

Problema: AL0035 - Algebra letterale

Testo [AL0035] [1★ 1👤 1📖] Semplifica le seguenti espressioni.

(a) $\xi = \sqrt[3]{\frac{3a^2b^2}{c}} : \sqrt{\frac{9b^2}{c}} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} \quad \text{con } a > 0, c > 0$

(b) $\xi = \sqrt[3]{\frac{2x^2}{3y}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt[6]{\frac{2x^2y^2}{3}}$

(c) $\sqrt{3(x+y)} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{3x+3y}}}$

(d) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{a}} : \left[\left(\sqrt[4]{a^3} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \right]$

(e) $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x^3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x+2} \sqrt{\frac{x^3}{x+2}}} \cdot \sqrt[4]{(x^2+2x)^3}$

(f) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{a}} \cdot \left[\left(\sqrt[4]{a^3} \right)^{-2} \cdot \sqrt{a} \right]$

(g) $\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^3}} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^2}{(x-1)^2}}$

(h) $\left(\sqrt{\frac{a+2}{a}} - \sqrt{\frac{a}{a+2}} \right)^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{a^2+2a}{2}} \right)^2$

(i) $\left(\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \right)^2$

(j) $\sqrt[6]{\frac{x^2-2x}{x^2+1}} : \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x(x^2+1)}{(x+1)^2}}$

(k) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}} \right)^2 : \sqrt[6]{x^5}$

(l) $\xi = \left(\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3}}} \right)^2 : \sqrt{a}$

Spiegazione In questo esercizio devi riconoscere ed usare i prodotti notevoli ed utilizzarli.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Per prima cosa leviamoci di torno quel diviso con i due puntini. Per farlo invertiamo la frazione.

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{3a^2b^2}{c}} : \sqrt{\frac{9b^2}{c}} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}}$$

Adesso il passo da fare è avere le radici con lo stesso indice in modo da poter poi usare le proprietà dei radicali ed unire tutto sotto la stessa radice

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{3a^2b^2}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{9b^2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{3}} = \sqrt[6]{\frac{3^2a^4b^4}{c^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{c^3}{3^6b^6}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^3}{3^3}}$$

Ora non ci rimane che raggruppare sotto il segno di radice e semplificare

$$\xi = \sqrt[6]{\frac{3^2a^4b^4}{c^2} \cdot \frac{c^3}{3^6b^6} \cdot \frac{a^3}{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{a^7c}{3b^2}} = a \sqrt[6]{\frac{ac}{3b^2}}$$

Nel risultato finale abbiamo portato il termine a fuori dalla radice, sempre applicando le proprietà dei radicali $\sqrt[6]{a^7} = a \sqrt[6]{a}$.

- (b) Il primo passo da fare è portare tutte le radici ad avere lo stesso indice, utilizzando la proprietà dei radicali, per poi unire l'espressione sotto lo stesso indice.

$$\xi = \sqrt[6]{\frac{4x^4}{9y^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{y^3}{x^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{2x^2y^2}{3}} = \sqrt[6]{\frac{4x^4}{9y^2} \cdot \frac{y^3}{x^3} \cdot \frac{2x^2y^2}{3}}$$

Adesso semplifichiamo i termini comuni. Si ottiene una radice con indice 6 con argomento tutti termini di terzo grado. Trasformando la radice sesta in una radice quadrata di radice cubica, appare chiaro come eseguire l'ultima semplificazione.

$$\xi = \sqrt[6]{\frac{8x^3y^3}{27}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{\frac{8x^3y^3}{27}}} = \sqrt{\frac{2}{3}xy}$$

.

(c)

$$\sqrt[6]{3^3(x+y)^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{3(x+y)}} \\ \sqrt[6]{3^3(x+y)^3} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{3(x+y)}} \\ \sqrt[6]{9(x+y)^2}$$

.

(d)

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{a}} : \left[\left(\sqrt[4]{a^3} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \\ \sqrt[3]{\frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{5}{6}}}{a}} : \left[\left(a^{\frac{3}{4}} \right)^2 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \right] \\ \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2} + \frac{5}{6} - 1}} : \left[a^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} \right]$$

$$\sqrt[3]{a^{\frac{4}{3}}} : a = a^{\frac{4}{9}} : a = a^{-\frac{5}{9}} = \frac{1}{\sqrt[9]{a^5}}$$

.

- (e) La condizione di esistenza è $x < -2$ o $x > 0$ [...].

- (f) $a^{-\frac{1}{3}}$.

(g) $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}.$

(h) 2.

(i) $2(x + 1).$

(j) $\sqrt[6]{\frac{x}{x - 2}}.$

(k) 1.

- (l) Per prima cosa gestiamo la divisione con i due puntini trasformandola in una moltiplicazione. Inoltre portiamo l'elevazione al quadrato sotto il segno di radice.

$$\xi = \sqrt[3]{\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^3}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot a}{\sqrt[2]{a^3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}$$

portando tutto in notazione esponenziale è più facile gestire il calcolo

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{a^3}{a^{\frac{3}{2}}}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{a^3}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{(3-\frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = a^0 = 1$$

.
