

Problema: *EQ0021* - Sistemi di equazioni lineari in due incognite con discussione del parametro.

Testo [*EQ0021*] [2½★ 3🕒2📖] Svolgi i seguenti sistemi discutendo i risultati in base ai possibili valori del parametro.

(a)

$$\begin{cases} x + 2y = a + 3 \\ (a - 1)x + ay = 2a + 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \frac{x}{a - 1} + \frac{y}{3} = 2 \\ 3x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} kx - 2y = 4 \\ 2x + (k - 3)y = k + 5 \end{cases}$$

Spiegazione A seconda dei valori assunti dal parametro, il sistema può avere soluzioni molto differenti tra loro. Devi indicare quali siano le soluzioni del sistema in base ai valori del parametro.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Isoliamo la x nella prima equazione e sostituiamola nella seconda

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ (a - 1)(a + 3 - 2y) + ay = 2a + 1 \end{cases}$$

Adesso svolgiamo i calcoli nella seconda equazione

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ a^2 + 3a - 2ay - a - 3 + 2y + ay = 2a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ a^2 - ay - 4 + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ -ay + 2y = +4 - a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + 3 - 2y \\ (2 - a)y = (2 - a)(2 + a) \end{cases}$$

Adesso per trovare y dovremmo dividere ambo i membri dell'equazione per la quantità $(2 - a)$ che però, a priori, non sappiamo se per caso è uguale a zero. Se lo fosse non potremmo eseguire la divisione.

Se $a = 2$ allora il sistema diventa

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema indeterminato il cui insieme R dei risultati è esprimibile nel seguente modo:

$$R = \{(5 - 2t, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Se invece $a \neq 2$ allora posso svolgere la divisione ed ottengo il sistema

$$\begin{cases} x = 1 - 2a \\ y = 2 + a \end{cases}$$

.

(b) Per prima cosa, essendoci dei denominatori, vanno discussi per capire quando il sistema perde di significato. Quindi

$$a - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 1$$

Stabilito questo possiamo lavorare sui denominatori nella prima e ricavare y nella seconda

$$\begin{cases} 3x + (a - 1)y = 6(a - 1) \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

Sostituiamo

$$\begin{cases} 3x + (a - 1)(3x + 6) = 6a - 6 \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3ax - 3x + 6a - 6 = 6a - 6 \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ax = 0 \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

Per trovare x dovremmo dividere per a , ma prima dobbiamo discutere l'eventualità che a sia nullo.

$$\text{Se } a = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 3x + 6 = y \end{cases}$$

il sistema è indeterminato

$$\text{Se } a = 0 \wedge a \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$$

.

(c) (a) **Determinante D dei coefficienti:**

$$D = \begin{vmatrix} k & -2 \\ 2 & k-3 \end{vmatrix} = k(k-3) - (-4) = k^2 - 3k + 4$$

(b) **Analisi del Determinante:** L'equazione $D = 0$ ha $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7$.

Poiché $\Delta < 0$ e il coefficiente di k^2 è positivo, D è **sempre positivo** e quindi **sempre diverso da zero** per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(c) **Conclusione:**

$$\forall k \in \mathbb{R}, \quad D \neq 0$$

Il sistema è **sempre determinato** e ammette **una sola soluzione** al variare di k .

.