimo, quindi $x \leq y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$.

(c) **F**. L'equazione $e^y = x$ non ha soluzioni reali y per $x \leq 0$, dato che e^y è sempre strettamente positivo. Il quantificatore universale $\forall x \in \mathbb{R}$ rende l'affermazione falsa.

(d) **F**. I quadrati di interi sono $0, 1, 4, 9, \dots$. La somma di due di essi può essere $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2, 0 + 4 = 4, 1 + 4 = 5$, ecc. Ma non è possibile ottenere 3.

(d) (a) **F**. L'equazione $x \cdot y = 1$ implica che $y = 1/x$. Questa soluzione reale y non esiste quando $x = 0$, poiché la divisione per zero non è definita.

(b) **F**. Per ogni $x \in \mathbb{N}$, scegliendo un intero y sufficientemente negativo, ad esempio $y = -x - 1$ (che è in $\mathbb{Z}$), la somma $x + y = -1$, che non appartiene all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ (assumendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$).

(c) **V**. Per ogni numero razionale x , esiste sempre una e una sola radice cubica reale y tale che $y^3 = x$. La funzione radice cubica ($y = \sqrt[3]{x}$) è definita in modo univoco per tutti i numeri reali.

(d) **F**. Si tratta di trovare due interi la cui differenza dei quadrati sia 1. Ad esempio, scegliendo $x = 2$, si ha $3 = y^2$. Non esiste un numero intero che elevato al quadrato dia 3.

Problema: IN0003 - Insiemistica

Testo [IN0003] [1½★ 2🕒 1📖] Sono dati gli insiemi A, B, C. Calcola; $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$.

(a) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : -6 < x \leq -1\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 2\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : -8 \leq x \leq -4 \vee 0 \leq x \leq 3\}$

(b) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 4\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee x > 3\}$

(c) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : x < -4 \vee x \geq 0\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 3\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x > 2\}$

(d) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : -5 < x \leq 2\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 4\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \vee x > 5\}$

(e) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 5\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 7\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 6\}$

(f) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x < -2 \vee x \geq 4\}$

(g) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : x < -5\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 0\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq -4 \vee x \geq 2\}$

(h) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 5\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \vee x > 4\}$

(i) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : x < 3\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x \geq 5\}$

(j) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 2\}$

$B = \{\forall x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$

$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \vee x \geq 3\}$

Spiegazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) (a) $A \cup B \cup C = [-8, 3]$ o in notazione a intervalli: $[-8, 3]$ (Infatti $A \cup B = (-6, 2)$; l'unione con C riempie gli estremi e va fino a 3)
- (b) $A \cap B \cap C = \emptyset$ (Insieme vuoto) (Infatti $A \cap B = [-3, -1]$, che non interseca C in $[-8, -4] \cup [0, 3]$)
- (c) $(A \cup B) \cap C = (-6, 2) \cap ([-8, -4] \cup [0, 3]) = (-6, -4] \cup [0, 2)$
- (d) $A \cup (B \cap C) = A \cup ([0, 2)) = (-6, -1] \cup [0, 2)$ o in notazione a intervalli: $(-6, -1] \cup [0, 2)$

- (b) (a) $A \cup B \cup C = \mathbb{R}$
- (b) $A \cap B \cap C = \emptyset$ (Insieme vuoto)
- (c) $(A \cup B) \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < -2 \vee 3 < x \leq 4\}$ o in notazione a intervalli: $[-3, -2) \cup (3, 4]$
- (d) $A \cup (B \cap C) = \{\forall x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1 \vee 3 < x \leq 4\}$ o in notazione a intervalli: $[-3, 1] \cup (3, 4]$

- (c) (a) $A \cup B \cup C = \mathbb{R}$
- (b) $A \cap B \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$ o in notazione a intervalli: $(2, 3)$
- (c) $(A \cup B) \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ o in notazione a intervalli: $(2, +\infty)$
- (d) $A \cup (B \cap C) = \{\forall x \in \mathbb{R} : x < -4 \vee x \geq 0\}$ o in notazione a intervalli: $(-\infty, -4) \cup [0, +\infty)$

- (d) (a) $A \cup B \cup C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x < 4 \vee x > 5\}$ o in notazione a intervalli: $(-\infty, 4) \cup (5, +\infty)$

- (b) $A \cap B \cap C = \{1\}$ (Insieme contenente solo l'elemento 1)

- (c) $(A \cup B) \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : -5 < x \leq 1\}$ o in notazione a intervalli: $(-5, 1]$

- (d) $A \cup (B \cap C) = \{\forall x \in \mathbb{R} : -5 < x \leq 2\}$ o in notazione a intervalli: $(-5, 2]$

- (e) (a) $A \cup B \cup C = [0, 7]$

- (b) $A \cap B \cap C = (3, 5)$ o in notazione a intervalli: $(3, 5)$

- (c) $(A \cup B) \cap C = [1, 7] \cap [0, 6) = [1, 6)$ o in notazione a intervalli: $[1, 6)$

- (d) $A \cup (B \cap C) = [1, 5) \cup (3, 6) = [1, 6)$ o in notazione a intervalli: $[1, 6)$

- (f) (a) $A \cup B \cup C = \mathbb{R}$

- (b) $A \cap B \cap C = \emptyset$ (Insieme vuoto) (Infatti $A \cap B = (0, 1]$, che è disgiunto da C)

- (c) $(A \cup B) \cap C = \mathbb{R} \cap C = C$ o in notazione a intervalli: $(-\infty, -2) \cup [4, +\infty)$

- (d) $A \cup (B \cap C) = (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ o in notazione a intervalli: $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$

- (g) (a) $A \cup B \cup C = (-\infty, -4] \cup [-3, 0] \cup [2, +\infty)$ o in notazione a intervalli: $(-\infty, -4] \cup [-3, 0] \cup [2, +\infty)$

- (b) $A \cap B \cap C = \emptyset$ (Insieme vuoto) (Infatti $A \cap B = \emptyset$)

- (c) $(A \cup B) \cap C = (-\infty, -5)$

(d) $A \cup (B \cap C) = (-\infty, -5)$

.

(h) (a) $A \cup B \cup C = (-\infty, 0] \cup (-1, 5] \cup (4, +\infty) = (-\infty, 5] \cup (4, +\infty) = (-\infty, 5] \cup (4, +\infty)$ è errato; La correttezza è: $(-\infty, 0] \cup (-1, 5] = (-\infty, 5]$. La C era già parzialmente inclusa. Dunque: $(-\infty, 5]$

(b) $A \cap B \cap C = \emptyset$ (Insieme vuoto) (Infatti $A \cap B = [2, 3]$, che non ha elementi in comune con C)

(c) $(A \cup B) \cap C = ((-1, 5] \cap ((-\infty, 0] \cup (4, +\infty))) = ((-1, 5] \cap (-\infty, 0]) \cup ((-1, 5] \cap (4, +\infty)) = (-1, 0] \cup (4, 5]$

(d) $A \cup (B \cap C) = (-1, 3) \cup (4, 5]$ o in notazione a intervalli: $(-1, 3) \cup (4, 5]$

.

(i) (a) $A \cup B \cup C = \mathbb{R}$ (Infatti $A \cup B = \mathbb{R}$, quindi l'unione con C è $\mathbb{R}$)

(b) $A \cap B \cap C = ([-1, 3]) \cap ((-\infty, 0] \cup [5, +\infty)) = [-1, 0]$ o in notazione a intervalli: $[-1, 0]$

(c) $(A \cup B) \cap C = \mathbb{R} \cap C = C$ o in notazione a intervalli: $(-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$

(d) $A \cup (B \cap C) = [-1, +\infty) \cup ((-\infty, 0]) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

.

(j) (a) $A \cup B \cup C = (-\infty, 4)$ o in notazione a intervalli: $(-\infty, 4)$

(b) $A \cap B \cap C = \emptyset$ (Insieme vuoto) (Infatti $A \cap B = (1, 2]$, che non ha intersezioni con C)

(c) $(A \cup B) \cap C = (0, 4) \cap ((-\infty, 1] \cup [3, +\infty)) = (0, 1] \cup [3, 4)$

(d) $A \cup (B \cap C) = (0, 2] \cup [3, 4)$ o in notazione a intervalli: $(0, 2] \cup [3, 4)$

.

Problema: IN0012 - Operazioni tra insiemi numerici utilizzando uno schema per rappresentarli.

Testo [IN0012] [1★ 2🕒 1📖] Sono dati gli insiemi A, B, C. Calcola: $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$. Presta attenzione alla simbologia $< \leq > \geq$

(a) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : -7 < x \leq 1\}$
 $B = \{\forall x \in \mathbb{R} : -4 \leq x < 2\}$
 $C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \geq -4\}$

(b) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : -7 < x \leq 1\}$
 $B = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq -4 \vee x > 2\}$
 $C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$

(c) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 10\}$
 $B = \{\forall x \in \mathbb{R} : 5 < x < 15\}$
 $C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 8\}$

(d) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x > 5\}$
 $B = \{\forall x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 6\}$

$$C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$$

(e) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : -5 < x < 5\}$
 $B = \{\forall x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 7\}$
 $C = \{\forall x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 4\}$

(f) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$
 $B = \{\forall x \in \mathbb{R} : x > -2\}$
 $C = \{\forall x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 2\}$

(g) $A = \{\forall x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 8\}$
 $B = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$
 $C = \{\forall x \in \mathbb{R} : 5 \leq x < 10\}$

Spiegazione Rappresenta gli insiemi numerici in un diagramma e successivamente mostra i risultati delle due operazioni effettuate.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $A \cup B \cup C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x > -7\}$

$$A \cap B \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 1\}.$$

(b) $A \cup B \cup C = \mathbb{R}$

$$A \cap B \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : -7 < x \leq -4\}.$$

(c) $A \cup B \cup C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$$A \cap B \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : 8 \leq x \leq 10\}.$$

(d) $A \cup B \cup C = \mathbb{R}$

$$A \cap B \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 0\}.$$

(e) $A \cup B \cup C = \{\forall x \in \mathbb{R} : -5 < x < 7\}$

$$A \cap B \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 4\}.$$

(f) $A \cup B \cup C = \mathbb{R}$

$$A \cap B \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq -1\}.$$

(g) $A \cup B \cup C = \{\forall x \in \mathbb{R} : x > 1\}$

$$A \cap B \cap C = \{\forall x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 8\}.$$

Problema: IN0008 - Insiemistica

Testo [IN0008] [2★ 2🕒 1📖] Risolvi i seguenti problemi disegnando il corrispondente diagramma di Eulero

- (a) 30 amici devono esprimere una preferenza tra tre opzioni A , B e C . 5 scelgono tutte e tre le opzioni; 6 solo l'opzione A , 3 solo la B , 2 solo la C ; 1 ha scelto esclusivamente l'opzione A e la B , 3 hanno scelto esclusivamente la A e la C . Quanti hanno scelto sia B che C ? Quale scelta ha raccolto più preferenze?
- (b) Uno studio su un campione di 210 atleti, riguardante il nuoto (N), la maratona (M) ed il ciclismo (C), indica che 25 praticano solo nuoto (N), 35 solo M , 67 solo uno dei tre sport, 63 solo due di essi (di cui 14 praticano N e C , e 19 praticano M e C), e 150 praticano almeno uno sport.
- Quanti praticano tutti gli sport?
 - Quanti praticano solo ciclismo?
 - Quanti non praticano alcuno sport?
 - Quanti praticano più di uno sport?
- (c) In una scuola di 200 studenti, 100 seguono il corso di Matematica, 80 quello di Fisica e 70 quello di Chimica. Si sa che 30 seguono Matematica e Fisica, 25 Matematica e Chimica, 20 Fisica e Chimica. Se 10 studenti seguono tutti e tre i corsi, quanti studenti non seguono nessuno dei tre?
- (d) Un'agenzia turistica ha intervistato 50 clienti. 20 parlano spagnolo (S), 25 parlano francese (F) e 18 parlano tedesco (T). 8 parlano spagnolo e francese, 6 spagnolo e tedesco, 7 francese e tedesco. Se 2 clienti non parlano nessuna delle tre lingue, quanti parlano tutte e tre le lingue?
- (e) Un'indagine su 80 bambini ha rivelato le seguenti preferenze per gli animali domestici: 30 hanno solo cani, 20 solo gatti, 10 solo uccelli. Inoltre, 5 hanno solo cani e gatti, 4 solo cani e uccelli, 3 solo gatti e uccelli. Se 2 bambini hanno tutti e tre gli animali, quanti bambini non hanno nessuno di questi animali?
- (f) Un club musicale ha membri a cui piace il Rock (R), il Pop (P) e il Jazz (J). 50 membri amano il Rock, 45 il Pop e 40 il Jazz. 15 amano Rock e Pop, 10 Rock e Jazz, 12 Pop e Jazz. 5 membri amano tutti e tre i generi. Se 8 membri non amano nessuno dei tre, quanti membri ha il club in totale?
- (g) Un'azienda ha 145 dipendenti. 70 usano l'applicazione A, 80 usano l'applicazione B e 75 usano l'applicazione C. 30 usano A e B, 25 usano A e C, 35 usano B e C. Se 10 dipendenti usano tutte e tre le applicazioni, quanti dipendenti usano solo l'applicazione A?
- (h) In un gruppo di 100 lettori, 60 leggono il quotidiano A, 50 il B e 40 il C. 30 lettori leggono *esattamente* due quotidiani e 5 li leggono tutti e tre. Se 10 persone non leggono alcun quotidiano, quante persone leggono *esattamente* un quotidiano?
- (i) Un sondaggio su 200 persone ha analizzato l'uso dei media. 120 guardano la TV (T), 80 leggono i giornali (G) e 70 ascoltano la radio (R). 40 guardano TV e leggono giornali, 30 guardano TV e ascoltano radio, 20 leggono giornali e ascoltano radio. 10 persone usano tutti e tre i media. Quante persone ascoltano solo la radio? Quante non usano nessuno dei tre media?

Spiegazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Sia $N_{ABC} = 5$ il numero di chi ha scelto tutto.

- Calcoliamo chi ha scelto esclusivamente B e C (x):

$$30 = 6 + 3 + 2 + 1 + 3 + x + 5 \Rightarrow 30 = 20 + x \Rightarrow x = 10$$

- Quanti hanno scelto sia B che C (inclusi quelli che hanno scelto A): $10 + 5 = 15$.
- Totale per A : $6 + 1 + 3 + 5 = 15$.
- Totale per B : $3 + 1 + 10 + 5 = 19$.
- Totale per C : $2 + 3 + 10 + 5 = 20$.

L'opzione C ha più preferenze. .

- (b) • **Solo Ciclismo:** Sappiamo che $N_{solo} + M_{solo} + C_{solo} = 67$. Quindi $25 + 35 + C_{solo} = 67 \Rightarrow C_{solo} = 7$.
- **Tutti gli sport:** L'unione (150) è somma di chi ne fa 1, chi ne fa 2 e chi ne fa 3. $150 = 67 + 63 + x \Rightarrow x = 20$.
- **Nessuno sport:** Totale campione - Unione = $210 - 150 = 60$.
- **Più di uno sport:** Sono quelli che ne fanno 2 oppure 3: $63 + 20 = 83$.

- (c) • Gli studenti che seguono unicamente Matematica e Fisica sono $N_{MF} = 30 - 10 = 20$.
- Gli studenti che seguono unicamente Matematica e Chimica sono $N_{MC} = 25 - 10 = 15$.

- Gli studenti che seguono unicamente Fisica e Chimica sono $N_{FC} = 20 - 10 = 10$.
- Gli studenti che seguono unicamente Matematica sono $N_M = 100 - 20 - 15 - 10 = 55$.
- Gli studenti che seguono unicamente Chimica sono $N_C = 70 - 15 - 10 - 10 = 35$.
- Gli studenti che seguono unicamente Fisica sono $N_F = 80 - 20 - 10 - 10 = 40$.
- Gli studenti che non seguono sono $N_x = 200 - (10 + 20 + 15 + 10 + 55 + 40 + 35) = 15$.

- (d) L'unione degli insiemi (clienti che parlano almeno una lingua) è $50 - 2 = 48$. Appliciamo il principio di inclusione-esclusione:

$$|S \cup F \cup T| = |S| + |F| + |T| - (|S \cap F| + |S \cap T| + |F \cap T|) + |S \cap F \cap T|$$

$$48 = 20 + 25 + 18 - (8 + 6 + 7) + x$$

$$48 = 63 - 21 + x \Rightarrow 48 = 42 + x \Rightarrow x = 6$$

- (e) Calcoliamo quanti bambini hanno almeno un animale sommando tutte le porzioni disgiunte del diagramma:

$$\text{Totale Animali} = 30(\text{solo } C) + 20(\text{solo } G) + 10(\text{solo } U) + 5 + 4 + 3 + 2(\text{tutti})$$

$$\text{Totale Animali} = 74$$

I bambini senza animali sono $80 - 74 = 6$. .

- (f) Calcoliamo l'unione (membri a cui piace almeno un genere) con il principio di inclusione-esclusione:

$$|R \cup P \cup J| = 50 + 45 + 40 - (15 + 10 + 12) + 5$$

$$|R \cup P \cup J| = 135 - 37 + 5 = 103$$

Il totale dei membri è l'unione più quelli a cui non piace nulla:

$$Tot = 103 + 8 = 111$$

- (g) Sapendo che 10 utilizzano tre applicazioni, ad utilizzare esattamente le due applicazioni A e B sono in 20; ad utilizzare esattamente le due applicazioni A e C sono in 15; ad utilizzare esattamente le due applicazioni C e B sono in 25; Per trovare chi usa solo A , sottraiamo dal totale di A un numero di persone pari a $10 + 15 + 20$ che utilizzano A ed anche altre applicazioni. Otteniamo $A_{solo} = 25$.

$$A_{solo} = |A| - (|A \cap B|_{solo} + |A \cap C|_{solo} + |A \cap B \cap C|)$$

- Solo A e B: $30 - 10 = 20$.
- Solo A e C: $25 - 10 = 15$.

$$A_{solo} = 70 - 20 - 15 - 10 = 25$$

- (h) Il numero di persone che leggono almeno un quotidiano è $100 - 10 = 90$. Questa unione è composta dalla somma disgiunta di chi ne legge esattamente 1, esattamente 2 ed esattamente 3.

$$90 = (\text{esattamente 1}) + (\text{esattamente 2}) + (\text{tutti e 3})$$

$$90 = x + 30 + 5$$

$$x = 90 - 35 = 55$$

- (i)
- **Solo Radio:** Calcoliamo le intersezioni esclusive: Radio e TV (esclusi giornali) = $30 - 10 = 20$. Radio e Giornali (esclusa TV) = $20 - 10 = 10$. $R_{solo} = 70 - 20 - 10 - 10 = 30$.
 - **Nessuno:** Calcoliamo l'unione: $Unione = 120 + 80 + 70 - (40 + 30 + 20) + 10 = 270 - 90 + 10 = 190$. $Nessuno = 200 - 190 = 10$.

Problema: *IN0009* - Insiemistica

Testo [\[IN0009\]](#) [1★ 1½🕒 1📖] Risolvi i seguenti problemi disegnando il corrispondente diagramma di Eulero

- | | |
|---|---|
| <p>(a) In un sondaggio su 100 persone, 60 bevono caffè e 50 bevono tè. Se 20 persone bevono sia caffè che tè, quante persone non bevono né caffè né tè?</p> <p>(b) In una classe di 40 studenti, 25 giocano a calcio e 18 giocano a basket. Se ogni studente gioca almeno uno dei due sport, quanti studenti li praticano</p> | <p>entrambi?</p> <p>(c) Su 60 studenti intervistati, 30 studiano francese e 25 studiano spagnolo. Se 10 studenti non studiano nessuna delle due lingue, quanti studenti studiano sia francese che spagnolo?</p> |
|---|---|

Spiegazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) .

(b) .

(c) .

Problema: IN0010 - Insiemistica

Testo [IN0010] [1½★ 1½🕒 1📖] Dati gli insiemi indicati, riscrivili elencando tutti i loro elementi e rispondi alle domande date.

- | | |
|---|--|
| <p>(a) Sono dati $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 < x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2n - 1 \text{ con } n \in \{0, 1, 2\}\}$.
Calcola $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\overline{B}_A$ (il complementare di B rispetto ad A), l'insieme delle parti di B</p> | <p>(b) Sono dati $A = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x = n + 1 \text{ con } n \in \{1, 3, 4\}\}$.
Calcola $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\overline{B}_A$ (il complementare di B rispetto ad A), l'insieme delle parti di B</p> |
|---|--|

Spiegazione Esegui le operazioni indicate e verifica di conseguenza la veridicità dell'affermazione proposta.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) .

(b) .

Problema: *IN0011* - Insiemistica

Testo [\[IN0011\]](#) [2½★ 1½🕒 1📖] Verifica o smentisci le seguenti affermazioni sugli insiemi generici indicati. Puoi avvalerti di un esempio per sostenere le tue affermazioni.

(a) $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset;$ $(A - B) \subset (A \cup B)$

(b) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset;$ $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$

(c) $(A - B) \cup B = A \cup B;$ $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(d) $B \times (A \cup C) = (A \times B) \cup (B \times C);$ $(A - B) \cup (B - A) = A \cap B$

Spiegazione Disegnando in un opportuno diagramma le affermazioni da verificare o argomentando in modo opportuno, è possibile dimostrare la loro veridicità o meno delle affermazioni date.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) $(A - B)$ non contiene elementi di B , mentre tutti gli elementi di $(A \cap B)$ appartengono a B ; ne consegue che l'intersezione di questi due insiemi deve essere nulla.

L'insieme $(A - B)$ contiene parte degli elementi di A , mentre l'insieme $(A \cup B)$ contiene tutti gli elementi di A ; è evidente che il primo insieme è incluso nel secondo..

- (b) $(A - B)$ non contiene elementi di B , mentre $(B - A)$ contiene solo elementi di B ; ne consegue che la loro intersezione è l'insieme vuoto.

Questa seconda affermazione è falsa perché in nessuno dei due insiemi $(A - B)$ e $(B - A)$ sono contenuti gli elementi che appartengono contemporaneamente ad entrambi gli insiemi; tali elementi sono contenuti però nell'insieme $A \cup B$.

- (c) Se dagli elementi di A tolgo gli elementi di B e poi unisco B ottengo un insieme con tutti gli elementi di A e gli elementi di B , cioè proprio $A \cup B$

Questa seconda affermazione è corretta in quanto l'operazione di prodotto cartesiano gode della proprietà distributiva rispetto all'unione..

- (d) Tutti gli elementi dell'insieme di sinistra sono coppie che hanno come primo elemento un elemento di B , mentre questo non accade a destra essendoci l'insieme $(A \times B)$

Questa seconda affermazione è falsa perché in nessuno dei due insiemi $(A - B)$ e $(B - A)$ sono contenuti gli elementi che appartengono contemporaneamente ad entrambi gli insiemi; tali elementi sono contenuti però nell'insieme $A \cap B$.

Parte II

Algebra