

Problema: CC0022 - Geometria cartesiana, rette e parabole.

Testo [CC0022] [2½★ 3🕒 2📖] Trova quanto richiesto.

- (a) Data la parabola $y = x^2 - 2x$ ed il suo punto P di ascissa 1, determina il fascio di rette che ha come punto base P , e le rette del fascio che staccano sulla parabola un segmento di lunghezza $2\sqrt{5}$
- (b) Data la parabola $y = -x^2 + 4x$ ed il suo punto P di ascissa 2, determina il fascio di rette che ha come punto base P , e le rette del fascio che staccano sulla

parabola un segmento di lunghezza $3\sqrt{10}$

- (c) Data la parabola $y = -x^2 + 6x - 5$ ed il suo punto P di ascissa 3, determina il fascio di rette che ha come punto base P , e le rette del fascio che staccano sulla parabola un segmento di lunghezza $\sqrt{2}$

Spiegazione Trovato il fascio, imponi la condizione sulla lunghezza della corda.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) 1. ****Trovo l'ordinata di P**:** Sostituisco $x = 1$ nella parabola:

$$y = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow P(1; -1)$$

2. ****Scrivo il fascio**:** Retta per $P(1; -1)$ con coefficiente m :

$$y - (-1) = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m - 1$$

3. ****Intersezione Parabola-Fascio**:**

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = mx - m - 1 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x = mx - m - 1 \Rightarrow x^2 - (2 + m)x + (m + 1) = 0$$

Le soluzioni sono $x_1 = 1$ (ascissa di P) e l'altra si trova con la somma delle radici ($x_1 + x_2 = -b/a = m + 2$):

$$1 + x_2 = m + 2 \Rightarrow x_2 = m + 1$$

4. ****Trovo le coordinate del secondo punto B**:** Sostituisco $x_2 = m + 1$ nell'equazione della retta:

$$y_2 = m(m + 1) - m - 1 = m^2 + m - m - 1 = m^2 - 1$$

Quindi i due punti sono $P(1; -1)$ e $B(m + 1; m^2 - 1)$.

5. ****Formula della distanza (radice quadrata)**:**

$$d = \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2}$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{((m + 1) - 1)^2 + ((m^2 - 1) - (-1))^2}$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{(m)^2 + (m^2)^2}$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{m^2 + m^4}$$

Elevo al quadrato entrambi i membri:

$$20 = m^4 + m^2$$

$$m^4 + m^2 - 20 = 0$$

Pongo $t = m^2$:

$$t^2 + t - 20 = 0 \Rightarrow (t + 5)(t - 4) = 0$$

L'unica soluzione valida è $t = 4$ (perché $t = m^2$ deve essere positivo).

$$m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

6. ****Conclusione**:** Sostituisco $m = 2$ e $m = -2$ nel fascio: Per $m = 2$: $y = 2x - 2 - 1 \Rightarrow y = 2x - 3$ Per $m = -2$: $y = -2x - (-2) - 1 \Rightarrow y = -2x + 1$.

(b) 1. ****Trovo l'ordinata di P**:** Sostituisco $x = 2$ nella parabola:

$$y = -(2)^2 + 4(2) = -4 + 8 = 4 \Rightarrow P(2; 4)$$

2. ****Scrivo il fascio**:** Retta per $P(2; 4)$ con coefficiente m :

$$y - 4 = m(x - 2) \Rightarrow y = mx - 2m + 4$$

3. ****Intersezione Parabola-Fascio**:**

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = mx - 2m + 4 \end{cases}$$

$$-x^2 + 4x = mx - 2m + 4 \Rightarrow x^2 + (m - 4)x + (4 - 2m) = 0$$

Le soluzioni sono $x_1 = 2$ (ascissa di P) e l'altra si trova con la somma delle radici ($x_1 + x_2 = -b/a = -(m - 4) = 4 - m$):

$$2 + x_2 = 4 - m \Rightarrow x_2 = 2 - m$$

4. ****Trovo le coordinate del secondo punto B**:** Sostituisco $x_2 = 2 - m$ nell'equazione della retta:

$$y_2 = m((2 - m) - 2) + 4 = m(-m) + 4 = -m^2 + 4$$

Quindi i due punti sono $P(2; 4)$ e $B(2 - m; -m^2 + 4)$.

5. ****Formula della distanza (radice quadrata)**:**

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} \\ 3\sqrt{10} &= \sqrt{((2 - m) - 2)^2 + ((-m^2 + 4) - 4)^2} \\ 3\sqrt{10} &= \sqrt{(-m)^2 + (-m^2)^2} \\ 3\sqrt{10} &= \sqrt{m^2 + m^4} \end{aligned}$$

Elevo al quadrato entrambi i membri $((3\sqrt{10})^2 = 9 \cdot 10 = 90)$:

$$90 = m^2 + m^4$$

$$m^4 + m^2 - 90 = 0$$

Pongo $t = m^2$:

$$t^2 + t - 90 = 0$$

Cerco due numeri con somma -1 e prodotto -90 : sono -10 e $+9$.

$$(t + 10)(t - 9) = 0$$

L'unica soluzione accettabile è $t = 9$ (poiché $t = m^2$ deve essere positivo).

$$m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

6. ****Conclusione**:** Sostituisco $m = 3$ e $m = -3$ nel fascio $y = mx - 2m + 4$:
Per $m = 3$: $y = 3x - 6 + 4 \Rightarrow y = 3x - 2$ Per $m = -3$: $y = -3x - (-6) + 4 \Rightarrow y = -3x + 10$.

(c) 1. ****Trovo l'ordinata di P**:** Sostituisco $x = 3$ nella parabola:

$$y = -(3)^2 + 6(3) - 5 = -9 + 18 - 5 = 4 \Rightarrow P(3; 4)$$

2. ****Scrivo il fascio**:** Retta per $P(3; 4)$ con coefficiente m :

$$y - 4 = m(x - 3) \Rightarrow y = mx - 3m + 4$$

3. ****Intersezione Parabola-Fascio**:**

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 5 \\ y = mx - 3m + 4 \end{cases}$$

$$-x^2 + 6x - 5 = mx - 3m + 4 \Rightarrow x^2 + (m - 6)x + (9 - 3m) = 0$$

Una soluzione è $x_1 = 3$ (ascissa di P). L'altra si trova con la somma delle radici $(x_1 + x_2 = -b/a = -(m - 6) = 6 - m)$:

$$3 + x_2 = 6 - m \Rightarrow x_2 = 3 - m$$

4. ****Trovo le coordinate del secondo punto B**:** Sostituisco $x_2 = 3 - m$ nell'equazione del fascio:

$$y_2 = m((3 - m) - 3) + 4 = m(-m) + 4 = -m^2 + 4$$

I punti sono $P(3; 4)$ e $B(3 - m; -m^2 + 4)$.

5. ****Formula della distanza**:**

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} \\ \sqrt{2} &= \sqrt{((3 - m) - 3)^2 + ((-m^2 + 4) - 4)^2} \\ \sqrt{2} &= \sqrt{(-m)^2 + (-m^2)^2} \\ \sqrt{2} &= \sqrt{m^2 + m^4} \end{aligned}$$

Elevo al quadrato entrambi i membri:

$$2 = m^2 + m^4 \Rightarrow m^4 + m^2 - 2 = 0$$

Pongo $t = m^2$ (con $t \geq 0$):

$$t^2 + t - 2 = 0$$

Fattorizzo: $(t+2)(t-1) = 0$. Le soluzioni sono $t = -2$ (non accettabile) e $t = 1$.

$$m^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 1$$

6. ****Conclusione****: Per $m = 1$: $y = 1(x - 3) + 4 \Rightarrow y = x + 1$ Per $m = -1$:
 $y = -1(x - 3) + 4 \Rightarrow y = -x + 7$.
