

Problema: EU0004 - Geometria euclidea - identificazione di luoghi geometrici.

Testo [EU0004] [1½★ 1½🕒 2📖] Identificazione di luoghi geometrici.

- | | | |
|--|--|--|
| <p>(a) Dato un triangolo di cui è data la base $\overline{AB}$, e fissato il valore dell'altezza relativa a quella base, determina il luogo geometrico dei punti C terzo vertice del triangolo $\triangle ABC$</p> <p>(b) Considera tutti i rettangoli con base $\overline{AB}$ ed altezza variabile. Indica il luogo geometrico delle intersezioni delle diagonali</p> <p>(c) Indica quale sia il luogo geometrico dei punti equidistanti dai vertici di un segmento dato</p> | <p>(d) Indica il luogo geometrico dei punti medi di tutte le corde di una circonferenza che hanno come estremo un punto fisso sulla circonferenza.</p> <p>(e) Determina quale sia il luogo geometrico dei punti equidistanti da due rette parallele.</p> <p>(f) Determina il luogo geometrico dei centri delle circonferenze che hanno come corda un segmento dato.</p> <p>(g) Determina il luogo geometrico delle circonferenze tangenti a due rette non parallele.</p> | <p>(h) Determina il luogo geometrico delle circonferenze tangenti a due rette parallele.</p> <p>(i) Determina il luogo geometrico dei centri di una circonferenza di raggio fisso, tangente internamente ad una circonferenza di raggio maggiore</p> <p>(j) Determina il luogo geometrico dei centri di una circonferenza di raggio fisso, tangente esternamente ad una circonferenza data</p> |
|--|--|--|

Spiegazione Un luogo geometrico è un insieme di punti che soddisfano una certa condizione. Per indicare un luogo geometrico devi solo indicare quali siano tutti i punti, cioè che figura geometrica descrivono, che soddisfano quella condizione.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) In questo caso il luogo geometrico è una coppia di rette parallele, a loro volta parallele al segmento..

- (b) In un rettangolo le diagonali si intersecano nel mezzo. Quindi quel punto di intersezione è equidistante dagli estremi del segmento di base, e questa è la definizione di asse del segmento..

- (c) [...].

- (d) [...].

- (e) [...].

- (f) [...].

- (g) [...].

- (h) [...].

- (i) [...].

- (j) [...].

Problema: EU0005 - Geometria euclidea - dimostrazioni - angoli e segmenti.

Testo [EU0005] [2★ 2🕒 1📖] Svolgi la seguente dimostrazione che coinvolge angoli e/o segmenti.

- | | | |
|---|---|---|
| <p>(a) Presi due segmenti congruenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sulla stessa retta, dimostra che anche i segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ sono congruenti</p> <p>(b) Dimostra che le bisettrici di due angoli consecutivi supplementari sono tra loro perpendicolari.</p> <p>(c) Dimostra che le bisettrici di due angoli consecutivi esplementari formano un angolo piatto.</p> <p>(d) Dimostra che se due bisettrici di due angoli consecutivi sono tra loro perpendicolari, allora quei due angoli sono tra loro supplementari.</p> | <p>(e) Disegna su di una retta quattro punti A, B, C, D, in modo tale che i segmenti $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ abbiano lo stesso punto medio. Dimostra che i segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sono congruenti</p> <p>(f) Dimostra che due angoli opposti al vertice sono congruenti.</p> <p>(g) Considera tre semirette a, b, c tutte con origine nel punto O, e considera due qualunque punti A e C rispettivamente sulle semirette a e c. Dimostra che se le bisettrici degli angoli aOb e bOc</p> | <p>sono perpendicolari, allora i punti A, O e C sono allineati.</p> <p>(h) Considera tre semirette a, b, c, con origine O tali per cui $a \perp b \wedge b \perp c$. Considera poi altre due semirette d ed e, sempre con origine O e tali per cui $d \perp e$ che dividono gli angoli aOb e bOc. Dimostra che i quattro angoli che si sono formati sono a coppie congruenti.</p> <p>(i) Dato un segmento $\overline{AB}$ di punto medio M, si prenda su $\overline{AM}$ un punto P. Si dimostri che $\overline{PB} - \overline{AP} \cong 2\overline{PM}$</p> |
|---|---|---|

Spiegazione Per svolgere una dimostrazione in modo rigoroso, è fondamentale seguire una struttura formale chiara. Per prima cosa, devi elencare le **Ipotesi**, cioè le informazioni di partenza note. Successivamente, devi indicare in modo conciso la **Tesi** (l'affermazione che intendi provare). Infine, introduci il tuo ragionamento con la dicitura **Dimostrazione:** e, a partire dalle ipotesi, sviluppa passo dopo passo i passaggi logici che ti porteranno alla tesi. In questo esercizio parliamo di angoli e segmenti. Presto aggiungerò anche i disegni alle spiegazioni. Voi però **dovete** sempre fare il disegno prima di leggere la spiegazione o iniziare a risolvere l'esercizio.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti



Ipotesi:

- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
- I segmenti giacciono sulla stessa retta con i punti disposti nell'ordine A, B, C, D

Tesi: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Dimostrazione:

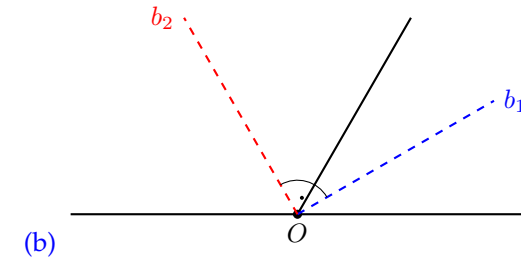
Se a segmenti congruenti sommiamo lo stesso segmento otteniamo segmenti congruenti. Risulta quindi:

$$\overline{AB} + \overline{BC} \cong \overline{BC} + \overline{CD}$$

I segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sono adiacenti e la loro somma dà il segmento $\overline{AC}$. I segmenti $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ sono adiacenti e la loro somma dà il segmento $\overline{BD}$. Quindi otteniamo

$$\overline{AC} \cong \overline{BD}$$

come volevasi dimostrare..



Ipotesi:

- α e β sono due angoli consecutivi e supplementari ($\alpha + \beta = 180^\circ$)
- Le semirette considerate dividono α e β in angoli dimezzati $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ e $\delta = \frac{\beta}{2}$

Tesi: L'angolo ϵ tra le due bisettrici è un angolo retto ($\epsilon = 90^\circ$)

Dimostrazione:

Sappiamo per costruzione che l'angolo ϵ tra le due bisettrici è $\epsilon = \gamma + \delta$. Avremo per ipotesi che

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Sostituendo le definizioni di γ e δ (ovvero $\alpha = 2\gamma$ e $\beta = 2\delta$) otteniamo:

$$2\gamma + 2\delta = 180^\circ$$

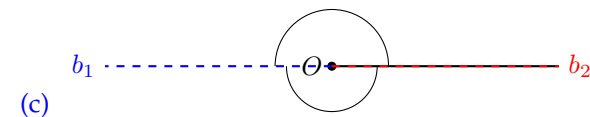
Dividendo per due ambo i membri:

$$\gamma + \delta = 90^\circ$$

Poiché $\epsilon = \gamma + \delta$, si conclude che

$$\epsilon = 90^\circ$$

.



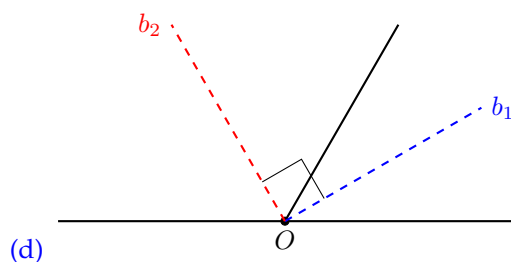
Ipotesi:

- α e β sono due angoli consecutivi ed esplementari ($\alpha + \beta = 360^\circ$)
- b_1 e b_2 sono le rispettive bisettrici

Tesi: L'angolo compreso tra le bisettrici b_1 e b_2 è piatto ($\epsilon = 180^\circ$)

Dimostrazione:

L'angolo ϵ formato dalle due bisettrici è pari alla somma delle metà dei due angoli di partenza: $\epsilon = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Raccogliendo a fattor comune otteniamo $\epsilon = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Sostituendo l'ipotesi per cui la somma degli angoli è 360° si ha: $\epsilon = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$. Poiché l'angolo tra le bisettrici è di 180° , esse giacciono sulla stessa retta formandovi un angolo piatto..



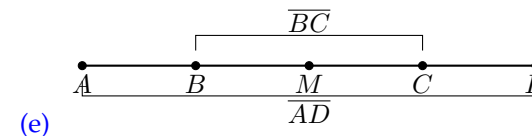
Ipotesi:

- α e β sono due angoli consecutivi
- Le bisettrici dei due angoli sono perpendicolari, ovvero formano un angolo di 90°

Tesi: α e β sono angoli supplementari ($\alpha + \beta = 180^\circ$)

Dimostrazione:

Siano $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ e $\delta = \frac{\beta}{2}$ le rispettive metà individuate dalle bisettrici. Per ipotesi, le bisettrici sono perpendicolari, per cui formano un angolo retto: $\gamma + \delta = 90^\circ$. Sostituendo le definizioni di γ e δ si ottiene $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$, da cui, moltiplicando per 2 ambo i membri, ricaviamo $\alpha + \beta = 180^\circ$. Due angoli la cui somma è 180° sono per definizione supplementari..



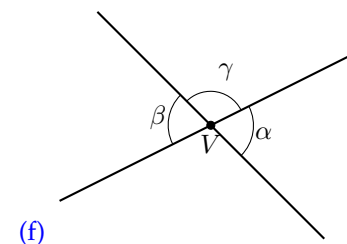
Ipotesi:

- I punti A, B, C, D appartengono alla stessa retta
- Il segmento $\overline{AD}$ e il segmento $\overline{BC}$ hanno lo stesso punto medio M

Tesi: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Dimostrazione:

Sia M il punto medio comune ai segmenti $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Per definizione di punto medio, avremo le seguenti congruenze: $\overline{AM} \cong \overline{MD}$ e $\overline{BM} \cong \overline{MC}$. Visto che la differenza di segmenti congruenti produce segmenti congruenti, possiamo scrivere: $\overline{AM} - \overline{BM} \cong \overline{MD} - \overline{MC}$. Poiché i punti sono disposti in modo tale che M sia interno sia ad $\overline{AD}$ che a $\overline{BC}$, la porzione $\overline{AM} - \overline{BM}$ corrisponde al segmento $\overline{AB}$, mentre $\overline{MD} - \overline{MC}$ corrisponde a $\overline{CD}$. Otteniamo quindi $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, che è la tesi che volevamo dimostrare..



Ipotesi:

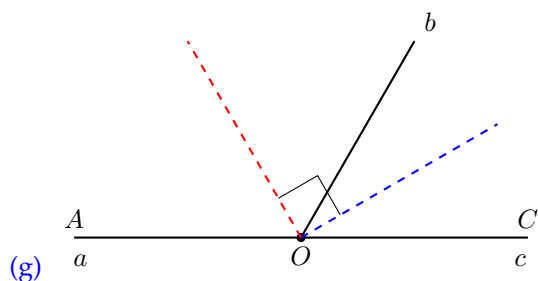
- α e β sono due angoli opposti al vertice

Tesi: $\alpha \cong \beta$

Dimostrazione:

Sia γ un angolo ad essi adiacente. Poiché α e γ giacciono sulla stessa retta formando un angolo piatto, risultano supplementari: $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Allo

stesso modo, β e γ sono adiacenti su un'altra retta e dunque supplementari: $\beta + \gamma = 180^\circ$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, si ottiene l'equazione $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Sottraendo l'angolo γ da entrambi i membri, si arriva alla tesi: $\alpha \cong \beta$.



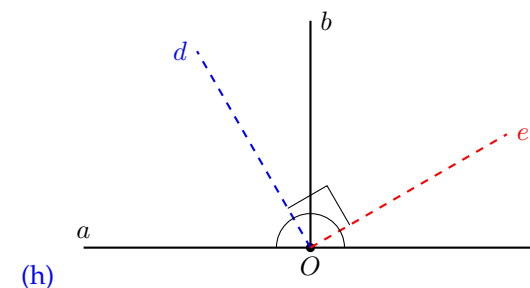
Ipotesi:

- Semirette a, b, c con origine comune in O e punti $A \in a$ e $C \in c$
- Le bisettrici degli angoli consecutivi aOb e bOc sono perpendicolari

Tesi: I punti A, O, C sono allineati

Dimostrazione:

Chiamiamo $\alpha = aOb$ e $\beta = bOc$ i due angoli consecutivi. Le rispettive bisettrici dividono tali angoli a metà. L'angolo formato dalle due bisettrici sarà pari alla somma delle due metà: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Poiché per ipotesi le bisettrici sono perpendicolari, tale somma vale 90° : $\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ$, da cui $\alpha + \beta = 180^\circ$. Essendo gli angoli aOb e bOc consecutivi e la loro somma equivalente a un angolo piatto (180°), i loro lati non comuni a e c giacciono sulla medesima retta. Poiché $A \in a$ e $C \in c$, ed entrambe le semirette hanno l'origine in comune O , i punti A, O, C appartengono alla stessa retta e sono quindi allineati.



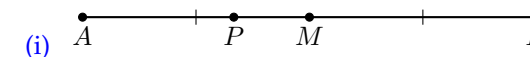
Ipotesi:

- Semirette a, b, c uscenti da O tali che $a \perp b$ e $b \perp c$
- Semirette d, e uscenti da O interne agli angoli aOb e bOc , tali che $d \perp e$

Tesi: I quattro angoli formati (aOd, dOb, bOe, eOc) sono a coppie congruenti

Dimostrazione:

Le semirette d ed e suddividono i due angoli retti in quattro angoli più piccoli. Definiamo $\alpha = aOd$, $\beta = dOb$, $\gamma = bOe$, e $\delta = eOc$. Per le ipotesi di perpendicolarità, ricaviamo tre relazioni: 1) $a \perp b \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$; 2) $b \perp c \Rightarrow \gamma + \delta = 90^\circ$; 3) $d \perp e \Rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ$. Confrontando la prima e la terza uguaglianza otteniamo $\alpha + \beta = \beta + \gamma$, da cui, sottraendo β ad ambo i membri, risulta $\alpha \cong \gamma$. Confrontando la seconda e la terza uguaglianza otteniamo $\gamma + \delta = \beta + \gamma$, da cui, sottraendo γ , risulta $\beta \cong \delta$. I quattro angoli formati sono quindi a coppie congruenti.



Ipotesi:

- M è punto medio del segmento $\overline{AB}$ ($\overline{AM} \cong \overline{MB}$)
- P è un punto appartenente al segmento $\overline{AM}$

Tesi: $\overline{PB} - \overline{AP} \cong 2\overline{PM}$

Dimostrazione:

Per la definizione di punto medio avremo

$$\overline{AM} \cong \overline{MB}$$

Tali segmenti possono essere riscritti come somma o differenza di porzioni:

$$\overline{AP} + \overline{PM} \cong \overline{PB} - \overline{PM}$$

da cui si ottiene spostando $\overline{PM}$ al primo membro e $\overline{AP}$ al secondo:

$$\overline{PM} + \overline{PM} \cong \overline{PB} - \overline{AP}$$

$$2\overline{PM} \cong \overline{PB} - \overline{AP}$$

Che corrisponde alla tesi che si voleva dimostrare..

2.1 dimostrazione

2.1.1 dimostrazione sui triangoli