

Problema: PR0005 - Calcolo probabilistico

Testo [PR0005] [3★ 2🕒 5📖] Rispondi alle seguenti domande descrivendo in modo esauriente la logica dei calcoli svolti.

(a) [Maturità 2018/2019 - sessione ordinaria] Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.

- (a) Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
- (b) Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
- (c) Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

(b) [Maturità 2018/2019 - sessione suppletiva] Una persona lancia simultaneamente due dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6, poi trascrive su un foglio il

massimo dei due numeri usciti. Ripetendo molte volte la procedura, quale ci si può attendere che sarà la media dei valori trascritti?

(c) [Maturità 2018/2019 - sessione straordinaria] Da un mazzo di 40 carte da gioco, vengono estratte 6 carte contemporaneamente.

- (a) Qual è la probabilità che nessuna delle carte estratte sia rossa?
- (b) Qual è la probabilità che, tra le carte estratte, vi siano esattamente 2 assi?

Spiegazione Questi problemi, tratti dalle prove di maturità, sono un'ottima palestra di preparazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Lanciando quattro dadi, se la somma non supera 5 ne consegue che o sono tutti 1, oppure ci sarà un solo 2 e tutti 1. La probabilità del primo caso è

$$P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

La probabilità che ci sia un solo 2 e tutti 1 è

$$P_2 = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

dove la prima frazione si riferisce all'estrazione del 2, la seconda frazione si riferisce all'estrazione degli 1 ed il 4 si riferisce al fatto che non è rilevante quale dei dadi ha estratto un 2. Quindi la probabilità richiesta dal problema è

$$P = P_1 + P_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

- (b) Il prodotto sarà multiplo di 3 solo se almeno uno dei due dadi mostra un 3 o un 6. In questo caso è più comodo pensare che non si deve verificare che nessun dado mostri un 3 o un 6.

$$P = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

... La probabilità che il massimo numero uscito sia 4 si calcola imponendo che un dado sia 4 e gli altri non siano 5 o 6

$$P = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

- (b) Calcoliamo le probabilità che il valore più alto tra i due dadi sia il numero n e che sia il primo dado lanciato. Essa vale

$$P_{1n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{6} = \frac{n}{36}$$

Uguale è la probabilità che n sia il numero maggiore e che sia uscito sul secondo dado. Quindi la probabilità che il numero maggiore sia n è

$$P_n = \frac{n}{18}$$

Il valor medio atteso è quindi

$$M = \sum_{i=1}^6 n P_n = \sum_{i=1}^6 \frac{n^2}{18} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \cdot 18} = \frac{7 \cdot 13}{18} = \frac{91}{18}$$

.

- (c) (a) La probabilità di non estrarre carte rosse è

$$P = \frac{20}{40} \cdot \frac{19}{39} \cdot \frac{18}{38} \cdot \frac{17}{37} \cdot \frac{16}{36} \cdot \frac{15}{35} = \frac{17 \cdot 2}{13 \cdot 37 \cdot 7} = \frac{34}{3467}$$

.

Problema su: Analisi statistica - PRCC0001

Testo [PRCC0001] [3★ 3👤 2a📖]

I punti $A(0,0)$, $B(5,7)$ e $C(7,3)$ su di un piano cartesiano sono i tre vertici di un triangolo. Immaginando di tirare due dadi, e chiamiamo a e b i risultati ottenuti. Qual'è la probabilità che il punto $P(a,b)$ sia interno al triangolo?

Spiegazione Questo esercizio non prevede una particolare spiegazione, se non l'indicazione di applicare le regole studiate.

Svolgimento I risultati dei dadi sono numeri interi. In questo esercizio è facile contare quanti punti interni al triangolo hanno coordinate intere. Essi sono (come si può dedurre dal disegno) 16. Il punto $H(6,5)$ non è interno al triangolo ma si trova sul segmento $\overline{BC}$

La retta che passa per i punti B e C si trova infatti nel seguente modo:

$$y = mx + q$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2} = -2$$

Imponendo l'appartenenza di B

$$7 = -2 \cdot 5 + q$$

$$q = 17$$

$$y = -2x + 17$$

Verifichiamo adesso che H appartenga alla retta

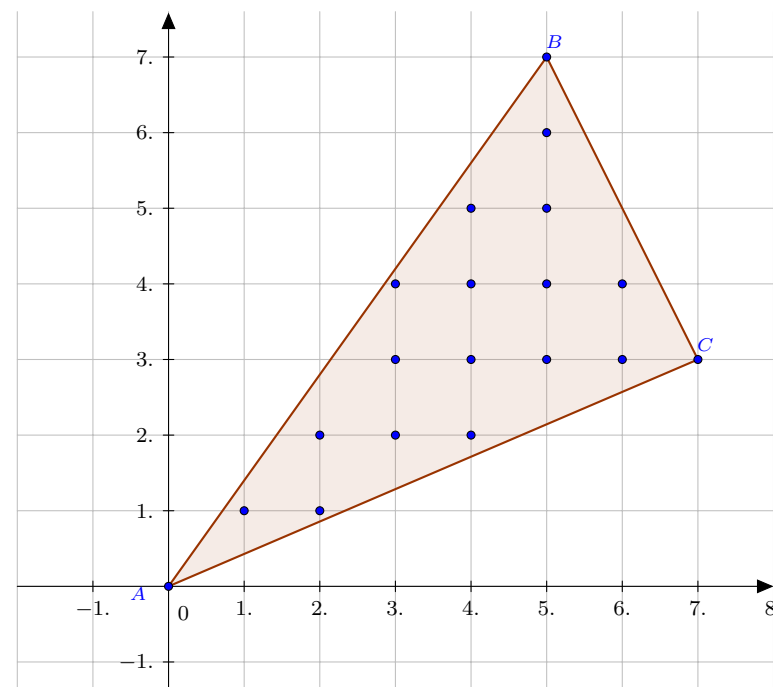
$$5 = -2 \cdot 6 + 17$$

$$5 = -12 + 17$$

Quindi H appartiene al lato del triangolo e quindi non è interno ad esso.

Tirando due dadi possiamo ottenere 36 diverse combinazioni di risultati; di queste soltanto 16 sono accettabili vista la richiesta del problema. Quindi la probabilità che il punto P sia interno al triangolo è

$$P_{rob} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$



Statistica

Scheda 8

Problema su: Analisi statistica - ST0001

Testo [ST0001] [2★ 10🕒 2a📖]

Dispongo di due dadi non truccati, con 4 facce. Li lancio 24 volte e annoto in una tabella la somma dei due risultati. Questi sono i risultati ottenuti.

{5, 6, 3, 7, 6, 5, 8, 4, 7, 5, 7, 6, 5, 6, 5, 5, 6, 3, 4, 7, 4, 2, 4, 8}

Una seconda serie di lanci ha dato

{4, 2, 4, 5, 7, 6, 3, 6, 4, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 6, 6, 5, 8, 7, 3, 4, 3, 5}

Una terza serie di lanci ha dato

{6, 8, 3, 2, 6, 5, 4, 5, 7, 4, 4, 7, 5, 5, 4, 6, 5, 5, 3, 3, 7, 6, 6, 2}

Rispondi alle seguenti domande per ogni serie di lanci, e per la serie che si ottiene unendo tutti i risultati delle tre serie di lanci.

1. disegna l'istogramma del campione di dati ottenuti
2. disegna l'istogramma teorico atteso
3. calcola la media, la mediana, la massima dispersione, la moda

Spiegazione Questo esercizio non prevede una particolare spiegazione, se non l'indicazione di applicare le regole studiate.

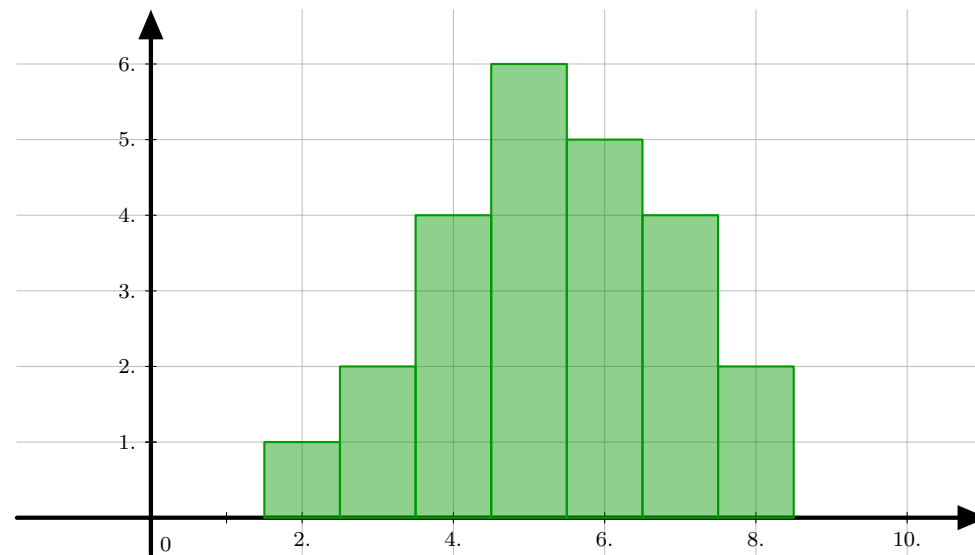
Svolgimento Cominciamo a disegnare l'istogramma dei dati del primo set di misure. Calcoliamo adesso i vari indici della distribuzione. La media è

$$\overline{M} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 2}{24} = \frac{128}{24} \simeq 5,33$$

La mediana è $M_{ed} = 5$

La massima dispersione è $D_{max} = 8 - 2 = 6$

La moda è 5



La probabilità che venga 2 la somma dei due dadi è $P_2 = \frac{1}{16}$

La probabilità che venga 3 la somma dei due dadi è $P_3 = \frac{1}{8}$

La probabilità che venga 4 la somma dei due dadi è $P_4 = \frac{3}{16}$

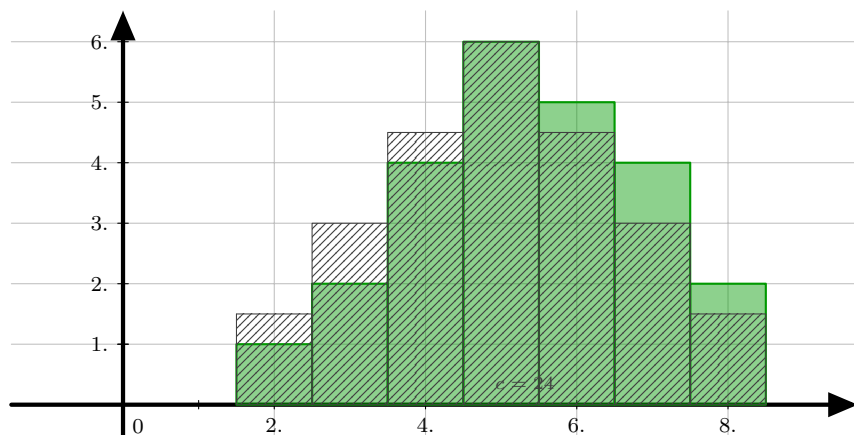
La probabilità che venga 5 la somma dei due dadi è $P_5 = \frac{1}{4}$

La probabilità che venga 6 la somma dei due dadi è $P_6 = \frac{3}{16}$

La probabilità che venga 7 la somma dei due dadi è $P_7 = \frac{1}{8}$

La probabilità che venga 8 la somma dei due dadi è $P_8 = \frac{1}{16}$

Mostriamo ora sull'istogramma questa informazione



Come si può vedere la distribuzione dei dati del campione è molto simile alla distribuzione attesa calcolata teoricamente.

Il secondo set di dati ha i seguenti indici ed è mostrato nella figura successiva.

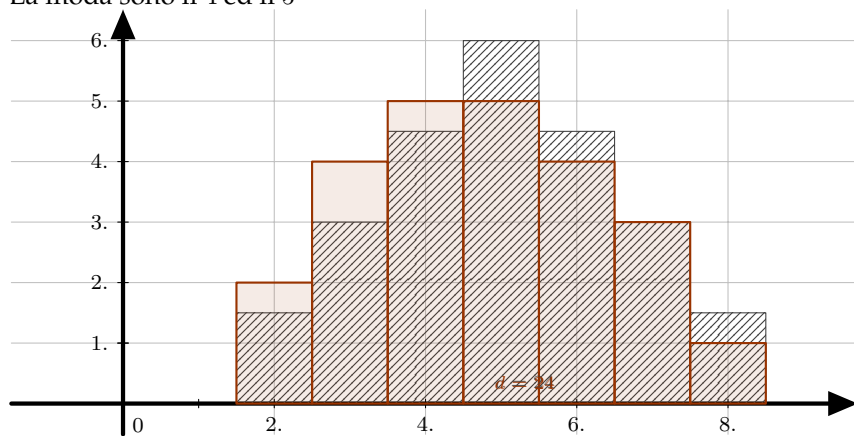
La media è

$$\bar{M} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1}{24} = \frac{114}{24} = 4,75$$

La mediana è $M_{ed} = 5$

La massima dispersione è $D_{max} = 8 - 2 = 6$

La moda sono il 4 ed il 5



Per quanto riguarda il terzo set di dati avremo:

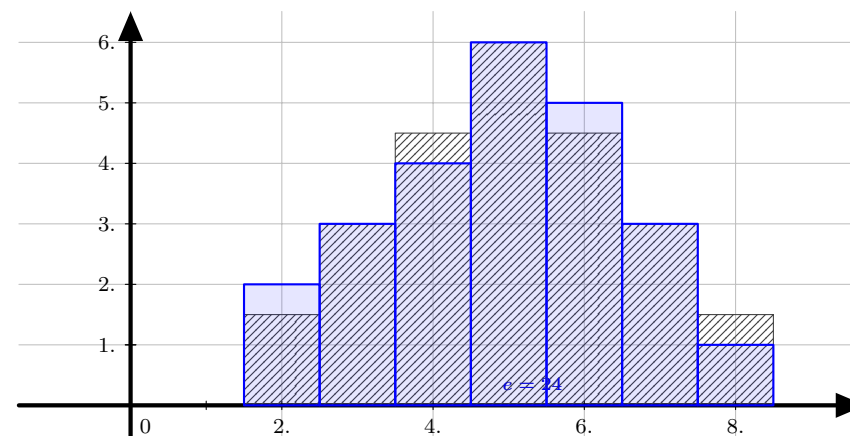
La media è

$$\bar{M} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1}{24} = \frac{118}{24} \simeq 4,92$$

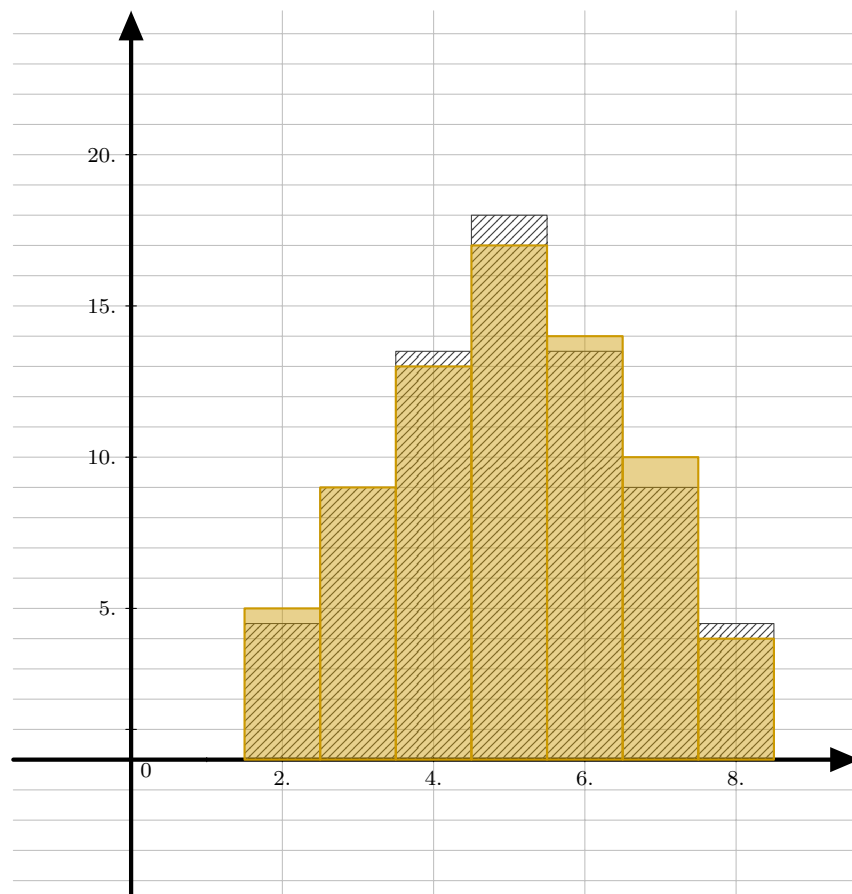
La mediana è $M_{ed} = 5$

La massima dispersione è $D_{max} = 8 - 2 = 6$

La moda è il 5



Adesso guardiamo come viene l'istogramma nel caso in cui uniamo tutti i dati in un unico set di dati. Potete notare come, essendoci più dati sperimentali, essi si distribuiscono in modo sempre più simile a quanto atteso teoricamente.



Nella distribuzione complessiva gli indici sono: La media è

$$\overline{M} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 13 + 5 \cdot 17 + 6 \cdot 14 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 4}{24} = \frac{360}{72} = 5$$

La mediana è $M_{ed} = 5$

La massima dispersione è $D_{max} = 8 - 2 = 6$

La moda è il 5