

Problema: EU0016 - Geometria piana - dimostrazioni con criteri di congruenza e teoremi sul triangolo isoscele

Testo [EU0016] [3★ 4🕒 1📖] Svolgi la seguente dimostrazione.

- (a) Dato un triangolo $\triangle ABC$ isoscele sulla base $\overline{BC}$ si tracci la bisettrice dell'angolo in A . Si prenda poi un punto D su tale bisettrice. Si dimostri che il triangolo $\triangle BCD$ è isoscele. Si dimostri che la bisettrice dell'angolo in A è anche bisettrice dell'angolo in D . Presi poi due segmenti congruenti $\overline{AE}$ ed $\overline{AF}$ rispettivamente su $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, si dimostri che il triangolo $\triangle EFD$ è isoscele.
- (b) Dato il triangolo equilatero $\triangle ABC$, considera i punti P su $\overline{AB}$, Q su $\overline{BC}$, e R su $\overline{AC}$ tali che $\overline{BQ} \cong \overline{CR} \cong \overline{AP}$. I segmenti $\overline{AQ}$ e $\overline{BR}$ si intersecano in D . I segmenti $\overline{BR}$ e $\overline{CP}$ si intersecano in E . I segmenti $\overline{CP}$ e $\overline{AQ}$ si intersecano in F . Dimostra che i triangoli $\triangle APF$, $\triangle BQD$, e $\triangle CRE$, sono tutti congruenti. Dimostra che il triangolo $\triangle DEF$ è equilatero.
- (c) Dato un segmento $\overline{AB}$ si traccino dai vertici due semirette, dalla parte opposta rispetto al segmento, che con esso formano angoli congruenti. Si tracci la retta passante per il punto medio M del segmento e secante le due semirette nei punti C e D . Dimostra che i triangoli $\triangle ACM$ e $\triangle BDM$ che si sono formati sono congruenti. Dimostra che sono anche congruenti i triangoli $\triangle BCM$ e $\triangle BDM$
- (d) In un triangolo $\triangle ABC$, isoscele sulla base $\overline{AB}$, traccia le mediane $\overline{AN}$ e $\overline{BM}$ e indica con P il loro punto di intersezione. Dimostra che $\overline{CP}$ è la bisettrice dell'angolo $\angle C$
- (e) Sia ABC un triangolo isoscele sulla base BC . Si prendano sui lati obliqui AB e AC rispettivamente i punti P e Q tali che $AP \cong AQ$. Si dimostri che i segmenti BQ e CP sono congruenti e che si intersecano in un punto K che appartiene alla bisettrice dell'angolo A .
- (f) Siano ABC e ABD due triangoli isosceli situati da parti opposte rispetto alla base comune AB . Dimostra che la retta CD è bisettrice degli angoli al vertice $\angle ACB$ e $\angle ADB$ e che CD è perpendicolare ad AB .
- (g) Due triangoli ABC e $A'B'C'$ hanno congruenti due lati e la mediana relativa a uno di essi ($AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ e la mediana $BM \cong B'M'$). Dimostra che i due triangoli sono congruenti.

Spiegazione Per svolgere una dimostrazione devi per prima cosa segnarti in modo chiaro quali sono le ipotesi e quale la tesi. Utilizzando teoremi noti, devi partire dalle affermazioni che hai come ipotesi per arrivare, passaggio dopo passaggio, ad affermare la tesi. In questo esercizio sono raccolte dimostrazioni che per essere svolte devi applicare i criteri di congruenza dei triangoli e i teoremi sul triangolo isoscele.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Cominciamo con il dimostrare che il $\triangle BCD$ è isoscele. Consideriamo i triangoli $\triangle ACD$ e $\triangle ABD$. Essi hanno

- (a) il lato $\overline{AD}$ in comune;
- (b) i lati $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ per ipotesi in quanto il $\triangle ABC$ è isoscele.
- (c) gli angoli $\angle BAD \cong \angle CAD$ per ipotesi in quanto ottenuti tracciando la bisettrice dell'angolo in A

I due triangoli sono quindi congruenti per il primo criterio, ed in particolare sono congruenti i rimanenti lati $\overline{DB} \cong \overline{DC}$. Quindi il triangolo $\triangle BCD$ è isoscele. Considerando gli angoli, vale anche che $\angle ABD \cong \angle ACD$. La bisettrice dell'angolo in A interseca la base $\overline{BC}$ nel suo punto medio M in quanto il triangolo $\triangle ABC$ è isoscele. Consideriamo i triangoli $\triangle BDM$ e $\triangle CDM$. essi hanno:

- (a) il lato $\overline{DM}$ in comune;
- (b) i lati $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ come già dimostrato.
- (c) i lati $\overline{BM} \cong \overline{CM}$ in quanto M è il punto medio del segmento.

Quindi i due triangoli sono congruenti per il terzo principio di congruenza, ed in particolare lo sono gli angoli $\angle BDM \cong \angle CDM$. Quindi $\overline{AM}$ è anche bisettrice dell'angolo in D .

Consideriamo adesso i triangoli $\triangle ADE$ e $\triangle ADF$. essi hanno

- (a) il lato $\overline{AD}$ in comune;
- (b) i lati $\overline{AE} \cong \overline{AF}$ per ipotesi;

- (c) gli angoli $\angle EAD \cong \angle FAD$ per ipotesi in quanto ottenuti tracciando la bisettrice dell'angolo in A

I due triangoli sono quindi congruenti ed in particolare lo sono i lati corrispondenti: $\overline{ED} \cong \overline{FD}$. Il triangolo $\triangle EFD$ è quindi isoscele. .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) Confrontiamo $\triangle ABQ$ e $\triangle ACP$. Hanno $AB \cong AC$ (ipotesi), angolo in A comune, $AQ \cong AP$ (ipotesi). Per il primo criterio (LAL), $\triangle ABQ \cong \triangle ACP$, dunque $BQ \cong CP$. Per la seconda parte, consideriamo $\triangle PBK$ e $\triangle QCK$. Poiché $AB \cong AC$ e $AP \cong AQ$, allora per differenza $PB \cong QC$. Dalla congruenza precedente $\angle ABQ \cong \angle ACP$, quindi $\angle PBK \cong \angle QCK$. Anche $\angle BPC \cong \angle CQB$ (supplementari di angoli congruenti). Dunque $\triangle PBK \cong \triangle QCK$ (ALA). Ne segue $KB \cong KC$. Il punto K è quindi equidistante dagli estremi della base, così come A . Dunque AK è asse e bisettrice..

(f) Consideriamo i triangoli $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$. Essi hanno:

- (a) $AC \cong BC$ (lati obliqui primo triangolo);
- (b) $AD \cong BD$ (lati obliqui secondo triangolo);
- (c) CD lato in comune.

I triangoli sono congruenti per il terzo criterio (LLL). Ne segue che $\angle ACD \cong \angle BCD$ (quindi CD è bisettrice in C). Nel triangolo isoscele ABC , la bisettrice

dell'angolo al vertice è anche altezza, dunque $CD \perp AB$..

- (g) Poiché AC e $A'C'$ sono divisi a metà dalle mediane, consideriamo i triangoli $\triangle ABM$ e $\triangle A'B'M'$. Per dimostrarne la congruenza ci mancano dati immediati. Strategia alternativa: raddoppiamo le mediane BM e $B'M'$ ottenendo D e D' . I quadrilateri $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sono parallelogrammi. Consideriamo $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'D'$. Essi hanno $AB \cong A'B'$, $BD \cong B'D'$ (doppie mediane), $AD \cong BC \cong B'C' \cong A'D'$. Dunque $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ (LLL). Ne segue $\angle A \cong \angle A'$ (come somma di angoli congruenti). Ora riprendiamo $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$: hanno due lati e l'angolo compreso congruenti (LAL), quindi sono congruenti..
-