

Problema: EU0010 - Geometria euclidea - Dimostrazioni che coinvolgono la circonferenza

Testo [EU0010] [2★ 3👤 1📖] Svolgi la seguente dimostrazione.

- (a) Dimostra che un quadrilatero formato da due triangoli rettangoli con l'ipotenusa in comune è inscritto in una circonferenza e che gli angoli non retti del quadrilatero sono supplementari.
- (b) Dato un triangolo isoscele $\triangle ABC$ di base $\overline{BC}$, si prenda al suo interno un punto P e si conducano le perpendicolari ai lati uguali nei punti M e N . Dimostra che gli angoli $\angle MPN$ e $\angle MAN$ sono supplementari.
- (c) Date due circonferenze, siano P e Q i loro punti di intersezione. Condotta una retta per P , siano A e B le sue altre intersezioni con le due circonferenze. Si dimostri che il triangolo $\triangle ABQ$ è isoscele.
- (d) Data una circonferenza di centro O , traccia due corde congruenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ in modo tale che si intersechino in un punto P interno alla circonferenza. Dimostra che la semiretta OP è la bisettrice dell'angolo $\angle AOD$ formato dalle due corde.
- (e) Sia data una circonferenza di centro O . Si tracci una corda AB . Si congiungano gli estremi A e B con il centro O . Sia M il punto medio della corda AB . Dimostra che la semiretta OM è la bisettrice dell'angolo al centro $\angle AOB$ e che OM è perpendicolare ad AB .
- (f) Sia data una circonferenza di centro O . Si prendano due corde congruenti AB e CD . Dimostra che i triangoli $\triangle AOB$ e $\triangle COD$ sono congruenti. (Questo dimostra che a corde congruenti corrispondono angoli al centro congruenti).
- (g) Sia P un punto esterno a una circonferenza di centro O . Siano A e B i punti di contatto delle tangenti condotte da P alla circonferenza. Sapendo che il raggio condotto nel punto di contatto è perpendicolare alla tangente, dimostra che $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ e che PO è bisettrice dell'angolo $\angle APB$.
- (h) Due circonferenze di centri O e O' si intersecano nei punti A e B . Dimostra che la retta dei centri OO' è asse del segmento AB (cioè passa per il punto medio ed è perpendicolare).
- (i) In una circonferenza di centro O , sia AB un diametro e CD una corda perpendicolare ad AB che lo interseca in H . Dimostra che il triangolo $\triangle ACD$ è isoscele.
- (j) Sia AB una corda di una circonferenza di centro O . Siano C e D due punti sulla corda AB tali che $\overline{AC} \cong \overline{DB}$. Dimostra che il triangolo $\triangle OCD$ è isoscele.
- (k) Sia AB un diametro di una circonferenza di centro O . Siano C e D due punti qualsiasi sulla circonferenza da parti opposte rispetto al diametro tali che $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Dimostra che $\overline{AB}$ è la bisettrice dell'angolo $\angle CBD$.
- (l) Due corde parallele $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono tracciate in una circonferenza di centro O . Dimostra che le corde $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ sono congruenti (cioè il quadrilatero $ACDB$ è un trapezio isoscele).
- (m) Data una circonferenza, si considerino due corde consecutive AP e PB . Il raggio OP è bisettrice dell'angolo $\angle EPB$. Dimostrare che le corde sono congruenti.

Spiegazione Per svolgere una dimostrazione devi per prima cosa segnarti in modo chiaro quali sono le ipotesi e quale la tesi. Utilizzando teoremi noti, devi partire dalle affermazioni che hai come ipotesi per arrivare, passaggio dopo passaggio, ad affermare la tesi. In questo esercizio sono raccolte dimostrazioni che coinvolgono la circonferenza.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Un triangolo è sempre inscritto in una circonferenza. Se uno degli angoli è retto, allora insiste su un arco pari alla semicirconferenza. L'ipotenusa è quindi il diametro di tale circonferenza. Di conseguenza, anche il secondo triangolo è inscritto in una circonferenza che condivide lo stesso diametro e che quindi è la stessa circonferenza. Gli angoli non retti, insistono quindi su tutta la circonferenza e quindi sono supplementari..

- (b) La costruzione crea due triangoli rettangoli che condividono l'ipotenusa. Essi sono quindi inscritti nella stessa circonferenza. Gli angoli opposti sono quindi supplementari..

(c) .

(d) .

- (e) Consideriamo i triangoli $\triangle AOM$ e $\triangle BOM$. Essi hanno:

- (a) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ perché raggi della stessa circonferenza;
 (b) $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ per ipotesi (M è punto medio);
 (c) $\overline{OM}$ è lato in comune.

I due triangoli sono congruenti per il terzo criterio. Di conseguenza, gli angoli $\angle AOM \cong \angle BOM$ (quindi OM è bisettrice) e gli angoli $\angle OMA \cong \angle OMB$. Poiché questi ultimi sono supplementari e congruenti, misurano 90° ciascuno, quindi $OM \perp AB$..

- (f) Consideriamo i triangoli $\triangle AOB$ e $\triangle COD$. Essi hanno:

- (a) $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ perché raggi;
 (b) $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ perché raggi;
 (c) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ per ipotesi.

I triangoli sono congruenti per il terzo criterio (LLL). Ne consegue che anche gli angoli al centro $\angle AOB \cong \angle COD$..

- (g) Consideriamo i triangoli rettangoli $\triangle PAO$ e $\triangle PBO$. Essi hanno:

- (a) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ perché raggi;
 (b) $\overline{PO}$ ipotenusa in comune;
 (c) Gli angoli in A e B retti per proprietà della tangente.

I triangoli sono congruenti per il criterio dei triangoli rettangoli (cateto e ipotenusa). Ne segue che i cateti $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ e gli angoli $\angle APO \cong \angle BPO$..

- (h) Consideriamo prima i triangoli $\triangle OAO'$ e $\triangle OBO'$. Hanno $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (raggi prima circ.), $\overline{O'A} \cong \overline{O'B}$ (raggi seconda circ.) e $\overline{OO'}$ comune. Sono congruenti per LLL. Quindi $\angle AOO' \cong \angle BOO'$. Ora consideriamo il triangolo $\triangle AOB$. Esso è isoscele ($\overline{OA} \cong \overline{OB}$) e OO' è bisettrice dell'angolo al vertice. Nel triangolo isoscele la bisettrice è anche altezza e mediana. Dunque $OO' \perp AB$ e lo divide a metà..

- (i) Il diametro perpendicolare a una corda è anche asse della corda (si può dimostrare con i triangoli $\triangle OHC$ e $\triangle OHD$, ma assumiamolo o dimostriamolo brevemente). Se $AB \perp CD$, allora H è punto medio di CD . Consideriamo i triangoli $\triangle AHC$ e $\triangle AHD$. Hanno:

- (a) $\overline{AH}$ in comune;
- (b) $\overline{CH} \cong \overline{HD}$;
- (c) Angoli in H retti.

Sono congruenti (LAL o LLL se si usa l'asse). Dunque $\overline{AC} \cong \overline{AD}$.

- (j) Tracciamo i raggi $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Il triangolo $\triangle OAB$ è isoscele, quindi gli angoli alla base $\angle OAB \cong \angle OBA$. Consideriamo ora i triangoli $\triangle OAC$ e $\triangle OBD$. Essi hanno:

- (a) $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (raggi);
- (b) $\overline{AC} \cong \overline{DB}$ (ipotesi);
- (c) $\angle OAC \cong \angle OBD$ (angoli alla base del triangolo isoscele grande).

I triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza. Ne segue che $\overline{OC} \cong \overline{OD}$. Il triangolo $\triangle OCD$ è quindi isoscele.

- (k) Uniamo B con C e D . Consideriamo i triangoli $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$. Poiché C e D sono sulla circonferenza e $\overline{AB}$ è diametro, i triangoli sono rettangoli in C e D (teorema dell'angolo inscritto in una semicirconferenza). Hanno l'ipotenusa $\overline{AB}$ in comune e un cateto $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ per ipotesi. Sono congruenti per il criterio dei triangoli rettangoli. Di conseguenza, gli angoli $\angle CBA \cong \angle DBA$. Quindi $\overline{AB}$ è bisettrice.
-

- (l) Tracciamo l'asse delle corde passante per O . Poiché le corde sono parallele, l'asse è la stessa retta r . Poiché r è asse di simmetria per la circonferenza e perpendicolare alle corde, la figura è simmetrica rispetto a r . Alternativa con criteri:

Sia H punto medio di $\overline{AB}$ e K di $\overline{CD}$. H, O, K sono allineati. $\triangle AHO \cong \triangle BHO$ e $\triangle CKO \cong \triangle DKO$. Consideriamo i triangoli $\triangle AHC$ e $\triangle BHD$ (lavorando sulle proiezioni). La dimostrazione più elegante usa la simmetria: ribaltando attorno all'asse perpendicolare alle corde, A va in B e C va in D , quindi $\overline{AC}$ va in $\overline{BD}$. Dunque $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

- (m) .
-