

4.1 Equazioni di primo grado

Problema: *EQ0051* - Equazioni di primo grado semplici.

Testo [\[EQ0051\]](#) [1 ★ 2 ⌚ 1 📖] Risolvi la seguente equazione

(a) $\frac{1}{3}(15 - 4x) - \frac{2 - 3x}{6} = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$

Spiegazione Svolgi i calcoli e arriva alla forma base dell'equazione per poterla infine risolvere.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) L'equazione di partenza è:

$$\frac{1}{3}(15 - 4x) - \frac{2 - 3x}{6} = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

Troviamo il minimo comune multiplo (m.c.m.) dei denominatori (3, 6, 2), che è

6. Moltiplichiamo entrambi i membri per 6 per eliminare le frazioni:

$$6 \cdot \left[\frac{1}{3}(15 - 4x) - \frac{2 - 3x}{6} \right] = 6 \cdot \left[\frac{1}{2}(x + 3) + 2 \right]$$

$$2(15 - 4x) - (2 - 3x) = 3(x + 3) + 12$$

Svolgiamo le moltiplicazioni e facciamo attenzione al cambio di segno davanti alla parentesi $(2 - 3x)$:

$$30 - 8x - 2 + 3x = 3x + 9 + 12$$

Sommiamo i termini simili in ciascun membro:

$$(30 - 2) + (-8x + 3x) = 3x + (9 + 12)$$

$$28 - 5x = 3x + 21$$

Portiamo le x a sinistra e i termini noti a destra:

$$-5x - 3x = 21 - 28$$

$$-8x = -7$$

Dividiamo per -8 per trovare la soluzione finale:

$$x = \frac{-7}{-8}$$

$$x = \frac{7}{8}$$

Problema: EQ0030 - Equazioni di primo grado.**Testo** [EQ0030] [1½★ 2½🕒 1📖] Risolvi la seguente equazione

(a)
$$\frac{(3-2x)(2-3x)}{6} = \frac{3x^2+7}{3} - \frac{3}{2}(4-3x) + \frac{2(10-x)}{6}$$

(b)
$$\frac{3}{5}(x-1)(2x-3) + \frac{x-1}{7} - \frac{1}{5}(x-3)(2x-3) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{7}$$

(c)
$$\frac{(x+4)(2x-3)}{2} - x^2 = \frac{x-2}{4} + 1$$

(d)
$$\frac{(3x+1)(x-2)}{3} - (x+3)(x-1) = \frac{x-5}{2}$$

(e)
$$\frac{(2x-5)(3x+4)}{2} - 3x^2 = \frac{x+2}{6} - 7$$

(f)
$$\frac{(4x-3)(x+2)}{2} - 2x^2 = \frac{x}{3} - \frac{5}{6}$$

(g)
$$(2x+1)(3x-2) - 6(x-4)(x+2) + \frac{(5x+2)(x-4)}{10} - \frac{x^2}{2} = \frac{3x-1}{5} + 13 - x$$

(h)
$$\frac{(x+2)(x-3)}{3} - \frac{x^2-1}{3} = \frac{x-5}{2}$$

(i)
$$\frac{5x-2}{6} + \frac{(x+7)(4x-1)}{8} - \frac{(2x+3)(2x-4)}{8} = 1 + \frac{(6x+1)(2x-3)}{4} - 3x^2$$

(j)
$$\frac{(4x-1)(x+2)}{4} - x^2 = \frac{x-3}{2}$$

(k)
$$\frac{(3x-4)(2x+5)}{3} + 2x - \frac{(3x-1)(4x+5)}{6} = \frac{1}{3} + \frac{x-1}{2}$$

(l)
$$\frac{2x^2+20+(x-5)(x+8)}{2} - \frac{(2x+1)(x-4)}{4} = \frac{x+1}{8} + \frac{(2x+1)(x+3)}{2}$$

(m)
$$\frac{(x-1)(x+2)}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{x-3}{4}$$

(n)
$$\frac{(2x+1)(x-3)}{2} - x^2 = \frac{x-7}{4}$$

(o)
$$\frac{(x-1)(6x-1)}{3} = 2(x+1)(x-2) + \frac{1}{3}$$

(p)
$$\frac{(4x+3)(3x-2)}{6} - 2x^2 = \frac{x-4}{3}$$

(q)
$$\frac{(x+10)(x-2)}{2} - \frac{x^2}{2} = 3x+5$$

(r)
$$\frac{(2x-1)(3x+1)}{5} - \frac{6x^2-1}{5} = x-2$$

(s)
$$\frac{(5x-1)(x+3)}{5} = x^2 + \frac{x-1}{2}$$

(t)
$$\frac{(x-4)(x-2)}{3} - \frac{(x-6)(x-1)}{3} = x$$

(u)
$$\frac{(2x+5)(4x-1)}{4} - 2x^2 = \frac{17x}{4} + 1$$

(v)
$$\frac{(5x+1)(x-2)}{5} - x^2 = \frac{2x-3}{10}$$

(w)
$$\frac{(x-3)(2x+1)}{4} + (3x-1)(x+4) - 3(x-1)(x+2) = \frac{(x-5)(x+2)}{2} + 1$$

(x)
$$\frac{(2x+1)(2x+3)}{4} - x^2 = 2x + \frac{3}{4}$$

(y)
$$\frac{(x+1)(x+5)}{2} - \frac{(x-2)(x-3)}{2} = 1$$

(z)
$$\frac{(10x+1)(x-2)}{5} - 2x^2 = \frac{(x-4)(x+1)}{5} - \frac{x^2}{5}$$

Spiegazione Svolgi i calcoli e arriva alla forma base dell'equazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

$$(a) \frac{(3-2x)(2-3x)}{6} = \frac{3x^2+7}{3} - \frac{3}{2}(4-3x) + \frac{2(10-x)}{6}$$

Per rendere più chiaro il senso del passaggio successivo, riscrivo il testo in questo modo:

$$\frac{(3-2x)(2-3x)}{6} = \frac{3x^2+7}{3} - \frac{3(4-3x)}{2} + \frac{2(10-x)}{6}$$

Appare chiaro che posso rendere tutti i denominatori uguali portandoli al minimo comune multiplo. Contemporaneamente posso anche svolgere alcuni calcoli

$$\frac{(6-13x+6x^2)}{6} = \frac{2(3x^2+7)}{6} - \frac{9(4-3x)}{6} + \frac{2(10-x)}{6}$$

Tutte le frazioni posso essere sommate

$$\frac{(6-13x+6x^2)}{6} = \frac{6x^2+14-36+27x+20-2x}{6}$$

Adesso posso moltiplicare per i denominatori in modo da farli andare via e svolgere i calcoli

$$6-13x+6x^2 = 6x^2+14-36+27x+20-2x$$

Semplifico gli x^2 e porto tutte le x dallo stesso lato

$$-13x-27x+2x = 14-36+20-6$$

$$-38x = -8$$

$$x = \frac{4}{19}.$$

$$(b) x = -\frac{10}{37}.$$

$$(c) x = \frac{26}{9}.$$

$$(d) x = \frac{29}{25}.$$

$$(e) x = -\frac{10}{11}.$$

$$(f) x = 1.$$

$$(g) x = -\frac{27}{8}.$$

$$(h) x = 1.$$

$$(i) x = -\frac{1}{203}.$$

$$(j) x = -\frac{4}{5}.$$

$$(k) x = \frac{17}{6}.$$

$$(l) x = -\frac{85}{3}.$$

$$(m) x = 1.$$

$$(n) x = \frac{1}{11}.$$

(o) $x = 12.$

(p) $x = 2.$

(q) $x = 15.$

(r) $x = \frac{5}{3}.$

(s) $x = \frac{1}{23}.$

(t) $x = 1.$

(u) $x = 9.$

(v) $x = -\frac{1}{20}.$

(w) $x = -\frac{7}{11}.$

(x) Indeterminata.

(y) $x = \frac{3}{11}.$

(z) $x = \frac{1}{8}.$

Problema: EQ0031 - Equazioni di primo grado**Testo** [EQ0031] [1½★ 2🕒 1📖] Risolvi la seguente equazione

$$(a) \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(2x + \frac{1}{3}\right) \left(2x - \frac{1}{3}\right) + 5x \left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{16} = \left(x + \frac{1}{3}\right) \left(2x - \frac{5}{2}\right)$$

$$(b) \frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(x-1)(x+1)}{3} = \frac{1}{6}x^2 + 3x - \frac{1}{3}$$

$$(c) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{2x-3}{4} = x^2 - \frac{1}{2}(x+1)$$

$$(d) \frac{2}{3}(x-3)^2 - \frac{2}{3}x(x-4) = \frac{x+5}{6}$$

$$(e) (x-2)^3 - x(x-3)^2 = \frac{x-1}{2} - \frac{15}{2}$$

$$(f) \frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(3x+1)^2}{9} = \frac{x-5}{18}$$

$$(g) (x-1)(x^2+x+1) - (x-2)^3 = 6x(x-2) + 8$$

$$(h) \frac{(2x+3)(x-1)}{2} - \frac{x^2-5}{4} = \frac{3x^2+1}{4} - \frac{1}{2}x$$

$$(i) \frac{2}{3}(x-3)^2 - \frac{2}{3}(x-4)(x+4) = \frac{x-1}{2} + \frac{11}{3}$$

$$(j) \frac{1}{2}(x+4)(x-4) - \frac{(x-2)^2}{2} = \frac{x}{3} - 4$$

Spiegazione Svolgi i calcoli e arriva alla forma base dell'equazione utilizzando anche i prodotti notevoli

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Sviluppiamo i prodotti notevoli e semplifichiamo:

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) + \left(5x^2 - \frac{5}{4}x\right) - \frac{1}{16} &= 2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} \\ x^2 - \frac{1}{2}x - 4x^2 + \frac{1}{9} + 5x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{16} &= 2x^2 - \frac{11}{6}x - \frac{5}{6} \\ (1 - 4 + 5 - 2)x^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{4} + \frac{11}{6}\right)x &= -\frac{5}{6} - \frac{1}{9} \\ \frac{-6 - 15 + 22}{12}x = \frac{-15 - 2}{18} &\Rightarrow \frac{1}{12}x = -\frac{17}{18} \Rightarrow x = -\frac{34}{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{(x+2)^2}{2} - \frac{(x-1)(x+1)}{3} = \frac{1}{6}x^2 + 3x - \frac{1}{3}$$

Sviluppiamo il quadrato del binomio al primo numeratore e il prodotto somma per differenza al secondo:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{2} - \frac{x^2 - 1}{3} = \frac{1}{6}x^2 + 3x - \frac{1}{3}$$

Il minimo comune multiplo di tutti i denominatori è 6. Moltiplichiamo ogni termine per 6 per eliminare le frazioni:

$$6 \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{2} - 6 \cdot \frac{x^2 - 1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{6}x^2 + 6 \cdot 3x - 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$3(x^2 + 4x + 4) - 2(x^2 - 1) = x^2 + 18x - 2$$

Svolgiamo le moltiplicazioni facendo attenzione ai segni:

$$3x^2 + 12x + 12 - 2x^2 + 2 = x^2 + 18x - 2$$

Sommiamo i termini simili al primo membro ($3x^2 - 2x^2 = x^2$ e $12 + 2 = 14$):

$$x^2 + 12x + 14 = x^2 + 18x - 2$$

Sottraiamo x^2 da entrambi i membri (si cancellano) e portiamo i termini con la x a sinistra e i numeri a destra:

$$12x - 18x = -2 - 14$$

$$-6x = -16$$

Dividiamo entrambi i membri per -6 e semplifichiamo la frazione:

$$x = \frac{-16}{-6} = \frac{8}{3}$$

(c)

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{2x-3}{4} = x^2 - \frac{1}{2}(x+1)$$

Svolgiamo il prodotto notevole somma per differenza al primo membro e distribuiamo la moltiplicazione al secondo membro:

$$x^2 - \frac{1}{4} - \frac{2x-3}{4} = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

I termini x^2 presenti in entrambi i membri si annullano. Resta:

$$-\frac{1}{4} - \frac{2x-3}{4} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Il minimo comune multiplo dei denominatori è 4. Moltiplichiamo tutto per 4 per eliminare le frazioni:

$$-1 - (2x - 3) = 2(-x - 1)$$

Togliamo le parentesi cambiando i segni dove necessario:

$$-1 - 2x + 3 = -2x - 2$$

Sommiamo i termini noti al primo membro:

$$-2x + 2 = -2x - 2$$

Proviamo a isolare la x portando i termini con l'incognita a sinistra e i numeri a destra:

$$-2x + 2x = -2 - 2$$

$$0 = -4$$

Siamo giunti a un'uguaglianza palesemente falsa (contraddizione). .

(d)

$$\frac{2}{3}(x-3)^2 - \frac{2}{3}x(x-4) = \frac{x+5}{6}$$

Il minimo comune multiplo dei denominatori è 6. Moltiplichiamo l'intera equazione per 6.

$$4(x-3)^2 - 4x(x-4) = x+5$$

Sviluppiamo il quadrato del binomio ed eseguiamo le moltiplicazioni

$$4(x^2 - 6x + 9) - 4x^2 + 16x = x + 5$$

Eliminiamo le parentesi moltiplicando il 4 per il trinomio:

$$4x^2 - 24x + 36 - 4x^2 + 16x = x + 5$$

I termini quadratici $4x^2$ e $-4x^2$ si annullano. Sommiamo i termini con la x al primo membro:

$$-8x + 36 = x + 5$$

Portiamo tutti i termini con la x a sinistra e i termini noti a destra:

$$-8x - x = 5 - 36$$

$$-9x = -31$$

Dividiamo entrambi i membri per -9 . Il segno meno al numeratore e al denominatore si elide:

$$x = \frac{-31}{-9} = \frac{31}{9}$$

.

(e)

$$(x-2)^3 - x(x-3)^2 = \frac{x-1}{2} - \frac{15}{2}$$

Sviluppiamo il cubo del binomio e il quadrato del binomio

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - x(x^2 - 6x + 9) = \frac{x-1}{2} - \frac{15}{2}$$

Eseguiamo la moltiplicazione per $-x$ al primo membro e sommiamo i termini al numeratore del secondo membro

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 6x^2 - 9x = \frac{x-1}{2} - \frac{15}{2}$$

Semplifichiamo il primo membro: i termini x^3 e $-x^3$ si annullano, così come $-6x^2$ e $+6x^2$. Sommiamo i termini in x

$$3x - 8 = \frac{x-1}{2} - \frac{15}{2}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per 2 per eliminare la frazione:

$$2(3x - 8) = x - 1 - 15$$

$$6x - 16 = x - 16$$

Sottraiamo x e aggiungiamo 16 a entrambi i membri:

$$6x - x = -16 + 16$$

$$5x = 0$$

$$x = 0$$

.

(f)

$$\frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(3x+1)^2}{9} = \frac{x-5}{18}$$

Sviluppiamo i quadrati dei binomi ai numeratori:

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{4} - \frac{9x^2 + 6x + 1}{9} = \frac{x-5}{18}$$

Il minimo comune multiplo dei denominatori (4, 9, 18) è 36. Moltiplichiamo ogni termine per 36 per eliminare le frazioni:

$$9(4x^2 - 4x + 1) - 4(9x^2 + 6x + 1) = 2(x - 5)$$

Eseguiamo le moltiplicazioni. Prestiamo attenzione a cambiare i segni nel secondo blocco a causa del -4 :

$$36x^2 - 36x + 9 - 36x^2 - 24x - 4 = 2x - 10$$

I termini in x^2 si annullano. Sommiamo i termini con la x e i termini noti al primo membro:

$$-60x + 5 = 2x - 10$$

Portiamo i termini con la x a sinistra e i numeri a destra:

$$-60x - 2x = -10 - 5$$

$$-62x = -15$$

Dividiamo entrambi i membri per -62 . Meno diviso meno fa più:

$$x = \frac{-15}{-62} = \frac{15}{62}$$

.

(g)

$$(x-1)(x^2+x+1) - (x-2)^3 = 6x(x-2) + 8$$

Riconosciamo nel primo termine il prodotto notevole della differenza di cubi. Sviluppiamo inoltre il cubo del binomio e distribuiamo il prodotto a destra:

$$(x^3 - 1) - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 6x^2 - 12x + 8$$

Eliminiamo le parentesi facendo attenzione al segno meno davanti al cubo del binomio:

$$x^3 - 1 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 6x^2 - 12x + 8$$

Al primo membro i termini x^3 si cancellano. Sommiamo i termini noti restanti:

$$6x^2 - 12x + 7 = 6x^2 - 12x + 8$$

Sottraiamo $6x^2$ e aggiungiamo $12x$ ad entrambi i membri per isolare i termini noti. Notiamo che tutti i termini con l'incognita si elidono:

$$7 = 8$$

Poiché otteniamo un'uguaglianza falsa (contraddizione), l'equazione non ammette soluzioni..

(h)

$$\frac{(2x+3)(x-1)}{2} - \frac{x^2-5}{4} = \frac{3x^2+1}{4} - \frac{1}{2}x$$

Il minimo comune multiplo dei denominatori è 4. Moltiplichiamo tutti i termini per 4.

$$2(2x+3)(x-1) - (x^2-5) = (3x^2+1) - 2x$$

Eseguiamo prima la moltiplicazione tra le parentesi tonde e togliamo le parentesi ai termini singoli facendo attenzione al segno meno:

$$2(2x^2 + x - 3) - x^2 + 5 = 3x^2 + 1 - 2x$$

$$4x^2 + 2x - 6 - x^2 + 5 = 3x^2 - 2x + 1$$

Sommiamo i termini simili:

$$3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 - 2x + 1$$

I termini $3x^2$ si trovano in entrambi i membri e si annullano. Portiamo i termini con la x a sinistra e i numeri a destra:

$$2x + 2x = 1 + 1$$

$$4x = 2$$

Dividiamo entrambi i membri per 4 e semplifichiamo la frazione:

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(i)

$$\frac{2}{3}(x-3)^2 - \frac{2}{3}(x-4)(x+4) = \frac{x-1}{2} + \frac{11}{3}$$

Moltiplichiamo ogni termine dell'equazione per 6.

$$4(x-3)^2 - 4(x-4)(x+4) = 3(x-1) + 22$$

Sviluppiamo il quadrato del binomio e il prodotto somma per differenza

$$4(x^2 - 6x + 9) - 4(x^2 - 16) = 3x - 3 + 22$$

Eseguiamo le moltiplicazioni eliminando le parentesi:

$$4x^2 - 24x + 36 - 4x^2 + 64 = 3x + 19$$

I termini quadratici si annullano. Sommiamo i termini noti al primo membro.

$$-24x + 100 = 3x + 19$$

Portiamo i termini con la x a sinistra e i numeri a destra

$$-24x - 3x = 19 - 100$$

$$-27x = -81$$

Dividiamo entrambi i membri per -27 .

$$x = \frac{-81}{-27} = 3$$

.

(j)

$$\frac{1}{2}(x+4)(x-4) - \frac{(x-2)^2}{2} = \frac{x}{3} - 4$$

Moltiplichiamo ogni termine per 6.

$$3(x+4)(x-4) - 3(x-2)^2 = 2x - 24$$

Sviluppiamo il prodotto somma per differenza e il quadrato del binomio

$$3(x^2 - 16) - 3(x^2 - 4x + 4) = 2x - 24$$

Eseguiamo le moltiplicazioni facendo attenzione al segno meno davanti alla seconda parentesi.

$$3x^2 - 48 - 3x^2 + 12x - 12 = 2x - 24$$

I termini quadratici si annullano. Sommiamo i termini noti al primo membro

$$12x - 60 = 2x - 24$$

Portiamo i termini con la x a sinistra e i numeri a destra:

$$12x - 2x = -24 + 60$$

$$10x = 36$$

Dividiamo entrambi i membri per 10 e semplifichiamo la frazione

$$x = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

.

Problema: EQ0032 - Problemi di realtà con le equazioni di primo grado.

Testo [EQ0032] [1 ★ 2 📖 1 📖] Risolvi il seguente problema impostando la corrispondente equazione di primo grado.

- (a) Giulia ha deciso di iscriversi in palestra e sta valutando due diverse offerte nella sua città. Vuole capire dopo quanto tempo le due offerte si equivalgono economicamente. La Palestra A richiede una quota di iscrizione iniziale di 60€ e un canone mensile di 30€. La Palestra B non richiede alcuna iscrizione, ma il canone mensile è pari a 45€. Dopo quanti mesi la spesa totale sostenuta da Giulia per la *Palestra A* sarà uguale a quella della *Palestra B*?
- (b) Matteo sta costruendo una piccola libreria e ha comprato un'unica lunga asse di legno lunga 240 cm. Deve tagliarla in 3 parti per fare tre ripiani di lunghezze diverse, sapendo che il secondo ripiano deve essere lungo il doppio del primo, e che il terzo ripiano deve essere lungo 40 cm in più del primo. Quanto deve essere lungo il primo ripiano?
- (c) Ti si è rotto un tubo in casa e hai dovuto chiamare un idraulico d'urgenza. Alla fine del lavoro, l'idraulico ti presenta un conto totale di 265€. Guardando il dettaglio della fattura, scopri che il totale è composto da tre voci: i costi fissi di chiamata (40€); il costo dei pezzi di ricambio (85€), e la manodopera oraria pari a 35€/h. Quante ore ha lavorato l'idraulico a casa tua?
- (d) Martina vuole calcolare quale voto le serve per ottenere la media del 7 in Storia. La situazione attuale dei suoi voti è la seguente: ha preso un 7, un $6\frac{1}{2}$, e un 5. Manca solo l'ultima verifica. Che voto deve prendere nell'ultima verifica per raggiungere questo obiettivo?
- (e) Un contadino deve recintare un orto di forma rettangolare utilizzando un rotolo di rete metallica lungo esattamente **120 metri**. Il progetto prevede che la lunghezza debba essere il triplo della larghezza. Quanto devono misurare i due lati del rettangolo?
- (f) Due professori somministrano test differenti. Il primo parte dal punteggio iniziale 2 ed assegna 0,08 punti ad ogni domanda. Il secondo parte dal punteggio 1 assegnando però 0,1 punti ad ogni domanda. A quante domande hanno risposto due alunni di professori diversi se hanno preso lo stesso voto avendo risposto allo stesso numero di domande?
- (g) Due serbatoi d'acqua devono essere riempiti. Il serbatoio A contiene già 150 litri di acqua e viene alimentato con una portata di 20 l/min. Il serbatoio B è inizialmente vuoto, ma viene riempito con una portata pari a 30 l/min. Dopo quanto tempo i due serbatoi conterranno la stessa quantità di acqua?
- (h) Luca e Sara stanno risparmiando per una console. Luca ha già 50€ e mette da parte 10€ ogni settimana. Sara parte da 10€, ma risparmia 15€ a settimana. Dopo quante settimane la somma posseduta da Sara eguaglia quella di Luca?
- (i) Due candele vengono accese nello stesso istante. La candela *Alpha* è alta 25 cm e si accorcia di 3 cm/h. La candela *Beta* è alta 15 cm, ma si accorcia di 1 cm/h. Determina dopo quante ore le due candele avranno la stessa altezza.

Spiegazione Assegna un nome (x) alla grandezza da trovare. Poi imposta il problema traducendo il testo in un'equazione e risolvi.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Poniamo x = numero di mesi.

Costo Palestra A: $60 + 30x$

Costo Palestra B: $45x$

Imponiamo l'uguaglianza:

$$60 + 30x = 45x$$

$$60 = 45x - 30x$$

$$15x = 60 \implies x = \frac{60}{15} = 4$$

Le offerte si equivalgono dopo 4 mesi..

- (b) Poniamo x = lunghezza primo ripiano.

Secondo ripiano: $2x$

Terzo ripiano: $x + 40$

Somma totale: 240

Equazione:

$$x + 2x + (x + 40) = 240$$

$$4x + 40 = 240$$

$$4x = 200 \implies x = 50$$

Il primo ripiano misura 50 cm..

- (c) Poniamo x = ore di lavoro.

Costi fissi (chiamata + pezzi): $40 + 85 = 125$

Costo variabile: $35x$

Equazione:

$$125 + 35x = 265$$

$$35x = 265 - 125$$

$$35x = 140 \implies x = 4$$

L'idraulico ha lavorato 4 ore..

- (d) Poniamo x = voto ultima verifica.

I voti attuali sono: 7, 6.5, 5.

La media su 4 voti deve essere 7.

$$\frac{7 + 6.5 + 5 + x}{4} = 7$$

$$\frac{18.5 + x}{4} = 7 \implies 18.5 + x = 28$$

$$x = 28 - 18.5 = 9.5$$

Deve prendere 9 e mezzo..

- (e) Poniamo x = larghezza.

Lunghezza = $3x$.

Il perimetro è $2 \cdot (\text{larghezza} + \text{lunghezza}) = 120$.

$$2(x + 3x) = 120$$

$$2(4x) = 120 \implies 8x = 120 \implies x = 15$$

Larghezza = 15 m , Lunghezza = $3 \cdot 15 = 45\text{ m}$..

- (f) Poniamo x = numero domande.

Voto Prof 1: $2 + 0.08x$

Voto Prof 2: $1 + 0.1x$

Equazione:

$$2 + 0.08x = 1 + 0.1x$$

$$2 - 1 = 0.1x - 0.08x \implies 1 = 0.02x$$

$$x = \frac{1}{0.02} = 50$$

Hanno risposto a 50 domande..

(g) Poniamo x = minuti trascorsi.

Acqua Serbatoio A: $150 + 20x$

Acqua Serbatoio B: $30x$

Equazione:

$$150 + 20x = 30x$$

$$150 = 30x - 20x \implies 10x = 150 \implies x = 15$$

I serbatoi saranno uguali dopo 15 minuti..

(h) Poniamo x = settimane.

Risparmi Luca: $50 + 10x$

Risparmi Sara: $10 + 15x$

Equazione:

$$50 + 10x = 10 + 15x$$

$$50 - 10 = 15x - 10x \implies 40 = 5x \implies x = 8$$

Si eguagliano dopo 8 settimane..

(i) Poniamo x = ore passate.

Altezza Alpha: $25 - 3x$

Altezza Beta: $15 - x$

Equazione:

$$25 - 3x = 15 - x$$

$$25 - 15 = 3x - x \implies 10 = 2x \implies x = 5$$

Avranno la stessa altezza dopo 5 ore..

Problema: EQ0033 - Equazioni di primo grado in situazioni di geometria.

Testo [EQ0033] [1½★ 2🕒 1📖] Risolvi il seguente problema impostando la corrispondente equazione di primo grado.

- (a) Preso un quadrato di lato x , si prolungano due lati adiacenti di due segmenti lunghi 2 cm e 3 cm , in modo da formare i lati di un rettangolo che contiene il quadrato. La differenza tra l'area del rettangolo e quella del quadrato vale 13 cm^2 . Trova x .
- (b) Un rettangolo ha l'altezza che misura x e la base che la supera di 4 cm . Se si diminuisce l'altezza di 1 cm e si aumenta la base di 2 cm , l'area aumenta di 5 cm^2 . Trova il valore di x .
- (c) Dato un quadrato di lato x , se si aumenta un lato di 5 cm e si diminuisce l'altro di 3 cm si ottiene un rettangolo la cui area è uguale a quella del quadrato originale diminuita di 3 cm^2 . Calcola il perimetro del quadrato.
- (d) Un rettangolo ha la base che supera l'altezza di 10 cm . Se si aumenta l'altezza di 2 cm e si diminuisce la base di 4 cm , l'area rimane invariata. Trova le dimensioni iniziali del rettangolo.
- (e) Trasformando un quadrato di lato x in un rettangolo aumentando un lato di 4 cm e diminuendo l'altro di 3 cm , l'area diminuisce di 6 cm^2 rispetto a quella del quadrato. Calcola il lato del quadrato.
- (f) La differenza tra le aree di due quadrati è 39 cm^2 . Sapendo che il lato del secondo quadrato supera il lato del primo di 3 cm , determina la misura del lato del quadrato più piccolo.

Spiegazione Esprimi le aree o i perimetri in funzione dell'incognita x e imposta l'equazione secondo le indicazioni del testo.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) L'area del quadrato è $A_q = x^2$. I lati del rettangolo sono $(x+2)$ e $(x+3)$, quindi l'area del rettangolo è: $A_r = (x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$. Impostiamo l'equazione sulla differenza delle aree ($A_r - A_q = 13$):

$$(x^2 + 5x + 6) - x^2 = 13$$

$$5x + 6 = 13$$

$$5x = 7 \implies x = \frac{7}{5} = 1,4 \text{ cm}$$

.

- (b) Area originale $A_1 = x(x+4) = x^2 + 4x$. Nuove dimensioni: altezza $h' = x-1$, base $b' = (x+4)+2 = x+6$. Area modificata $A_2 = (x-1)(x+6) = x^2 + 6x - x - 6 = x^2 + 5x - 6$. L'equazione basata sull'aumento dell'area ($A_2 = A_1 + 5$):

$$x^2 + 5x - 6 = x^2 + 4x + 5$$

$$5x - 4x = 5 + 6$$

$$x = 11 \text{ cm}$$

.

- (c) Area quadrato $A_q = x^2$. Lati rettangolo: $(x+5)$ e $(x-3)$. Area rettangolo $A_r = (x+5)(x-3) = x^2 + 2x - 15$. L'equazione è $A_r = A_q - 3$:

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 - 3$$

$$2x = 12 \implies x = 6 \text{ cm}$$

Il perimetro del quadrato è $2p = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}$.

- (d) Altezza iniziale $h = x$, base $b = x + 10$. Area $A_1 = x(x+10) = x^2 + 10x$. Nuove dimensioni: $h' = x+2$, $b' = (x+10) - 4 = x+6$. Nuova area $A_2 = (x+2)(x+6) = x^2 + 8x + 12$. Imponiamo $A_1 = A_2$:

$$x^2 + 10x = x^2 + 8x + 12$$

$$2x = 12 \implies x = 6 \text{ cm}$$

Dimensioni iniziali: altezza 6 cm, base 16 cm..

- (e) Area quadrato $A_q = x^2$. Area rettangolo $A_r = (x+4)(x-3) = x^2 + x - 12$. L'equazione è $A_r = A_q - 6$:

$$x^2 + x - 12 = x^2 - 6$$

$$x = 12 - 6 \implies x = 6 \text{ cm}$$

.

- (f) Lato primo quadrato x , lato secondo quadrato $x+3$. Equazione sulla differenza delle aree:

$$(x+3)^2 - x^2 = 39$$

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 = 39$$

$$6x = 30 \implies x = 5 \text{ cm}$$

.

Problema: EQ0047 - Equazioni di primo grado fratte**Testo** [EQ0047] [2★ 2🕒 1📖] Risolvi la seguente equazione fratta:

(a) $\frac{x+9}{x-3} = 3 - \frac{x-3}{x+9}$

(b) $\frac{2}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x+1} = 0$

(c) $\frac{x}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x+3}$

(d) $\frac{2x}{x-5} = 2 + \frac{25}{x^2-25}$

(e) $\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x-2} = \frac{1}{x^2-1}$

(f) $\frac{x-3}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$

(g) $\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x^2+x} = 1$

(h) $\frac{4x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} = 1$

(i) $\frac{3}{x^2-6x+9} = \frac{1}{x-3}$

(j) $\frac{x+1}{x^2+4x+4} = \frac{1}{x+2}$

(k) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{4(x+1)}$

(l) $\frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x+1}$

(m) $\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x+3} = \frac{x-1}{3x+9}$

(n) $\frac{x - \frac{1}{2}}{x^2-2x+1} = \frac{1}{x-1}$

(o) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x - \frac{1}{2}}{x^2 - x}$

(p) $\frac{3}{x^2-25} - \frac{3x}{5-x} = 3$

(q) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{x}{x-1} - 2 = 0$

(r) $\frac{2x}{2x-1} - \frac{3}{2x+1} = \frac{6}{4x^2-1}$

(s) $\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2x-4}$

(t) $\frac{2x - \frac{1}{3}}{x^2-9} = \frac{2}{x+3}$

(u) $\frac{2x}{x-3} - 2 = \frac{9}{x^2-9}$

(v) $\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1} = 0$

(w) $\frac{x}{x-2} + \frac{4}{x^2-4} = 1$

(x) $\frac{1}{x^2-10x+25} + 1 = \frac{x-4}{x-5}$

(y) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{4x+2}{x^2-1}$

(z) $\frac{3}{2x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2x^2+2x}$

Spiegazione Fattorizza i denominatori, poni le Condizioni di Esistenza (C.E.) e risolvi l'equazione dopo aver ridotto allo stesso denominatore. Verifica sempre la soluzione.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) C.E.: $x \neq 3 \wedge x \neq -9$. m.c.m.: $(x-3)(x+9)$.

$$(x+9)^2 = 3(x-3)(x+9) - (x-3)^2$$

$$x^2 + 18x + 81 = 3x^2 + 18x - 81 - x^2 + 6x - 9$$

$$x^2 + 6x - 171 = 0 \implies \frac{\Delta}{4} = 9 + 171 = 180$$

$$x = -3 \pm \sqrt{180} = -3 \pm 6\sqrt{5}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili..

- (b) C.E. $x \neq -1$.

$$\frac{2 - (x+1)}{(x+1)^2} = 0 \implies 2 - x - 1 = 0 \implies x = 1.$$

Accettabile..

- (c) C.E. $x \neq \pm 3$.

$$x - (x+3) = x - 3 \implies -3 = x - 3 \implies x = 0.$$

Accettabile..

- (d) C.E. $x \neq \pm 5$.

$$2x(x+5) = 2(x^2 - 25) + 25 \implies 2x^2 + 10x = 2x^2 - 50 + 25 \implies 10x = -25 \implies x = -2,5.$$

Accettabile..

- (e) C.E. $x \neq \pm 1$.

$$\frac{x-1-(x+1)}{2(x^2-1)} = \frac{2}{2(x^2-1)} \implies -2 = 2. \text{ Falso..}$$

- (f) Fattorizziamo i denominatori: $(x-1)(x-2)$, $(x-2)(x+2)$. C.E.: $x \neq 1, x \neq \pm 2$. m.c.m.: $(x-1)(x-2)(x+2)$.

$$(x-3)(x+2) + (x+1)(x-1) = (x-1)(x+2)$$

$$x^2 - x - 6 + x^2 - 1 = x^2 + x - 2 \implies x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+5} = 1 \pm \sqrt{6}$$

Accettabili..

- (g) C.E. $x \neq 0, x \neq -1$.

$$\frac{(x-1)(x+1)+x}{x(x+1)} = 1 \implies x^2 - 1 + x = x^2 + x \implies -1 = 0. \text{ Falso..}$$

- (h) C.E. $x \neq \pm 1$.

$$4x + x(x-1) = x^2 - 1 \implies 4x + x^2 - x = x^2 - 1 \implies 3x = -1 \implies x = -1/3..$$

- (i) C.E. $x \neq 3$.

$$3 = x - 3 \implies x = 6. \text{ Accettabile..}$$

- (j) C.E. $x \neq -2$.

$$x + 1 = x + 2 \implies 1 = 2. \text{ Falso..}$$

- (k) C.E. $x \neq \pm 1$. m.c.m. $4(x^2 - 1)$.

$$4x - 2(x+1) = x - 1 \implies 4x - 2x - 2 = x - 1 \implies x = 1.$$

Scartata per C.E..

- (l) C.E.:
- $x \neq \pm 1$
- . m.c.m.:
- $(x-1)(x+1)$
- .

$$2x^2 - x(x+1) = x-1 \implies x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \implies x = 1$$

La soluzione $x = 1$ non è accettabile per le C.E..

- (m) C.E.
- $x \neq -3$
- .

$$x = x-1 \implies 0 = -1. \text{ Falso..}$$

- (n) C.E.
- $x \neq 1$
- .

$$x - 0,5 = x-1 \implies -0,5 = -1. \text{ Falso..}$$

- (o) C.E.
- $x \neq 0, 1$
- .

$$x-1+x = 2x-0,5 \implies 2x-1 = 2x-0,5 \implies -1 = -0,5. \text{ Falso..}$$

- (p) C.E.
- $x \neq \pm 5$
- . Nota:
- $\frac{3x}{5-x} = -\frac{3x}{x-5}$
- .

$$3+3x(x+5) = 3(x^2-25) \implies 3+3x^2+15x = 3x^2-75 \implies 15x = -78 \implies x = -26/5..$$

- (q) C.E.:
- $x \neq 1$
- . Poniamo
- $t = \frac{x}{x-1}$
- :

$$t^2 - t - 2 = 0 \implies (t-2)(t+1) = 0 \implies t = 2, t = -1$$

$$\text{Se } t = 2 \implies \frac{x}{x-1} = 2 \implies x = 2x-2 \implies x = 2.$$

$$\text{Se } t = -1 \implies \frac{x}{x-1} = -1 \implies x = -x+1 \implies x = 1/2..$$

- (r) C.E.:
- $x \neq \pm 1/2$
- . m.c.m.:
- $(2x-1)(2x+1)$
- .

$$2x(2x+1) - 3(2x-1) = 6 \implies 4x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{8} \implies x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}$$

x_2 non è accettabile per le C.E..

- (s) C.E.
- $x \neq \pm 2$
- . m.c.m.
- $2(x^2-4)$
- .

$$2x+x^2-4 = (x+1)(x+2) \implies x^2+2x-4 = x^2+3x+2 \implies x = -6..$$

- (t) C.E.
- $x \neq \pm 3$
- .

$$2x-1/3 = 2(x-3) \implies 2x-1/3 = 2x-6 \implies -1/3 = -6. \text{ Falso..}$$

- (u) C.E.
- $x \neq \pm 3$
- .

$$2x(x+3) - 2(x^2-9) = 9 \implies 2x^2+6x-2x^2+18 = 9 \implies 6x = -9 \implies x = -1,5..$$

- (v) C.E.
- $x \neq -1$
- .

$$1+x+1 = 0 \implies x = -2. \text{ Accettabile..}$$

- (w) C.E.
- $x \neq \pm 2$
- .

$$x(x+2)+4 = x^2-4 \implies x^2+2x+4 = x^2-4 \implies 2x = -8 \implies x = -4..$$

- (x) C.E.
- $x \neq 5$
- .

$$1+(x-5)^2 = (x-4)(x-5) \implies 1+x^2-10x+25 = x^2-9x+20 \implies -x = -6 \implies x = 6..$$

- (y) C.E.
- $x \neq \pm 1$
- .

$$2(x+1)+3(x-1) = 4x+2 \implies 2x+2+3x-3 = 4x+2 \implies 5x-1 = 4x+2 \implies x = 3..$$

(z) C.E. $x \neq 0, -1$.

$$3(x+1) - 2x = 1 \implies 3x + 3 - 2x = 1 \implies x = -2..$$

4.2 Equazioni di secondo grado

Problema: EQ0038 - Equazioni di secondo grado**Testo** [EQ0038] [1 ★ 2 ⌚ 2 📖] Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado:

(a) $x^2 + 3x + 2 = 0;$ $2x^2 - 3x - 1 = 0;$ $x^2 + x + 1 = 0$

(b) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 = 0;$ $3x^2 - 5x - 2 = 0;$ $-x^2 - 3x + 5 = 0;$

(c) $x^2 - 5x + 6 = 0;$ $x^2 - 6x + 7 = 0;$ $4x^2 + 4x + 1 = 0$

(d) $x^2 - 8x + 15 = 0;$ $2x^2 + x - 5 = 0;$ $x^2 + 2x + 5 = 0$

(e) $3x^2 - 7x + 2 = 0;$ $5x^2 - 2x = 0;$ $x^2 + 10x + 25 = 0$

(f) $4x^2 - 3x - 1 = 0;$ $x^2 + 5x - 3 = 0;$ $2x^2 - 18 = 0;$

(g) $6x^2 - 5x + 1 = 0;$ $5x^2 + x - 1 = 0;$ $x^2 + 10x + 25 = 0$

(h) $2x^2 - 5x + 3 = 0;$ $x^2 + 3x + 1 = 0;$ $3x^2 + 2x + 1 = 0$

(i) $x^2 - 12x + 1 = 0;$ $x^2 - 2x - 2 = 0;$ $2x^2 + x - 15 = 0$

Spiegazione Applica la formula risolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ per trovare le radici dell'equazione. Se il discriminante $\Delta < 0$, l'equazione non ha soluzioni reali.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) 1) $\Delta = 9 - 8 = 1 \implies x = \frac{-3 \pm 1}{2} \implies x_1 = -2, x_2 = -1;$
 2) $\Delta = 9 - 4(2)(-1) = 17 \implies x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4};$
 3) $\Delta = 1 - 4 = -3 \implies \nexists x \in \mathbb{R}.$

- (b) 1) $\Delta = 8 - 4(1)(-2) = 16 \implies x = \frac{-2 \pm \sqrt{2+4}}{2} = -\sqrt{2} \pm 2;$
 2) $\Delta = 25 - 4(3)(-2) = 49 \implies x = \frac{5 \pm 7}{6} \implies x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{3};$
 3) $\Delta = 9 - 4(-1)(5) = 29 \implies x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{-2}.$

- (c) 1) $\Delta = 25 - 24 = 1 \implies x_1 = 2, x_2 = 3;$
 2) $\Delta/4 = 9 - 7 = 2 \implies x = 3 \pm \sqrt{2};$
 3) $\Delta = 16 - 16 = 0 \implies x = -4/8 = -1/2.$

- (d) 1) $x_1 = 3, x_2 = 5; 2) \Delta = 1 + 40 = 41 \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}; 3) \Delta = 4 - 20 < 0.$

- (e) 1) $x_1 = 2, x_2 = 1/3; 2) x(5x - 2) = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = 2/5; 3) (x + 5)^2 = 0 \implies x = -5.$

- (f) 1) $x_1 = 1, x_2 = -1/4; 2) x = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}; 3) x^2 = 9 \implies x = \pm 3.$

- (g) 1) $x_1 = 1/2, x_2 = 1/3; 2) x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10}; 3) x = -5.$

- (h) 1) $x_1 = 3/2, x_2 = 1; 2) x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}; 3) \Delta = 4 - 12 < 0.$

- (i) 1) $x = 6 \pm \sqrt{35}; 2) x = 1 \pm \sqrt{3}; 3) x_1 = 5/2, x_2 = -3.$

Problema: EQ0049 - Equazioni di secondo grado parametriche.

Testo [EQ0049] [2★ 2½🕒 2📖] Rispondi alle seguenti domande relative a equazioni di secondo grado:

- | | |
|---|--|
| <p>(a) Data l'equazione $3x^2 + 5x + c = 0$, sappiamo che una delle due soluzioni è $x_1 = \frac{1}{3}$. Trova l'altra soluzione e il parametro c.</p> <p>(b) Data l'equazione $kx^2 - (2k + 1)x + k - 5 = 0$, trova k affinché la somma delle soluzioni sia uguale al loro prodotto.</p> <p>(c) Data l'equazione $x^2 + (k - 2)x - (k + 3) = 0$, determina per quale valore di k le soluzioni sono opposte.</p> | <p>(d) Data l'equazione $2x^2 - 5x + 3k - 4 = 0$, trova k affinché le soluzioni siano l'una il reciproco dell'altra.</p> <p>(e) Data l'equazione $x^2 - 6x + k^2 - 16 = 0$, determina i valori di k per cui una delle soluzioni è nulla.</p> |
|---|--|

Spiegazione Questi problemi si risolvono utilizzando le relazioni tra i coefficienti dell'equazione e le sue radici (Relazioni di Viète). In particolare: somma $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e prodotto $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Utilizziamo la relazione sulla somma: $\frac{1}{3} + x_2 = -\frac{5}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = -2$.
Utilizziamo ora il prodotto: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot (-2) = \frac{c}{3} \Rightarrow c = -2$.
-

- (b) Somma = Prodotto $\Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow -b = c$ (con $a \neq 0$).
Quindi: $2k + 1 = k - 5 \Rightarrow k = -6$.
Verifica: per $k = -6$ l'equazione esiste ed è di secondo grado.
-

- (c) Due soluzioni sono opposte ($x_1 = -x_2$) se la loro somma è nulla: $s = 0$.
Poiché $s = -\frac{b}{a}$, deve essere $b = 0$.
 $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$.
-

- (d) Due soluzioni sono reciproche ($x_1 = 1/x_2$) se il loro prodotto è pari a 1: $p = 1$.
Poiché $p = \frac{c}{a}$, deve essere $c = a$.
 $3k - 4 = 2 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$.
-

- (e) Un'equazione ha una soluzione nulla se è spuria o monomia, ovvero se il termine noto è zero: $c = 0$.
 $k^2 - 16 = 0 \Rightarrow k = \pm 4$.
In entrambi i casi l'equazione diventa $x^2 - 6x = 0$, che ha soluzioni 0 e 6.
-

Problema: *EQ0050* - equazioni di secondo grado con passaggi da svolgere, prodotti notevoli e radicali

Testo [*EQ0050*] [2★ 3🕒 2📖] Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

(a) $(x - \sqrt{2})^2 + (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + 8 = (x + 2\sqrt{2})^2$

(b) $(x + 1)^2 - (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1) = 2x - 6$

(c) $(x - \sqrt{5})^2 + (x + \sqrt{5})^2 = 6x + 10$

Spiegazione Riconduci l'esercizio alla forma base $ax^2 + bx + c = 0$ svolgendo i calcoli. Fai attenzione ai doppi prodotti con le radici e alle differenze di quadrati.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Svolgiamo i quadrati e il prodotto notevole (somma per differenza):

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + x^2 - 2 + 8 = x^2 + 4\sqrt{2}x + 8$$

Sommiamo i termini simili al primo membro e portiamo tutto a sinistra:

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 8 - x^2 - 4\sqrt{2}x - 8 = 0$$

$$x^2 - 6\sqrt{2}x = 0$$

Raccogliamo la x :

$$x(x - 6\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 6\sqrt{2}$$

.

(b) Svolgiamo il quadrato di binomio e la somma per differenza:

$$x^2 + 2x + 1 - (3x^2 - 1) = 2x - 6$$

$$x^2 + 2x + 1 - 3x^2 + 1 = 2x - 6$$

Eliminiamo $2x$ da entrambi i membri e sommiamo i termini simili:

$$-2x^2 + 2 = -6 \Rightarrow -2x^2 = -8 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

.

(c) Svolgiamo i due quadrati di binomio (i doppi prodotti si annulleranno a vicenda):

$$x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 + x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = 6x + 10$$

$$2x^2 + 10 = 6x + 10$$

Portiamo tutto a primo membro:

$$2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

.

Problema: EQ0039 - Algebra letterale

Testo [EQ0039] [2★ 2🕒 2📖] Discuti il numero di soluzioni dell'equazione al variare del parametro.

(a) $x^2 + 3x + a = 0;$ $x^2 + 2ax + a^2 + a = 0$

(b) $2ax^2 - 3x - 1 = 0;$ $x^2 + 3x + a - 4 = 0;$

(c) $x^2 - 4x + k - 5 = 0;$ $(k + 2)x^2 + (k + 2)x + 1 = 0;$

(d) $x^2 + 2(k + 1)x + 4k = 0;$ $(k - 1)x^2 + 4x - 1 = 0$

(e) $(k - 1)x^2 - 6x + 5 = 0;$ $x^2 - 2(k + 3)x + k^2 = 0;$

(f) $kx^2 - (2k - 1)x + k = 0;$ $x^2 - 3kx + 2k^2 + 5 = 0;$

(g) $4x^2 - 4mx + m^2 - 9 = 0;$ $(m^2 - 4)x^2 + 2(m - 2)x + 1 = 0;$

Spiegazione**Svolgimento** Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) [...].

(b) [...].

(c) *Prima equazione*

$$\frac{\Delta}{4} = (-2)^2 - 1(k - 5) = 4 - k + 5 = 9 - k$$

$$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \implies k < 9$$

$$\begin{cases} k < 9 \implies \text{Due soluzioni distinte} \\ k = 9 \implies \text{Una soluzione doppia} \\ k > 9 \implies \text{Nessuna soluzione} \end{cases}$$

*Seconda equazione*Analisi: $a = k + 2$

$$\begin{cases} \text{Caso lineare } (k = -2) : & 1 = 0 \implies \text{Nessuna soluzione (Impossibile)} \\ \text{Caso quadratico } (k \neq -2) : & \Delta = (k + 2)^2 - 4(k + 2) = k^2 - 4 \end{cases}$$

Discussione per $k \neq -2$:

$$\begin{cases} \text{Due soluzioni distinte:} & k^2 - 4 > 0 \implies k < -2 \vee k > 2 \\ \text{Una soluzione doppia:} & k^2 - 4 = 0 \implies k = 2 \\ \text{Nessuna soluzione:} & k^2 - 4 < 0 \implies -2 < k < 2 \end{cases}$$

Riassunto:

$$\begin{cases} \text{Due soluzioni se } k < -2 \vee k > 2 \\ \text{Una soluzione se } k = 2 \\ \text{Nessuna soluzioni se } -2 \leq k < 2 \end{cases}$$

(d) *Prima equazione*

$$\frac{\Delta}{4} = (k + 1)^2 - 4k = k^2 + 2k + 1 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2$$

$$\frac{\Delta}{4} > 0 \implies k \neq 1$$

$$\begin{cases} k \neq 1 \implies \text{Due soluzioni distinte:} \\ k = 1 \implies \text{Una soluzione doppia:} \end{cases}$$

Seconda equazione

$$\begin{cases} \text{Caso lineare } (k = 1) : & 4x - 1 = 0 \implies \text{Una soluzione unica} \\ \text{Caso quadratico } (k \neq 1) : & \frac{\Delta}{4} = 2^2 - (k - 1)(-1) = 4 + k - 1 = k + 3 \end{cases}$$

$$\text{Discussione per } k \neq 1 : \begin{cases} \text{Due soluzioni distinte:} & k + 3 > 0 \implies k > -3 \text{ e } k \neq 1 \\ \text{Una soluzione doppia:} & k + 3 = 0 \implies k = -3 \\ \text{Nessuna soluzione:} & k + 3 < 0 \implies k < -3 \end{cases}$$

(e) *Prima equazione* Se $k = 1$ l'equazione diventa di primo grado

$$-6x + 5 = 0$$

che ha una sola soluzione unica. Se $k \neq 1$ allora studiamo il segno del delta.

$$\frac{\Delta}{4} = (-3)^2 - 5(k - 1) = 9 - 5k + 5 = 14 - 5k$$

$$\frac{\Delta}{4} > 0 \implies k < \frac{14}{5}$$

$$\begin{cases} k < \frac{14}{5} \implies \text{Due soluzioni distinte} \\ k = \frac{14}{5} \implies \text{Una soluzione doppia} \\ k > \frac{14}{5} \implies \text{Nessuna soluzione} \end{cases}$$

Seconda equazione

$$\frac{\Delta}{4} = (-(k+3))^2 - k^2 = (k^2 + 6k + 9) - k^2 = 6k + 9$$

$$\begin{cases} \text{Due soluzioni distinte:} & 6k + 9 > 0 \implies k > -\frac{3}{2} \\ \text{Una soluzione doppia:} & 6k + 9 = 0 \implies k = -\frac{3}{2} \\ \text{Nessuna soluzione:} & 6k + 9 < 0 \implies k < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

(f) *Prima equazione* Se $k = 0$ l'equazione diventa di primo grado

$$x = 0 \implies \text{Una soluzione unica}$$

Se $k \neq 0$ allora studiamo il segno del delta

$$\Delta = (2k - 1)^2 - 4k^2 = 1 - 4k$$

$$1 - 4k > 0 \implies k < \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} k \neq 0 \wedge k < \frac{1}{4} \implies \text{Due soluzioni distinte} \\ k = \frac{1}{4} \implies \text{Una soluzione doppia} \\ k > \frac{1}{4} \implies \text{Nessuna soluzione} \end{cases}$$

Seconda equazione

$$\text{Analisi: } \Delta = (-3k)^2 - 4(2k^2 + 5) = 9k^2 - 8k^2 - 20 = k^2 - 20$$

$$\begin{cases} \text{Due soluzioni distinte:} & k^2 - 20 > 0 \implies k < -2\sqrt{5} \vee k > 2\sqrt{5} \\ \text{Una soluzione doppia:} & k^2 - 20 = 0 \implies k = \pm 2\sqrt{5} \\ \text{Nessuna soluzione:} & k^2 - 20 < 0 \implies -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5} \end{cases}$$

(g) *Prima equazione*

$$\frac{\Delta}{4} = (-2m)^2 - 4(m^2 - 9) = 4m^2 - 4m^2 + 36 = 36$$

Il delta è sempre positivo, quindi l'equazione avrà sempre due soluzioni reali e distinte.

$$x \in \mathbb{R} \implies \text{Due soluzioni distinte}$$

Seconda equazione Analizziamo il caso del coefficiente del termine di secondo grado uguale a zero. L'equazione diventerà in tal caso lineare.

$$m^2 - 4 = 0 \implies m = \pm 2$$

$$\begin{cases} \text{Caso 1 } (m = 2): & 1 = 0 \implies \text{Nessuna soluzione} \\ \text{Caso 2 } (m = -2): & -8x + 1 = 0 \implies \text{Una soluzione unica } (x = 1/8) \\ \text{Caso 3 } (m \neq \pm 2): & \frac{\Delta}{4} = (m - 2)^2 - (m^2 - 4) = 8 - 4m \end{cases}$$

Discussione per $m \neq \pm 2$:

$$\begin{cases} \text{Due soluzioni distinte:} & 8 - 4m > 0 \implies m < 2 \\ \text{Nessuna soluzione:} & 8 - 4m < 0 \implies m > 2 \end{cases}$$

Riassunto:

$$\begin{cases} \text{Due soluzioni se } m < 2 \wedge m \neq -2 \\ \text{Una soluzione se } m = -2; \\ \text{Nessuna soluzione se } m \geq 2 \end{cases}$$

Problema: *EQ0040* - Algebra letterale

Testo [[EQ0040](#)] [3★ 3🕒 2📖] Discuti il numero di soluzioni dell'equazione di secondo grado in funzione del parametro indicato.

(a) $kx^2 + (k + 1)x - k = 0$

(b) $mx^2 - 4\sqrt{2}x + (m + 2) = 0$

Spiegazione A seconda del valore che diamo al parametro, l'equazione cambia, così come cambia il numero di soluzioni che ha: due distinte, due coincidenti (una), due immaginarie (nessuna). Il segno del Δ è ciò che determina il numero di soluzioni, quindi per rispondere alla domanda bisogna capire, in funzione del parametro, il segno del discriminante dell'equazione.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a)

$$\begin{cases} \text{Caso lineare } (k = 0) : & x = 0 \implies \text{Una soluzione unica} \\ \text{Caso quadratico } (k \neq 0) : & \Delta = (k+1)^2 - 4k(-k) = 5k^2 + 2k + 1 \end{cases}$$

Analizziamo il segno del Δ per $k \neq 0$

$$\Delta_{\Delta} = 2^2 - 4(5)(1) = -16$$

Poiché $\Delta_{\Delta} < 0$ e $a > 0$, si ha $\Delta > 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$

Riassunto: Due soluzioni se $k \neq 0$; una soluzione se $k = 0$.

(b) Se $m = 0$ l'equazione diventa lineare $-4\sqrt{2}x + 2 = 0$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{4} \implies \text{Una soluzione unica}$$

Se $m \neq 0$ studiamo il segno del Delta

$$\frac{\Delta}{4} = (-2\sqrt{2})^2 - m(m+2) = 8 - m^2 - 2m$$

Radici del discriminante:

$$8 - m^2 - 2m = 0 \implies m^2 + 2m - 8 = 0 \implies m = -4 \vee m = 2$$

$$\begin{cases} \text{Due soluzioni distinte:} & 8 - m^2 - 2m > 0 \implies -4 < m < 2 \wedge m \neq 0 \\ \text{Una soluzione doppia:} & 8 - m^2 - 2m = 0 \implies m = -4 \vee m = 2 \\ \text{Nessuna soluzione:} & 8 - m^2 - 2m < 0 \implies m < -4 \vee m > 2 \end{cases}$$

Problema: EQ0042 - Equazioni di secondo grado fratte.

Testo [EQ0042] [2★ 2½🕒 2📖] Risolvi le seguenti equazioni fratte.

$$(a) \frac{x+9}{x-3} = 3 - \frac{x-3}{x+9}$$

$$(b) \frac{x}{x-2} + \frac{3}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

$$(c) \frac{3x}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1$$

$$(d) \frac{3x}{x+2} - \frac{x+4}{x-2} = \frac{-9x-6}{x^2-4}$$

$$(e) \frac{x+1}{2x-2} + \frac{5x}{2x+2} = \frac{2x^2+6}{x^2-1} + \frac{1}{2}$$

$$(f) \frac{x-3}{x^2-3x+2} + \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$$

$$(g) \frac{x}{x^2-9} - \frac{2}{x^2-4x+3} = \frac{1}{x^2+2x-3}$$

$$(h) \frac{2x}{x^2-x-6} - \frac{3}{x^2-9} = \frac{1}{x-3}$$

$$(i) \frac{x-2}{2x+4} + \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{2x}{3x-6}$$

$$(j) \frac{2x-1}{x+3} - \frac{x+2}{x-3} = \frac{x^2+5}{x^2-9}$$

$$(k) \frac{3x}{x^2-4x+4} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{2}{x-2}$$

$$(l) \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x+1}$$

$$(m) \frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-2x+1} = \frac{1}{x+1}$$

$$(n) \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{8x}{x^2-4} + \frac{x}{x+2}$$

$$(o) \frac{x}{x-2} + \frac{2}{x} = \frac{3x+4}{x^2-2x}$$

$$(p) \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{4x+2}{x^2-1}$$

$$(q) \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 - \frac{x}{x-1} - 2 = 0$$

Spiegazione Riduci ad un'unica frazione e risolvi l'equazione. Non dimenticare la condizione di esistenza.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) C.E.: $x \neq 3 \wedge x \neq -9$. m.c.m.: $(x-3)(x+9)$.

$$\begin{aligned}(x+9)^2 &= 3(x-3)(x+9) - (x-3)^2 \\ x^2 + 18x + 81 &= 3(x^2 + 6x - 27) - (x^2 - 6x + 9) \\ x^2 + 18x + 81 &= 3x^2 + 18x - 81 - x^2 + 6x - 9 \\ x^2 + 6x - 171 &= 0 \implies \Delta = 36 + 684 = 720 \\ x &= \frac{-6 \pm 12\sqrt{5}}{2} = -3 \pm 6\sqrt{5}\end{aligned}$$

Soluzioni accettabili..

(b)

$$\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

Scomponiamo il denominatore del secondo membro (differenza di quadrati):

$$\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x+2} = \frac{8}{(x-2)(x+2)}$$

Poniamo le Condizioni di Esistenza (C.E.): $x \neq 2$ e $x \neq -2$. Il minimo comune multiplo è $(x-2)(x+2)$. Moltiplichiamo tutta l'equazione per il m.c.m. per eliminare i denominatori:

$$x(x+2) + 3(x-2) = 8$$

Svolgiamo le moltiplicazioni:

$$x^2 + 2x + 3x - 6 = 8$$

Sommiamo i termini simili e portiamo l'8 al primo membro:

$$\begin{aligned}x^2 + 5x - 6 - 8 &= 0 \\ x^2 + 5x - 14 &= 0\end{aligned}$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado (somma e prodotto: cerchiamo due numeri che moltiplicati danno -14 e sommati +5, ovvero +7 e -2):

$$(x+7)(x-2) = 0$$

Le due possibili soluzioni sono:

$$x_1 = -7, \quad x_2 = 2$$

Confrontiamo con le C.E. ($x \neq \pm 2$). La soluzione $x_2 = 2$ non è accettabile. Rimane valida solo la prima:

$$x = -7$$

(c) C.E.: $x \neq \pm 2$. m.c.m.: $(x+2)(x-2)$.

$$\begin{aligned}3x(x-2) - (x-1)(x+2) &= x^2 - 4 \\ 3x^2 - 6x - (x^2 + x - 2) &= x^2 - 4 \\ x^2 - 7x + 6 &= 0 \implies (x-6)(x-1) = 0\end{aligned}$$

Soluzioni: $x = 6, x = 1$. Entrambe accettabili..

(d)

$$\frac{3x}{x+2} - \frac{x+4}{x-2} = \frac{-9x-6}{x^2-4}$$

Scomponiamo il denominatore del secondo membro (differenza di quadrati)

$$\frac{3x}{x+2} - \frac{x+4}{x-2} = \frac{-9x-6}{(x-2)(x+2)}$$

Poniamo le Condizioni di Esistenza (C.E.): $x \neq -2$ e $x \neq 2$. Il minimo comune denominatore è $(x-2)(x+2)$. Moltiplichiamo tutto per il m.c.d. per eliminare i denominatori

$$3x(x-2) - (x+4)(x+2) = -9x-6$$

Svolgiamo le moltiplicazioni. Attenzione al segno meno davanti al prodotto $(x+4)(x+2)$

$$3x^2 - 6x - (x^2 + 2x + 4x + 8) = -9x - 6$$

$$3x^2 - 6x - (x^2 + 6x + 8) = -9x - 6$$

Togliamo le parentesi cambiando i segni

$$3x^2 - 6x - x^2 - 6x - 8 = -9x - 6$$

Sommiamo i termini simili al primo membro

$$2x^2 - 12x - 8 = -9x - 6$$

Portiamo tutti i termini a sinistra per ottenere la forma normale dell'equazione di secondo grado

$$2x^2 - 12x + 9x - 8 + 6 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado usando la formula risolutiva. Calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

Le due soluzioni sono

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Confrontiamo con le C.E. ($x \neq \pm 2$). La soluzione $x_1 = 2$ non è accettabile. La soluzione $x_2 = -\frac{1}{2}$ è accettabile.

$$x = -\frac{1}{2}$$

(e)

$$\frac{x+1}{2x-2} + \frac{5x}{2x+2} = \frac{2x^2+6}{x^2-1} + \frac{1}{2}$$

Scomponiamo i denominatori raccogliendo il 2 nei primi due termini e riconoscendo la differenza di quadrati nel terzo

$$\frac{x+1}{2(x-1)} + \frac{5x}{2(x+1)} = \frac{2x^2+6}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{2}$$

Poniamo le Condizioni di Esistenza (C.E.): $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Il minimo comune multiplo è $2(x-1)(x+1)$. Moltiplichiamo tutta l'equazione per il m.c.m. per eliminare i denominatori

$$(x+1)(x+1) + 5x(x-1) = 2(2x^2+6) + (x-1)(x+1)$$

Sviluppiamo i prodotti (notiamo che $(x+1)(x+1)$ è un quadrato di binomio e $(x-1)(x+1)$ è una differenza di quadrati)

$$x^2 + 2x + 1 + 5x^2 - 5x = 4x^2 + 12 + x^2 - 1$$

Sommiamo i termini simili in ciascun membro

$$6x^2 - 3x + 1 = 5x^2 + 11$$

Portiamo tutti i termini al primo membro per ottenere la forma normale dell'equazione di secondo grado

$$6x^2 - 5x^2 - 3x + 1 - 11 = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Risolvi l'equazione usando la formula o il trinomio speciale (troviamo due numeri che sommati danno -3 e moltiplicati -10: sono -5 e +2). Scomponiamo in $(x - 5)(x + 2) = 0$. Le soluzioni sono

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -2$$

Confrontiamo con le C.E. ($x \neq \pm 1$). Entrambe le soluzioni sono accettabili.

$$x = 5 \quad \vee \quad x = -2$$

.

- (f) Denominatori: $(x-1)(x-2)$, $(x-2)(x+2)$, $(x-2)$. C.E.: $x \neq 1, x \neq \pm 2$. m.c.m.: $(x-1)(x-2)(x+2)$.

$$(x-3)(x+2) + (x+1)(x-1) = (x-1)(x+2)$$

$$x^2 - x - 6 + x^2 - 1 = x^2 + x - 2$$

$$x^2 - 2x - 5 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{1+5}$$

Soluzioni accettabili..

- (g) Denominatori: $(x-3)(x+3)$, $(x-3)(x-1)$, $(x+3)(x-1)$. C.E.: $x \neq \pm 3, x \neq 1$. m.c.m.: $(x-3)(x+3)(x-1)$.

$$x(x-1) - 2(x+3) = x-3$$

$$x^2 - x - 2x - 6 = x - 3 \implies x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{2} = 2 \pm \sqrt{7}$$

Soluzioni accettabili..

- (h) Denominatori: $(x-3)(x+2)$, $(x-3)(x+3)$. C.E.: $x \neq 3, x \neq -2, x \neq -3$. m.c.m.: $(x-3)(x+2)(x+3)$.

$$2x(x+3) - 3(x+2) = (x+2)(x+3)$$

$$2x^2 + 6x - 3x - 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$x^2 - 2x - 12 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{13}$$

Soluzioni accettabili..

- (i) Denominatori: $2(x+2)$, $(x-2)(x+2)$, $3(x-2)$. C.E.: $x \neq \pm 2$. m.c.m.: $6(x-2)(x+2)$.

$$3(x-2)^2 + 6(x+1) = 4x(x+2)$$

$$3(x^2 - 4x + 4) + 6x + 6 = 4x^2 + 8x$$

$$-x^2 - 14x + 18 = 0 \implies x^2 + 14x - 18 = 0$$

$$x = -7 \pm \sqrt{49+18} = -7 \pm \sqrt{67}$$

Soluzioni accettabili..

- (j) C.E.: $x \neq \pm 3$. m.c.m.: $x^2 - 9$.

$$(2x-1)(x-3) - (x+2)(x+3) = x^2 + 5$$

$$2x^2 - 7x + 3 - (x^2 + 5x + 6) = x^2 + 5$$

$$-12x - 3 = 5 \implies -12x = 8 \implies x = -\frac{2}{3}$$

Soluzione accettabile..

- (k) Denominatori: $(x-2)^2$, $(x-2)(x+2)$. C.E.: $x \neq \pm 2$. m.c.m.: $(x-2)^2(x+2)$.

$$3x(x+2) - 2(x-2) = 2(x^2 - 4)$$

$$3x^2 + 6x - 2x + 4 = 2x^2 - 8$$

$$x^2 + 4x + 12 = 0 \implies \Delta = 16 - 48 < 0$$

Nessuna soluzione reale..

(l) C.E.: $x \neq \pm 1$. m.c.m.: $(x-1)(x+1)$.

$$2x^2 - x(x+1) = x-1$$

$$2x^2 - x^2 - x = x-1 \implies x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \implies x = 1$$

Soluzione $x = 1$ non accettabile per le C.E..

(m) Denominatori: $(x-1)(x+1)$, $(x-1)^2$. C.E.: $x \neq \pm 1$. m.c.m.: $(x-1)^2(x+1)$.

$$2(x-1) + 1(x+1) = (x-1)^2$$

$$3x - 1 = x^2 - 2x + 1 \implies x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Soluzioni accettabili..

(n) C.E.: $x \neq \pm 2$. m.c.m.: $x^2 - 4$.

$$(x+2)^2 - (x-2)^2 = 8x + x(x-2)$$

$$(x^2 + 4x + 4) - (x^2 - 4x + 4) = 8x + x^2 - 2x$$

$$8x = 6x + x^2 \implies x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \implies x = 0, x = 2. x = 2 \text{ non accettabile..}$$

(o) C.E.: $x \neq 0, x \neq 2$. m.c.m.: $x(x-2)$.

$$x^2 + 2(x-2) = 3x + 4$$

$$x^2 + 2x - 4 = 3x + 4 \implies x^2 - x - 8 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Soluzioni accettabili..

(p) C.E.: $x \neq \pm 1$. m.c.m.: $x^2 - 1$.

$$x(x-1) + 2(x+1) = 4x + 2$$

$$x^2 - x + 2x + 2 = 4x + 2$$

$$x^2 - 3x = 0 \implies x(x-3) = 0$$

$x = 0$ (accettabile), $x = 3$ (accettabile)..

(q) C.E.: $x \neq 1$. Poniamo $t = \frac{x}{x-1}$.

$$t^2 - t - 2 = 0 \implies (t-2)(t+1) = 0$$

Caso 1: $\frac{x}{x-1} = 2 \implies x = 2x - 2 \implies x = 2$. Caso 2: $\frac{x}{x-1} = -1 \implies x = -x + 1 \implies x = 1/2$. Entrambe accettabili..

Problema: EQ0048 - Equazioni di secondo grado fratte.

Testo [EQ0048] [2½★ 3🕒2📖] Risolvi le seguenti equazioni fratte.

(a)
$$\frac{x}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x}{x^2 + 4x + 3} = \frac{3}{x^2 + 5x + 6}$$

(b)
$$\frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 4} - \frac{2x}{x + 2} = \frac{4x^2 - 28}{x^3 + 8}$$

(c)
$$\frac{x^2}{x + 1} + \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \frac{2x^3 - 4x + 5}{x^2 - x - 2}$$

(d)
$$\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{6}$$

(e)
$$\frac{x}{x^2 + x + 1} + \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{2x^2 + 4}{x^4 + x^2 + 1}$$

[suggerimento: fattorizza il polinomio di quarto grado sommando e sottraendo x^2]

Spiegazione Riduci ad un'unica frazione e risolvi l'equazione. Non dimenticare la condizione di esistenza.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Fattorizziamo i denominatori: $(x+1)(x+2)$, $(x+1)(x+3)$, $(x+2)(x+3)$. C.E.: $x \neq -1, -2, -3$. m.c.m.: $(x+1)(x+2)(x+3)$.

$$x(x+3) + 2x(x+2) = 3(x+1)$$

$$x^2 + 3x + 2x^2 + 4x = 3x + 3$$

$$3x^2 + 7x - 3x - 3 = 0 \implies 3x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+9}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$$

Soluzioni accettabili..

- (b) Notiamo che $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$. C.E.: $x \neq -2$. m.c.m.: $x^3 + 8$.

$$(2x+1)(x+2) - 2x(x^2 - 2x + 4) = 4x^2 - 28$$

$$2x^2 + 5x + 2 - (2x^3 - 4x^2 + 8x) = 4x^2 - 28$$

$$-2x^3 + 6x^2 - 3x + 2 = 4x^2 - 28$$

$$2x^3 - 2x^2 + 3x - 30 = 0$$

(L'equazione risultante è di terzo grado non riducibile con metodi elementari; probabile refuso nel testo originale)..

- (c) C.E.: $x \neq -1, x \neq 2$. m.c.m.: $(x+1)(x-2)$.

$$x^2(x-2) + (x^2-3)(x+1) = 2x^3 - 4x + 5$$

$$x^3 - 2x^2 + x^3 + x^2 - 3x - 3 = 2x^3 - 4x + 5$$

$$2x^3 - x^2 - 3x - 3 = 2x^3 - 4x + 5$$

$$-x^2 + x - 8 = 0 \implies x^2 - x + 8 = 0$$

$\Delta = 1 - 32 < 0$. Nessuna soluzione reale..

- (d) Fattorizziamo: $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{6}$. Sommiamo le prime due frazioni: $\frac{x+2+x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)}$. Sommiamo il risultato alla terza frazione: $\frac{2}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{2(x+3) + x}{x(x+2)(x+3)} = \frac{3(x+2)}{x(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x(x+3)}$. Equazione ridotta: $\frac{3}{x^2+3x} = \frac{1}{6}$. C.E.: $x \neq 0, -1, -2, -3$. $18 = x^2 + 3x \implies x^2 + 3x - 18 = 0 \implies (x+6)(x-3) = 0$. Soluzioni accettabili..

- (e) Fattorizzazione: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$. C.E.: $\forall x \in \mathbb{R}$. m.c.m.: $x^4 + x^2 + 1$.

$$x(x^2 - x + 1) + x(x^2 + x + 1) = 2x^2 + 4$$

$$x^3 - x^2 + x + x^3 + x^2 + x = 2x^2 + 4$$

$$2x^3 + 2x = 2x^2 + 4 \implies x^3 - x^2 + x - 2 = 0$$

(L'equazione risultante è di terzo grado; probabile refuso nel testo, ad es. se il numeratore RHS fosse $2x^2 + 2x$ la soluzione sarebbe intera)..

4.3 Equazioni di grado superiore al secondo

Problema: EQ0041 - Equazioni biquadratiche.

Testo [EQ0041] [1½★ 2🕒 2📖] Risolvi le seguenti equazioni biquadratiche

(a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

(b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

(c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$

(e) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$; $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

(f) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

(g) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$; $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

(h) $x^4 - 9x^2 = 0$; $x^4 + 4x^2 = 0$

(i) $x^4 - 16 = 0$; $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

(j) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$; $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

(k) $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$; $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

(l) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$; $2x^4 - 20x^2 + 18 = 0$

Spiegazione Le equazioni biquadratiche si risolvono introducendo il parametro $t = x^2$ e risolvendo prima un'equazione di secondo grado. Ritornando poi in x si dovranno risolvere altre due equazioni di secondo grado, ottenendo quindi fino a quattro risultati.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Poniamo $x^2 = t$.

- $t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 4) = 0 \Rightarrow t = 1, t = 4$. Ritorno in x : $x = \pm 1, x = \pm 2$.
- $t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 4, t = -1$. Ritorno in x : $x = \pm 2$.

(b) Poniamo $x^2 = t$.

- $t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2, t = 3$. Quindi $x = \pm\sqrt{2}, x = \pm\sqrt{3}$.
- $t^2 + 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = -1, t = -4$. Entrambi negativi, impossibile in $\mathbb{R}$.

(c) Poniamo $x^2 = t$.

- $t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 4 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm 2$.
- $t^2 - 13t + 36 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t - 9) = 0 \Rightarrow t = 4, t = 9 \Rightarrow x = \pm 2, x = \pm 3$.

(d) Poniamo $x^2 = t$.

- $t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 2, t = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}, x = \pm\sqrt{3}$.
- $t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t - 5) = 0 \Rightarrow t = 3, t = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}, x = \pm\sqrt{5}$.

.

(e) Poniamo $x^2 = t$.

- $t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow t = 2, t = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}, x = \pm\sqrt{5}$.
- $t^2 - 10t + 9 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 9 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm 3$.

(f) Poniamo $x^2 = t$.

- $t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4, t = -1 \Rightarrow x = \pm 2, x = \pm i$.
- $t^2 - 8t - 9 = 0 \Rightarrow t = 9, t = -1 \Rightarrow x = \pm 3, x = \pm i$ (soluzioni complesse omesse in S).

(g) Poniamo $x^2 = t$.

- $t^2 + 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = -1, t = -4$. Nessuna sol. reale.
- $t^2 + 13t + 36 = 0 \Rightarrow t = -4, t = -9$. Nessuna sol. reale.

(h) Raccolta a fattor comune.

- $x^2(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = 9 \Rightarrow x = 0, x = \pm 3$.
- $x^2(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \vee x^2 = -4 \Rightarrow x = 0$.

- (i) • Binomia: $x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$.
 • Quadrato di binomio: $(x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.
-

(j) Poniamo $x^2 = t$.

- $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1, t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 - $4t^2 - 5t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1, t = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm \frac{1}{2}$.
-

(k) Poniamo $x^2 = t$.

- $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}. x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \pm \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
 - $t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}. x = \pm \sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = \pm(\sqrt{2} \pm 1)$.
-

(l) Poniamo $x^2 = t$.

- $t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4, t = -2 \Rightarrow x = \pm 2$.
 - Diviso 2: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow t = 1, t = 9 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm 3$.
-

4.4 Equazioni irrazionali

Problema: *EQ0060* - Equazioni irrazionali (due DS-1°g, 1EQ-2°g).

Testo [*EQ0060*] [2.0★ 3⌚2📖] Risolvi le seguenti equazioni irrazionali

(a) $\sqrt{2x-1} = 1-x$

(b) $\sqrt{2x-1} = 2-x$

Spiegazione Per risolvere l'equazione irrazionale, dopo aver imposto le opportune condizioni, possiamo elevare a potenza.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Condizioni di esistenza e concordanza segno:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$2x - 1 = (1 - x)^2 \Rightarrow 2x - 1 = 1 - 2x + x^2$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

RisolviAMO l'equazione quadratica:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Verifica accettabilità: $x = 2 + \sqrt{2}$ (Scartata perché > 1)

$x = 2 - \sqrt{2}$ (Accettabile perché ≈ 0.59) .

(b) Condizioni di esistenza e concordanza segno:

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$2x - 1 = (2 - x)^2 \Rightarrow 2x - 1 = 4 - 4x + x^2$$

Portiamo in forma normale ($x^2 - Sx + P = 0$):

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Scomponiamo il trinomio o usiamo la formula risolutiva:

$$(x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 5$$

Verifica accettabilità rispetto alla condizione $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$: $x = 5$ (Non accettabile perché $5 > 2$)

$x = 1$ (Accettabile) .

Problema: *EQ0061* - Equazioni irrazionali (due DS-1°g, 1EQ-2°g, 1P).

Testo [*EQ0061*] [2½★ 3⌚2📖] Risolvi le seguenti equazioni irrazionali

(a) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1} = 2$

(b) $\sqrt{3x-1} - \sqrt{x+1} = 1$

Spiegazione Per risolvere l'equazione irrazionale con due radicali, si isola un radicale, si eleva al quadrato, si isola il radicale rimasto e si eleva nuovamente al quadrato.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Condizioni di esistenza: $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$. Isoliamo un radicale:

$$\sqrt{2x + 1} = 2 - \sqrt{2x - 1}$$

Eleviamo al quadrato (con condizione $2 - \sqrt{2x - 1} \geq 0$ verificata a posteriori):

$$2x + 1 = 4 - 4\sqrt{2x - 1} + (2x - 1)$$

$$2x + 1 = 2x + 3 - 4\sqrt{2x - 1}$$

Isoliamo il radicale rimasto:

$$4\sqrt{2x - 1} = 2 \Rightarrow \sqrt{2x - 1} = \frac{1}{2}$$

Eleviamo nuovamente al quadrato:

$$2x - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow 2x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{8}$$

Verifica: $x = \frac{5}{8}$ soddisfa $x \geq \frac{1}{2}$ ($0.625 \geq 0.5$). .

(b) Condizioni di esistenza: $\begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$. Isoliamo il radicale positivo per facilitare i calcoli:

$$\sqrt{3x - 1} = 1 + \sqrt{x + 1}$$

Eleviamo al quadrato:

$$3x - 1 = 1 + 2\sqrt{x + 1} + x + 1$$

$$2x - 3 = 2\sqrt{x + 1}$$

Nuova condizione di concordanza segno: $2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$. Eleviamo nuovamente al quadrato:

$$(2x - 3)^2 = 4(x + 1)$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 4x + 4$$

$$4x^2 - 16x + 5 = 0$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado:

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 80}}{8} = \frac{16 \pm \sqrt{176}}{8} = \frac{16 \pm 4\sqrt{11}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{11}}{2}$$

Controllo accettabilità ($x \geq 1.5$): $x_1 = \frac{4 - \sqrt{11}}{2} \approx 0.34$ (Non accettabile)

$x_2 = \frac{4 + \sqrt{11}}{2} \approx 3.66$ (Accettabile).

Problema: *EQ0062* - Equazioni irrazionali (1DS-1°g, 1DS-2°g, 1EQ-1°2°g).

Testo [*EQ0062*] [2½★ 3⌚2📖] Risolvi le seguenti equazioni irrazionali

(a) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = x + 2$

(b) $\sqrt{4x^2 - 5x + 3} = 2x - 1$

(c) $\sqrt{x^2 + 2x} = x - 3$

(d) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = 1 - x$

(e) $\sqrt{9x^2 - 2x + 5} = 3x + 1$

Spiegazione Per risolvere l'equazione irrazionale, impostiamo il sistema misto. Elevando al quadrato, i termini di secondo grado si cancelleranno, portando ad un'equazione lineare.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 5 \geq 0 & \text{(C.E.)} \\ x + 2 \geq 0 & \text{(Segno)} \\ x^2 - 3x + 5 = (x + 2)^2 & \text{(Equazione)} \end{cases}$$

1) C.E.: $\Delta < 0$, sempre verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Segno: $x \geq -2$.

3) Eq: $x^2 - 3x + 5 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow -7x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$.

Verifica: $\frac{1}{7} \geq -2$. La soluzione è accettabile. .

(b) Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x + 3 = (2x - 1)^2 \end{cases}$$

Svolgiamo l'equazione:

$$4x^2 - 5x + 3 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$-x = -2 \Rightarrow x = 2$$

Verifica: $x = 2$ soddisfa $x \geq \frac{1}{2}$ e rende positivo il radicando ($16 - 10 + 3 > 0$). .

(c) Condizioni:

$$\begin{cases} x^2 + 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases}$$

Dominio comune: $x \geq 3$. Eleviamo al quadrato:

$$x^2 + 2x = x^2 - 6x + 9$$

$$8x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{8}$$

Verifica: $\frac{9}{8} = 1,125$. Poiché $1,125 < 3$, la soluzione NON è accettabile. .

(d) Condizioni:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ 1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

Dominio comune: $x \leq 1$. Eleviamo al quadrato:

$$x^2 - 4x + 3 = 1 - 2x + x^2$$

$$-2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

Verifica: $x = 1$ rientra nel dominio ($1 \leq 1$). .

(e) Condizioni:

$$\begin{cases} 9x^2 - 2x + 5 \geq 0 & (\Delta < 0, \forall x) \\ 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Eleviamo al quadrato:

$$9x^2 - 2x + 5 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$-8x = -4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Verifica: $\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{3}$. La soluzione è accettabile. .

Problema: *EQ0063* - Equazioni irrazionali (1DS-1°g, 1DS-2°g, 1EQ-2°g).

Testo [*EQ0062*] [3★ 3🕒 2📖] Risolvi le seguenti equazioni irrazionali

(a) $\sqrt{4 - x^2} = x^2 - 2$

(b) $\sqrt{2x^2 - 1} = x^2 - 2$

(c) $\sqrt{9 - x^2} = x^2 - 3$

(d) $\sqrt{x^2 + 12} = x^2$

Spiegazione Per risolvere l'equazione irrazionale, dopo aver imposto le opportune condizioni, possiamo elevare a potenza. In questo caso, elevando al quadrato, comparirà un'equazione biquadratica.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Condizioni: $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; 2]$. Elevando al quadrato:
 $4 - x^2 = x^4 - 4x^2 + 4 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0$. $x^2(x^2 - 3) = 0$. $x = 0$ (Non acc. perché $0^2 - 2 < 0$). $x = \pm\sqrt{3}$ (Acc. perché $1.41 < 1.73 < 2$). .

(b) Condizioni:

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{1}{2} \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2}$$

Eleviamo al quadrato:

$$2x^2 - 1 = (x^2 - 2)^2 \Rightarrow 2x^2 - 1 = x^4 - 4x^2 + 4$$

Portiamo in forma normale:

$$x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$

Poniamo $t = x^2$: $t^2 - 6t + 5 = 0$. Le soluzioni sono $t_1 = 1$ e $t_2 = 5$. Ritorniamo alla x : 1) $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. (Non accettabili perché $|1| < \sqrt{2}$). 2) $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$. (Accettabili perché $\sqrt{5} > \sqrt{2}$). .

(c) Condizioni:

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

Dominio: $[-3; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 3]$. Eleviamo al quadrato:

$$9 - x^2 = x^4 - 6x^2 + 9$$

$$x^4 - 5x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 5) = 0$$

Soluzioni: 1) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. (Non accettabile, $0 < \sqrt{3}$). 2) $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$. (Accettabili: $\sqrt{3} \approx 1.73 < 2.23 < 3$). .

(d) Condizioni:

$$\begin{cases} x^2 + 12 \geq 0 & (\forall x \in \mathbb{R}) \\ x^2 \geq 0 & (\forall x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Nessuna restrizione particolare. Eleviamo al quadrato:

$$x^2 + 12 = x^4 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$$

Poniamo $t = x^2$: $t^2 - t - 12 = 0$. $(t - 4)(t + 3) = 0 \Rightarrow t = 4 \vee t = -3$. 1) $x^2 = -3$ (Impossibile in $\mathbb{R}$). 2) $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. (Entrambe accettabili). .

4.5 sistemi di equazioni

Problema: EQ0012 - Sistema lineare di due equazioni in due incognite

Testo [EQ0012] [1 ★ 2 ⌚ 2 📖] Risolvi il seguente sistema lineare.

$$(a) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 6x + 2y + 3 = 0 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} -6x + 2y + 5 = 0 \\ 3x - y = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3x - 6y + 1 = 0 \end{cases}$$

Spiegazione Un sistema di due equazioni in due incognite può essere risolto con il metodo di sostituzione, riduzione o di Cramer. La soluzione potrà essere una coppia di valori, oppure indeterminata oppure impossibile.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

(b) $[-3; 2]$.

(c) $[1; 0]$.

(d) $\left[\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right]$.

(e) $[7; -5]$.

(f) $\left[-\frac{1}{9}; -\frac{7}{6}\right]$.

(g) $[indeterminata]$.

(h) $[impossibile]$.

Problema: EQ0014 - Sistemi lineari con prodotti notevoli.

Testo [EQ0014] [1½★ 2½🕒 2📖] Risolvi i seguenti sistemi lineari semplificando i prodotti notevoli.

$$(a) \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)(y+2) = x^2 + y^2 \\ (x-3y)(x+3y) - x^2 + 3y = 4 - 9y^2 - 2x \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \\ (y-x)(y+x) + x^2 = (y-1)^2 - x + 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} (\frac{1}{2}x+1)^2 - \frac{1}{4}x^2 = y \\ (x-\frac{1}{3}y)(x+\frac{1}{3}y) - x^2 = -\frac{1}{9}y^2 + 2x - 5y \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = (x-1)^2 + y^2 + 1 \\ (2x-y)(2x+y) - 4x^2 = 5 - (y+1)^2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-1)(x+1) + \frac{1}{2}x(x+1) = (x-\frac{1}{2})^2 - (x+1)^2 + 3x + \frac{9}{8} \\ \frac{x+y}{2} + \frac{x-3y}{4} = \frac{x-y}{8} + \frac{7}{64} \end{cases}$$

Spiegazione Svolgi prima i prodotti notevoli (quadrati di binomio e differenze di quadrati) per ricondurre il sistema alla forma normale $ax + by = c$.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Semplificando:
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4 = x^2 + y^2 \\ x^2 - 9y^2 - x^2 + 3y = 4 - 9y^2 - 2x \end{cases} \implies \begin{cases} -4x = 0 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}.$$

Da cui $x = 0$ e $3y = 4 \implies y = 4/3..$

(b) Semplificando:
$$\begin{cases} 6x - 2y = -8 \\ x + 2y = 2 \end{cases}.$$
 Per riduzione (somma): $7x = -6 \implies x = -6/7$. Sostituendo: $y = 3(-6/7) + 4 = 10/7..$

(c) Semplificando:
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}.$$
 Sostituiamo $y = x + 1$: $2x - 5(x + 1) = 0 \implies -3x = 5 \implies x = -5/3, y = -2/3..$

(d) Semplificando:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 2xy = x^2 - 2x + 1 + y^2 + 1 \\ -y^2 = 5 - (y^2 + 2y + 1) \end{cases} \implies \begin{cases} 2x = 2 \\ 2y = 4 \end{cases}.$$

Quindi $x = 1, y = 2..$

(e) Semplificando la prima: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{4} - (x^2 + 2x + 1) + 3x + \frac{9}{8} \implies \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \implies x = -1/4$.
Sostituendo nella seconda: $y = -17/8..$

Problema: EQ0025 - Problemi risolvibili con sistemi di due equazioni in due incognite.

Testo [EQ0025] [1½★ 2🕒 2📖] Imposta e risolvi il sistema lineare di due equazioni in due incognite che descrive il problema.

- (a) Un camionista percorre 600 km in due giorni. Sapendo che il secondo giorno percorre il triplo della distanza percorsa il primo giorno, quanti chilometri percorre ogni giorno?
- (b) In una scatola ci sono statuine di animali quadrupedi e bipedi. Sapendo che ci sono in tutto 20 statuine e 62 zampe, calcola quante statuine di quadrupedi e quante di bipedi sono presenti nella scatola.
- (c) Per comprare un certo numero di penne blu da 3 euro, ed un numero doppio di penne nere da 2 euro, ho speso 42 euro. Quante penne nere e quante blu ho comprato?
- (d) Un chiosco compra 30 lattine di una bibita e 20 confezioni di biscotti spendendo 85 euro. Il giorno dopo compra 10 lattine di bibita e 25 confezioni di biscotti, spendendo 65 euro. Quanto gli costa una lattina di bibita e quanto una confezione di biscotti?
- (e) Giulia compra 3 kg di mele e 2 kg di pere. Il prezzo al chilo delle pere è il doppio del prezzo al chilo delle mele. Se spende in totale 14 €, quanto costa al chilo la frutta?
- (f) In un cortile ci sono galline e gatti. In totale si contano 58 zampe e 19 teste. Quante galline e quanti gatti ci sono?
- (g) Un teatro vende biglietti per un concerto a due prezzi: 15 € (prezzo intero) e 10 € (prezzo ridotto). Per la serata sono stati venduti un totale di 500 biglietti. Sapendo che l'incasso totale della serata è stato di 6000 €, quanti biglietti a prezzo ridotto e quanti a prezzo intero sono stati venduti?
- (h) Un capitale di 8000 € viene diviso in due parti e investito per un anno. La prima parte rende un interesse del 5% annuo e la seconda parte rende il 10% annuo. Se l'interesse totale guadagnato in un anno è stato di 550 €, quanto è stato investito in ciascuna delle due parti?
- (i) Ieri sera, nel piccolo cinema del paese, è stato proiettato un nuovo film. Ecco i dati della serata:
- Biglietti venduti in totale: 200.
 - Costo biglietto intero: 8€.
 - Costo biglietto ridotto: 5€.
 - Incasso totale registrato: 1.360€.
- Quanti biglietti interi e quanti biglietti ridotti sono stati venduti esattamente?

Spiegazione Questi problem sono risolvibili impostando un sistema di due equazioni in due incognite. Identifica quali sono le due variabili.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) [...].

(b) [...].

(c) Chiamando x il numero di penne blu e y il numero di penne nere, possiamo scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 42 \\ y = 2x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases}$$

.

(d) [...].

(e) Le mele costano $2 \frac{\text{euro}}{\text{kg}}$ e le pere costano $4 \frac{\text{€}}{\text{kg}}$..

(f) Nel cortile ci sono 10 gatti e 9 galline.

(g) Sono stati venduti 300 biglietti a prezzo ridotto e 200 biglietti a prezzo intero..

(h) Sono stati investiti 5000 € al 5% e 3000 € al 10%..

(i) .

Problema: *EQ0044* - Problemi risolvibili con sistemi di due equazioni in due incognite.

Testo [*EQ0044*] [2★ 2🕒 1📖] Risolvi il seguente problema costruendo il sistema lineare opportuno.

- | | |
|---|---|
| <p>(a) Marco e Luca sono fratelli. La somma delle loro età è 23 anni. Il doppio dell'età di Luca è uguale alla differenza tra l'età del loro padre ed il triplo dell'età di Marco. Quando Luca è nato, il padre aveva 43 anni. Quanti anni hanno rispettivamente Marco e Luca? [<i>invalsi 2005</i>]</p> <p>(b) Un numero intero positivo di due cifre è tale che la somma delle sue cifre è 12. Se si inverte l'ordine delle sue cifre, il nuovo numero così ottenuto è 36 unità</p> | <p>maggiore del numero originale. Determina il numero di partenza.</p> <p>(c) Un chimico ha due soluzioni saline: la prima al 10% di concentrazione, la seconda al 30% di concentrazione. Deve miscelare le due soluzioni per ottenere 10 litri di una nuova soluzione con una concentrazione finale del 24%. Quanti litri di ciascuna soluzione deve utilizzare?</p> |
|---|---|

Spiegazione Identificando le variabili del problema, leggendo il testo potrete costruire un sistema lineare di equazioni che porta alla sua soluzione.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Marco ha 10 anni e Luca ha 13 anni..

(b) Il numero di partenza è 48..

(c) Il chimico deve usare 3 litri della Soluzione A (10%) e 7 litri della Soluzione B (30%)..

Problema: EQ0026 - Problemi risolvibili con sistemi di due equazioni in due incognite.

Testo [EQ0026] [2★ 2⌚ 2📖] Imposta e risolvi il sistema lineare che descrive il problema.

- (a) Due artigiani lavorano in bottega uno solo al mattino e l'altro solo al pomeriggio. Il primo produce 10 oggetti ogni ora, mentre il secondo soltanto 6 ogni ora. Se in totale hanno lavorato 7 ore producendo 58 oggetti, quante ore ha lavorato ognuno di loro?
- (b) Marco investe un capitale di 30000 euro, una parte con un tasso di interesse annuo del 3% ed il restante con un tasso di interesse del 5%. Sapendo che il guadagno dell'investimento a minor tasso supera di 50 euro il guadagno dell'investimento a maggior tasso, quanto denaro ha impegnato nei due investimenti?
- (c) Aurora ha in tasca una somma di denaro il cui triplo sarebbe inferiore di 10 euro rispetto a quella in tasca a Marco. Marco dà ad Aurora 2 euro. Dopo lo scambio il quadruplo della cifra posseduta da Aurora supera di 10 euro la cifra posseduta da Marco. Quanti soldi avevano Marco ed Aurora prima dello scambio?
- (d) Un recipiente pieno di sabbia ha complessivamente una massa $m_1 = 10 \text{ kg}$. Riempito per un terzo di sabbia ha una massa $m_2 = 4 \text{ kg}$. Qual è la massa del recipiente vuoto? Qual è la massa della sabbia che serve per riempire il recipiente?

Spiegazione Questi problemi sono risolvibili impostando un sistema di due equazioni in due incognite. Identifica quali sono le due variabili.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) [...].

(b) Chiamiamo x e y rispettivamente gli investimenti a tasso minore e maggiore. Il sistema che possiamo costruire è

$$\begin{cases} x + y = 30000 \\ 0,03 \cdot x - 0,05 \cdot y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 30000 - x \\ 3x - 5 \cdot y = 5000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 30000 - x \\ 3x - 5(30000 - x) = 5000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 30000 - x \\ 8x = 155000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10625 \\ x = 19375 \end{cases}$$

(c) Chiamiamo M ed A la somma posseduta rispettivamente da Marco e Aurora prima dello scambio. Il sistema da costruire è

$$\begin{cases} 3A + 10 = M \\ 4(A + 2) - 10 = M - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3A + 10 = M \\ 4A - 2 = 3A + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40 = M \\ A = 10 \end{cases}$$

(d) Chiamiamo m_r la massa del recipiente, e m_s la massa della sabbia. Dalla lettura del problema possiamo costruire il seguente sistema.

$$\begin{cases} m_r + m_s = 10 \text{ kg} \\ m_r + \frac{1}{3}m_s = 4 \text{ kg} \end{cases}$$

Da cui si ottiene

$$\begin{cases} m_r + m_s = 10 \text{ kg} \\ 3m_r + m_s = 12 \text{ kg} \end{cases}$$

Sottraggo la prima dalla seconda

$$\begin{cases} 2m_r = 2 \text{ kg} \Rightarrow m_r = 1 \text{ kg} \\ m_s = 12 \text{ kg} - 3 \text{ kg} = 9 \text{ kg} \end{cases}$$

Problema: EQ0027 - Problemi risolvibili con sistemi di due equazioni in due incognite che coinvolgono la geometria.

Testo [EQ0027] [1½★ 2🕒 2📖] Imposta e risolvi il sistema lineare che descrive il problema.

- (a) Sapendo che il perimetro di un rettangolo è 500 cm e che aumentando di 5 cm un lato, e diminuendo di 5 cm l'altro si ottiene un quadrato, quanto valgono i lati del rettangolo?
- (b) In un triangolo isoscele il perimetro vale $2p = 50\text{ cm}$. Aumentando la base di $\Delta b = 1\text{ cm}$ si ottiene un triangolo equilatero. Trova i lati del triangolo isoscele.
- (c) Un agricoltore possiede un campo di forma rettangolare. Se si aumenta la lunghezza del campo di 3 m e si riduce la larghezza di 2 m , l'area del campo diminuisce di 5 m^2 . Se invece si riduce la lunghezza di 1 m e si aumenta la larghezza di 3 m , l'area del campo aumenta di 20 m^2 . Quali sono le dimensioni (lunghezza e larghezza) originali del campo?
- (d) In un trapezio la base maggiore è il triplo della base minore, mentre l'altezza è la metà della base minore. La somma delle due basi e dell'altezza è pari a 50 cm . Calcola l'area del trapezio.
- (e) In un parallelogramma l'altezza è $\frac{3}{4}$ del lato corrispondente. Sapendo che la loro somma è 14 m , calcola l'area del parallelogramma.

Spiegazione Questi problemi sono risolvibili impostando un sistema di due equazioni in due incognite. Identifica quali sono le due variabili.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Il sistema che risulta dal testo del problema è il seguente:

$$\begin{cases} a + b = 500 \text{ cm} \\ a + 5 \text{ cm} = b - 5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 255 \text{ cm} \\ a = 245 \text{ cm} \end{cases}$$

(b) Indichiamo con l il lato obliquo e con b la base. Sappiamo che $2l + b = 50$. Se la base aumenta di 1 ($b + 1$), il triangolo diventa equilatero, quindi la nuova base deve essere uguale al lato obliquo: $l = b + 1$.

$$\begin{cases} 2l + b = 50 \\ l = b + 1 \end{cases} \Rightarrow 2(b + 1) + b = 50 \Rightarrow 3b = 48 \Rightarrow b = 16$$

$$l = 16 + 1 = 17$$

(c) Siano x la lunghezza e y la larghezza. L'area originale è xy .

$$\begin{cases} (x + 3)(y - 2) = xy - 5 \\ (x - 1)(y + 3) = xy + 20 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli:

$$\begin{cases} xy - 2x + 3y - 6 = xy - 5 \\ xy + 3x - y - 3 = xy + 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 23 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione: $y = 3x - 23$. Sostituendo nella prima: $-2x + 3(3x - 23) = 1 \Rightarrow -2x + 9x - 69 = 1 \Rightarrow 7x = 70 \Rightarrow x = 10$. $y = 3(10) - 23 = 7$.

(d) Siano B la base maggiore, b la minore e h l'altezza. Il sistema è:

$$\begin{cases} B = 3b \\ h = \frac{1}{2}b \\ B + b + h = 50 \end{cases}$$

Sostituiamo tutto nell'ultima equazione: $3b + b + \frac{1}{2}b = 50 \Rightarrow \frac{9}{2}b = 50 \Rightarrow b = \frac{100}{9} \text{ cm}$. Di conseguenza: $B = \frac{300}{9} \text{ cm}$ e $h = \frac{50}{9} \text{ cm}$. Calcolo Area: $A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(\frac{400}{9}) \cdot \frac{50}{9}}{2} = \frac{10000}{81} \text{ cm}^2$.

(e) Siano b la base (lato) e h l'altezza ad essa relativa.

$$\begin{cases} h = \frac{3}{4}b \\ h + b = 14 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}b + b = 14 \Rightarrow \frac{7}{4}b = 14 \Rightarrow b = 8 \text{ m}$$

$$h = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6 \text{ m}$$

Area: $A = b \cdot h = 6 \cdot 8 = 48 \text{ m}^2$.

Problema: EQ0028 - Problemi risolvibili con sistemi di due equazioni in due incognite relativamente ai polinomi.

Testo [EQ0028] [1½★ 2🕒 2📖] Imposta e risolvi il sistema lineare che descrive il problema.

(a) Il polinomio $P(x) = ax^3 + 3bx + 2$ è divisibile per $(x + 1)$ e per $(x - 2)$. Trova i parametri a e b .

(b) Il polinomio $P(x) = x^4 + ax^3 - 7x^2 + bx + 12$ ha come zeri i valori $x = 1$ e $x = -2$. Trova i valori dei parametri a e b .

(c) Il polinomio $P(x) = bx^4 + 2x^3 + ax^2 - 8x + 12$ ha come zeri i valori $x = 2$ e $x = -2$. Trova i valori

dei parametri a e b

(d) Il polinomio $P(x) = x^4 + bx^3 - 7x^2 - 8x + a$ ha come zeri i valori $x = 1$ e $x = 2$. Trova i valori dei parametri a e b .

(e) Trova per quali valori dei parametri a e b i due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ risultano uguali.

- $P(x) = (a - b + 1)x^2 - 2(b - 1)x + 2$

- $Q(x) = 3ax^2 + (a + 6)x + 2$

(f) Trova per quali valori di A e B vale l'eguaglianza

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1}$$

(g) Trova per quali valori di A e B vale l'eguaglianza

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

Spiegazione Questi problem sono risolubili impostando un sistema di due equazioni in due incognite. Identifica quali sono le due variabili.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) [...].

(b) $[a = 2, b = -8]$.

(c) $[a = -7, b = 1]$.

(d) $[a = 12, b = 2]$.

(e) $[a = 2, b = -3]$.

(f) [...].

(g) [...].

Problema: EQ0045 - Scomposizione in fratti semplici tramite sistemi lineari.

Testo [EQ0045] [2★ 2½⌚ 2📖] Trova i valori dei parametri A e B che rendono vera l'eguaglianza per ogni valore di x ammesso:

$$(a) \quad \frac{2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$(b) \quad \frac{5x-1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$(c) \quad \frac{3x-5}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

$$(d) \quad \frac{x+10}{x^2+5x+4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$$

$$(e) \quad \frac{4}{3x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$(f) \quad \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$$(g) \quad \frac{x+5}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$(h) \quad \frac{6x-1}{(2x-1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(2x-1)^2}$$

$$(i) \quad \frac{x}{x^3-x^2-6x} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$(j) \quad \frac{5x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$(k) \quad \frac{5x+2}{2x^2+3x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1}$$

Spiegazione Applica il principio di identità dei polinomi: dopo aver sommato le frazioni a destra, eguaglia i coefficienti dei termini di pari grado dei due numeratori per determinare A e B .

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Sommiamo a destra: $\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{x^2-3x+2}$.

Sistema: $\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-B=3 \end{cases}$. Sommando le equazioni: $-A=5 \Rightarrow A=-5$.
Sostituendo: $-5+B=2 \Rightarrow B=7$.

(b) Numeratore: $(A+B)x+3A-2B=5x-1$.

Sistema: $\begin{cases} A+B=5 \\ 3A-2B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=5-A \\ 3A-2(5-A)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=9/5 \\ B=16/5 \end{cases}$.
(Nota: i valori erano invertiti nella tua bozza)..

(c) Numeratore: $A(x-3)+B=Ax-3A+B$.

Sistema: $\begin{cases} A=3 \\ -3A+B=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=4 \end{cases}$.

(d) Sistema: $\begin{cases} A+B=1 \\ 4A+B=10 \end{cases}$. Sottraendo la prima dalla seconda: $3A=9 \Rightarrow A=3$. Di conseguenza $B=-2$.

(e) Riscriviamo come $\frac{4/3}{x(x-2)}$. Numeratore: $(A+B)x-2A=4/3$.

Sistema: $\begin{cases} A+B=0 \\ -2A=4/3 \end{cases} \Rightarrow A=-2/3; B=2/3$.

(f) Sistema: $\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+3B=3 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow 6A=4 \Rightarrow A=2/3, B=1/3$.

(g) Numeratore: $Ax+2A+B=x+5$.

Sistema: $\begin{cases} A=1 \\ 2A+B=5 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=3$.

(h) Numeratore: $A(2x-1)+B=2Ax-A+B$.

Sistema: $\begin{cases} 2A=6 \\ -A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow A=3, B=2$.

(i) Semplifichiamo la frazione dividendo per x : $\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$.

Numeratore: $(A+B)x+2A-3B=1$.

Sistema: $\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow B=-A \Rightarrow 5A=1 \Rightarrow A=1/5, B=-1/5$.

(j) Sistema: $\begin{cases} A+B=5 \\ -A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow 2B=4 \Rightarrow B=2, A=3$.

(k) Fattorizziamo il denominatore: $(x+1)(2x+1)$.

Numeratore: $A(2x+1)+B(x+1)=(2A+B)x+A+B$.

Sistema: $\begin{cases} 2A+B=5 \\ A+B=2 \end{cases} \Rightarrow A=3, B=-1$.

Problema: EQ0013 - Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite.

Testo [EQ0013] [2★ 3👤 2📖] Risolvi il seguente sistema lineare di equazioni.

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ -2x + 3y + z = 7 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -5 \\ -2x + \frac{1}{3}y - z = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x - 3y + z = 13 \\ x + 3y - 2z = -1 \\ -2x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 5x + 2y - z = 1 \\ -5x - y + 2z = -7 \\ 10x - 3y + z = 14 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x + 4y + 2z = 2 \\ 3x - 4y + z = 5 \\ 2x + 8y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 4y + 3z = -2 \\ \frac{1}{2}x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} \frac{1}{3}x + y + 2z = 9 \\ x - y + z = 1 \\ -\frac{1}{3}x + 2y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ -x + 2y - 3z = 4 \\ x - y + 2z = -9 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x + 6y - 3z = 9 \\ -2x - 4y + 2z = -6 \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} \frac{1}{2}x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ -x - 2y + 4z = -5 \end{cases}$$

$$(l) \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + 3z = 5 \end{cases}$$

Spiegazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $\left[\vec{P} = (1,2,3) \right].$

(b) $\left[\vec{P} = (0,3,1) \right].$

(c) $\left[\vec{P} = (-1,0,1) \right].$

(d) $\left[\vec{P} = (4, -1,2) \right].$

(e) $\left[\vec{P} = (1, -2,0) \right].$

(f) $\left[\vec{P} = (3, -1,1) \right].$

(g) $\left[\vec{P} = (4, -2,0) \right].$

(h) $\left[\vec{P} = (3,4,2) \right].$

(i) $[impossibile].$

(j) $[indeterminato].$

(k) $[impossibile].$

(l) $[indeterminato].$

Problema: *EQ0043* - Problemi risolvibili con sistemi di tre equazioni in tre incognite.

Testo [*EQ0043*] [2★ 2🕒 1📖] Risolvi il seguente problema costruendo un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite.

- | | |
|---|---|
| (a) Tre fratelli, Anna, Bruno e Carlo, devono dividersi un'eredità di 49000 €. Si stabilisce che Anna deve ricevere il doppio della somma di Bruno, e Carlo de- | ve ricevere 3000 € in più di Anna. Qual è la somma esatta che riceve ciascuno dei tre fratelli? |
|---|---|

Spiegazione Identificando le variabili del problema, leggendo il testo potrete costruire un sistema lineare di equazioni che porta alla sua soluzione.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Bruno riceve 9200 €, Anna riceve 18400 € e Carlo riceve 21400 €.

Problema: EQ0046 - Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite a partire da frazioni algebriche.

Testo [EQ0046] [2½★ 3½👤 2📖] Trova i valori dei parametri A e B che rendono vera l'eguaglianza per ogni valore di x

$$(a) \frac{x^2 + 3x - 4}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$(b) \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$(c) \frac{5}{x^3 - 8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}$$

$$(d) \frac{4x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$$

$$(e) \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$(f) \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$(g) \frac{x^2 - 11x + 15}{x^3 - 6x^2 + 5x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-5}$$

$$(h) \frac{1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$(i) \frac{5x^2 + 20x + 6}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$(j) \frac{2x^2 + 5x + 3}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}$$

$$(k) \frac{2}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$(l) \frac{x^2 + 2x - 1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$(m) \frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$(n) \frac{3x^2 + 5x + 4}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$(o) \frac{2x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

Spiegazione Una frazione algebrica può essere scomposta come somma di frazioni purché i coefficienti a numeratore siano valori opportuni. Se svolgiamo la somma indicata, confrontando il polinomio che otteniamo a numeratore con il polinomio presente nel primo numeratore, possiamo trovare i valori dei parametri.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $A = -4; \quad B = 5; \quad C = 6.$

(b) $A = -1; \quad B = 2; \quad C = 0.$

(c) $A = \frac{5}{12}; \quad B = -\frac{5}{12}; \quad C = -\frac{5}{3}.$

(d) $A = 1; \quad B = 3; \quad C = 0.$

(e) $A = \frac{2}{9}; \quad B = \frac{7}{9}; \quad C = -\frac{5}{3}.$

(f) $A = -5; \quad B = -3; \quad C = 6.$

(g) $A = 3; \quad B = -\frac{5}{4}; \quad C = -\frac{3}{4}.$

(h) $A = \frac{1}{6}; \quad B = -\frac{1}{2}; \quad C = \frac{1}{3}.$

(i) $A = 5; \quad B = 0; \quad C = -14.$

(j) $A = 2; \quad B = 0; \quad C = 1.$

(k) $A = 2; \quad B = -2; \quad C = 0.$

(l) $A = 1; \quad B = 0; \quad C = -1.$

(m) $A = 3; \quad B = -2; \quad C = 2.$

(n) $A = \frac{2}{3}; \quad B = \frac{7}{3}; \quad C = 4.$

(o) $A = 2; \quad B = 0; \quad C = -1.$

Problema: *EQ0021* - Sistemi di equazioni lineari in due incognite con discussione del parametro.

Testo [*EQ0021*] [2½★ 3🕒2📖] Svolgi i seguenti sistemi discutendo i risultati in base ai possibili valori del parametro.

$$(a) \begin{cases} x + 2y = a + 3 \\ (a - 1)x + ay = 2a + 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{x}{a-1} + \frac{y}{3} = 2 \\ 3x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} kx - 2y = 4 \\ 2x + (k - 3)y = k + 5 \end{cases}$$

Spiegazione A seconda dei valori assunti dal parametro, il sistema può avere soluzioni molto differenti tra loro. Devi indicare quali siano le soluzioni del sistema in base ai valori del parametro.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Isoliamo la x nella prima equazione e sostituiamola nella seconda

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ (a - 1)(a + 3 - 2y) + ay = 2a + 1 \end{cases}$$

Adesso svolgiamo i calcoli nella seconda equazione

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ a^2 + 3a - 2ay - a - 3 + 2y + ay = 2a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ a^2 - ay - 4 + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ -ay + 2y = +4 - a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ (2 - a)y = (2 - a)(2 + a) \end{cases}$$

Adesso per trovare y dovremmo dividere ambo i membri dell'equazione per la quantità $(2 - a)$ che però, a priori, non sappiamo se per caso è uguale a zero. Se lo fosse non potremmo eseguire la divisione.

Se $a = 2$ allora il sistema diventa

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema indeterminato il cui insieme R dei risultati è esprimibile nel seguente modo:

$$R = \{(5 - 2t, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Se invece $a \neq 2$ allora posso svolgere la divisione ed ottengo il sistema

$$\begin{cases} x = 1 - 2a \\ y = 2 + a \end{cases}$$

.

(b) Per prima cosa, essendoci dei denominatori, vanno discussi per capire quando il sistema perde di significato. Quindi

$$a - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 1$$

Stabilito questo possiamo lavorare sui denominatori nella prima e ricavare y nella seconda

$$\begin{cases} 3x + (a - 1)y = 6(a - 1) \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

Sostituiamo

$$\begin{cases} 3x + (a - 1)(3x + 6) = 6a - 6 \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3ax - 3x + 6a - 6 = 6a - 6 \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ax = 0 \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

Per trovare x dovremmo dividere per a , ma prima dobbiamo discutere l'eventualità che a sia nullo.

$$\text{Se } a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

il sistema è indeterminato

$$\text{Se } a = 0 \wedge a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$$

(c) (a) **Determinante D dei coefficienti:**

$$D = \begin{vmatrix} k & -2 \\ 2 & k-3 \end{vmatrix} = k(k-3) - (-4) = k^2 - 3k + 4$$

(b) **Analisi del Determinante:** L'equazione $D = 0$ ha $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7$.

Poiché $\Delta < 0$ e il coefficiente di k^2 è positivo, D è **sempre positivo** e quindi **sempre diverso da zero** per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(c) **Conclusione:**

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad D \neq 0$$

Il sistema è **sempre determinato** e ammette **una sola soluzione** al variare di k .

Problema: *EQ0022* - Sistemi di equazioni lineari in due incognite con discussione dei due parametri.

Testo [[EQ0022](#)] [3 ★ 3 ⌚ 2 📖] Svolgi i seguenti sistemi discutendo i risultati in base ai possibili valori del parametro.

$$(a) \begin{cases} 3ax + by = a + b \\ 3ax - by = a - b \end{cases}$$

Spiegazione A seconda dei valori assunti dal parametro, il sistema può avere soluzioni molto differenti tra loro. Devi indicare quali siano le soluzioni del sistema in base ai valori del parametro.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Applichiamo il metodo di riduzione

$$\begin{cases} 3ax + by = a + b \\ 6ax = 2a \end{cases}$$

A questo punto per ricavare x dovremmo dividere per a ma non sappiamo se vale zero. Quindi cominciamo la discussione.

$$\text{Se } a = 0 \Rightarrow \begin{cases} by = b \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Adesso di nuovo non possiamo dividere per b non conoscendone il suo valore. Quindi

$$\text{Se } a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

il sistema è indeterminato sia per la variabile x che per la variabile y

$$\text{Se } a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

il sistema è indeterminato per la sola variabile x

$$\text{Se } a \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} by = b \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Come già detto prima dobbiamo discutere il parametro b

$$\text{Se } a \neq 0 \wedge b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

il sistema è indeterminato per la sola variabile y

$$\text{Se } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

il sistema è determinato

Riassumendo in modo grafico il risultato possiamo scrivere

	$a = 0$	
$b = 0$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$	$x =$
$b \neq 0$	$y = 1; \forall x \in \mathbb{R}$	$x =$

.

Problema: EQ0023 - Sistemi lineari fratti di due equazioni in due incognite

Testo [EQ0023] [1½★ 2🕒2📖] Svolgi i seguenti sistemi di equazioni fratte.

$$(a) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \\ 8x - 1 = -7y \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 0 \\ \frac{y+4}{x+3} = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{x-y-5}{x+1} = 2 \\ \frac{x+4}{y+3} = -1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \frac{2(1-2x)}{7-4y} = -2 \\ x+y = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} \frac{28}{x} - \frac{10}{y} = \frac{23}{x} + \frac{25}{xy} \\ 2y - 3x = 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} \frac{28}{x} + \frac{10}{y} = \frac{23}{x} + \frac{25}{2y} \\ 2y - 3x = 0 \end{cases}$$

Spiegazione La risoluzione di un sistema fratto necessita la discussione del denominatore. Se non discuti il suo non essere nullo, non puoi moltiplicare per eliminarlo.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $[(1, -1)]$.

(b) $[(3,2)]$.

(c) $[indeterminato]$.

(d) Cominciamo con le condizioni di esistenza:

$$7 - 4y \neq 0 \Rightarrow y \neq \frac{7}{4}$$

Adesso possiamo moltiplicare per quel denominatore

$$\begin{cases} 2 - 4x = -14 + 8y \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 - 4x = 8(1 - x) \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = -8 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Questa soluzione non entra in conflitto con la condizione di esistenza, quindi è accettabile.

$$[(-2,3)]$$

.

(e) $[(2,3)]$.

(f) Per prima cosa discutiamo i denominatori.

$$x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0$$

Cominciamo adesso a riscrivere il sistema in modo comodo.

$$\begin{cases} \frac{5}{x} = \frac{5}{2y} \\ 2y - 3x = 0 \end{cases}$$

Abbiamo discusso i denominatori, quindi possiamo moltiplicare per $2xy$

$$\begin{cases} 2xy \cdot \frac{5}{x} = \frac{5}{2y} \cdot 2xy \\ 2y = 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10y = 5x \\ 2y = 3x \end{cases}$$

Sostituiamo la seconda nella prima ed il risultato trovato per x lo sostituiamo nella seconda

$$\begin{cases} 15x = 5x \\ 2y = 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Questa soluzione non è però accettabile perché è stata esclusa durante la discussione delle condizioni di esistenza, quindi il sistema è $[impossibile]$.

Problema: *EQ0024* - Sistemi lineari fratti di due equazioni in due incognite

Testo [\[EQ0024\]](#) [2★ 2½🕒 2📖] Svolgi il seguente sistema di equazioni.

$$(a) \begin{cases} \frac{2y-1}{x+1} = \frac{3+2x}{3x+3} \\ \frac{10}{x+y} = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x-y=1 \\ \frac{2-x}{1-x} - \frac{1-x}{y} = 1 - \frac{x^2}{xy-y} \end{cases}$$

Spiegazione Questi sono sistemi di equazioni fratte, quindi ricordati di discutere i denominatori.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $[(3; 2)]$.

(b) $[(2; 3)]$.
