

**Problema: EU0007 - Geometria piana - dimostrazioni con criteri di congruenza e teoremi sul triangolo isoscele**

**Testo** [EU0007] [1½★ 2½🕒 1📖] Svolgi la seguente dimostrazione.

- (a) Sia dato un triangolo  $\triangle ABC$ . Traccia la bisettrice dell'angolo  $\angle BAC$  che interseca il lato opposto  $BC$  nel punto  $D$ . Sapendo che  $\angle ADB$  è un angolo retto ( $\angle ADB \cong 90^\circ$ ), dimostra che il triangolo  $\triangle ABC$  è isoscele.
- (b) Sia  $\triangle ABC$  un triangolo isoscele sulla base  $BC$ . Dimostra che le bisettrici degli angoli alla base,  $BB'$  e  $CC'$  (con  $B'$  su  $AC$  e  $C'$  su  $AB$ ), sono congruenti.
- (c) Siano  $AB$  e  $CD$  due segmenti che si intersecano nel loro punto medio comune  $M$ . Dimostra che il segmento  $AC$  è congruente al segmento  $DB$ .
- (d) Sia  $\triangle ABC$  un triangolo isoscele sulla base  $BC$ . Dimostra che le mediane relative ai lati obliqui,  $BK$  e  $CN$  (con  $K$  su  $AC$  e  $N$  su  $AB$ ), sono congruenti.
- (e) Sia data la retta  $r$  e un punto  $P$  esterno a essa. Traccia la perpendicolare  $\overline{PH}$  alla retta  $r$  ( $H$  su  $r$ ). Traccia sulla retta  $r$  due punti  $A$  e  $C$ , opposti rispetto ad  $H$  tali che  $PH$  sia bisettrice dell'angolo  $\angle APC$ . Dimostra che i segmenti  $\overline{HA}$  e  $\overline{HC}$  sono congruenti.
- (f) Dato un triangolo  $\triangle ABC$  isoscele sulla base  $\overline{BC}$  si tracci la bisettrice dell'angolo in  $A$ . Si prenda poi un punto  $D$  su tale bisettrice. Si dimostri che il triangolo  $\triangle BCD$  è isoscele.
- (g) Dato il triangolo equilatero  $\triangle ABC$ , considera i punti  $P$  su  $\overline{AB}$ ,  $Q$  su  $\overline{BC}$ , e  $R$  su  $\overline{AC}$  tali che  $\overline{BQ} \cong \overline{CR} \cong \overline{AP}$ . Dimostra che i segmenti  $\overline{CP}$ ,  $\overline{BR}$  e  $\overline{AQ}$  sono congruenti.
- (h) Sia  $xOy$  un angolo qualsiasi. Sulla semiretta  $Ox$  si prendano i punti  $A$  e  $B$  (con  $\overline{OA} < \overline{OB}$ ) e sulla semiretta  $Oy$  si prendano i punti  $C$  e  $D$  (con  $\overline{OC} < \overline{OD}$ ) tali che  $\overline{OA} \cong \overline{OC}$  e  $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ . Dimostra che i segmenti  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  sono congruenti.
- (i) Dato un triangolo  $\triangle ABC$  isoscele sulla base  $\overline{BC}$  si tracci la bisettrice dell'angolo in  $A$ . Si prenda poi un punto  $D$  su tale bisettrice. Si dimostri che il triangolo  $\triangle BCD$  è isoscele.
- (j) Dato un triangolo  $\triangle ABC$  isoscele sulla base  $\overline{BC}$  si tracci la bisettrice dell'angolo in  $A$ . Si prenda poi un punto  $D$  su tale bisettrice. Si dimostri che la semiretta  $AD$  è anche bisettrice dell'angolo  $\angle BDC$ .
- (k) Dato un triangolo  $\triangle ABC$  isoscele sulla base  $\overline{BC}$  si tracci la bisettrice dell'angolo in  $A$ . Si prenda poi un punto  $D$  su tale bisettrice. Presi poi due punti  $E$  ed  $F$  rispettivamente su  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , tali che  $AE \cong AF$ , si dimostri che il triangolo  $\triangle EFD$  è isoscele.
- (l) Dato un segmento  $\overline{AB}$  si traccino dai vertici due semirette, dalla parte opposta rispetto al segmento, che con esso formano angoli congruenti. Si tracci la retta passante per il punto medio  $M$  del segmento e secante le due semirette nei punti  $C$  e  $D$ . Dimostra che i triangoli  $\triangle ACM$  e  $\triangle BDM$  che si sono formati sono congruenti.
- (m) Dato un triangolo  $\triangle ABC$ , sia  $M$  il punto medio del lato  $BC$ . Prolunga la mediana  $AM$  di un segmento  $MD \cong AM$ . Dimostra che il segmento  $CD$  è congruente al segmento  $AB$ .

**Spiegazione** Per svolgere una dimostrazione devi per prima cosa segnarti in modo chiaro quali sono le ipotesi e quale la tesi. Utilizzando teoremi noti, devi partire dalle affermazioni che hai come ipotesi per arrivare, passaggio dopo passaggio, ad affermare la tesi. In questo esercizio sono raccolte dimostrazioni che per essere svolte devi applicare i criteri di congruenza dei triangoli e i teoremi sul triangolo isoscele. Presto aggiungerò anche i disegni alle spiegazioni. Voi però **dovete** fare il disegno prima di leggere la spiegazione. **Dovete** poi indicare chiaramente le ipotesi e la tesi.

**Svolgimento** Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

**Ipotesi:**

- $AD$  bisettrice di  $\angle BAC$  ( $\angle BAD \cong \angle CAD$ );
- (a) •  $AD \perp BC$  ( $\angle ADB \cong 90^\circ$ ).

**Tesi:**

- $\triangle ABC$  è isoscele ( $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ).

**Dimostrazione:**

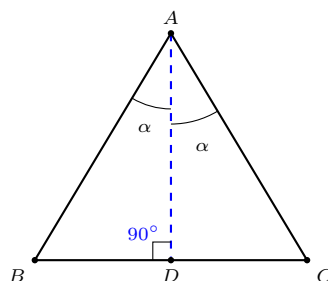
L'angolo  $\angle BDA = 90^\circ$  in quanto è il supplementare di un angolo retto. Consideriamo i triangoli  $\triangle ADB$  e  $\triangle ADC$ . Essi hanno

- (a) i rispettivi angoli in  $D$  entrambi retti;
- (b) il lato  $\overline{AD}$  in comune;
- (c) gli angoli  $\angle CAD \cong \angle BAD$  congruenti per ipotesi.

I due triangoli sono quindi congruenti per il secondo principio di congruenza, ed in particolare hanno i lati

$$\overline{AB} \cong \overline{AC}$$

Il triangolo  $\triangle ABC$  ha quindi due lati congruenti ed è per questo isoscele.  
C.V.D. .



**Ipotesi:**

- $\triangle ABC$  isoscele su base  $BC$  ( $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ,  $\angle B \cong \angle C$ );
- (b) •  $BB'$  bisettrice di  $\angle B$ ;
- $CC'$  bisettrice di  $\angle C$ .

**Tesi:**

- $\overline{BB'} \cong \overline{CC'}$ .

**Dimostrazione:**

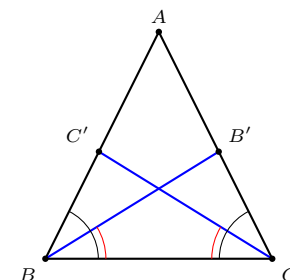
Consideriamo i triangoli  $\triangle CBB'$  e  $\triangle BCC'$ . Essi hanno

- (a) gli angoli  $\angle B \cong \angle C$  perché angoli alla base di un triangolo isoscele;
- (b) il lato  $\overline{BC}$  in comune;
- (c) gli angoli  $\angle BCC' \cong \angle CBB'$  perché sono la metà di due angoli tra loro congruenti.

I due triangoli sono quindi congruenti per il secondo criterio di congruenza, ed in particolare i lati corrispondenti

$$\overline{CC'} \cong \overline{BB'}$$

C.V.D. .



**Ipotesi:**

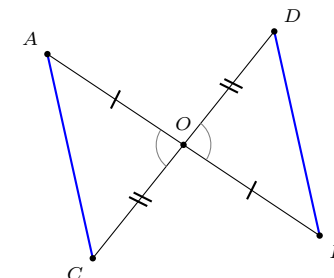
- $M$  punto medio di  $AB$  ( $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ );
- (c) •  $M$  punto medio di  $CD$  ( $\overline{CM} \cong \overline{MD}$ ).

**Tesi:**

- $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ .

**Dimostrazione:**

Consideriamo i triangoli  $\triangle AMC$  e  $\triangle BMD$ . Essi hanno



- (a) gli angoli in  $M$  congruenti perché opposti al vertice;
- (b) i lati  $\overline{AM} \cong \overline{MB}$  poiché  $M$  è il punto medio del segmento  $\overline{AB}$ ;
- (c) i lati  $\overline{CM} \cong \overline{MD}$  poiché  $M$  è il punto medio del segmento  $\overline{CD}$ .

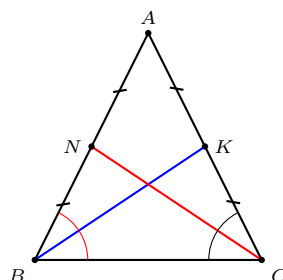
I due triangoli sono quindi congruenti per il primo criterio di congruenza, ed in particolare sono congruenti i lati corrispondenti

$$\overline{AC} \cong \overline{BD}$$

C.V.D. .

### Ipotesi:

- $\triangle ABC$  isoscele su base  $BC$  ( $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ );
- $BK$  mediana di  $AC$ ;
- (d) •  $CN$  mediana di  $AB$ .



### Tesi:

- $\overline{BK} \cong \overline{CN}$ .

### Dimostrazione:

Consideriamo i triangoli  $\triangle BKC$  e  $\triangle CNB$ . Essi hanno

- (a) il lato  $\overline{BC}$  in comune;
- (b) i lati  $\overline{BN} \cong \overline{CK}$  poiché  $N$  e  $K$  sono i punti medi di segmenti tra loro congruenti per ipotesi;
- (c) gli angoli  $\angle NBC \cong \angle KCB$  in quanto angoli alla base di un triangolo isoscele.

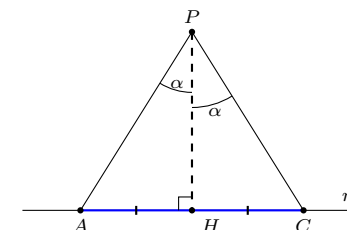
I due triangoli sono quindi congruenti per il primo criterio di congruenza, ed in particolare sono congruenti i lati corrispondenti

$$\overline{BK} \cong \overline{CN}$$

C.V.D. .

### Ipotesi:

- $PH \perp r$  in  $H$ ;
- $A, C \in r$  da parti opposte rispetto ad  $H$ ;
- (e) •  $PH$  bisettrice di  $\angle APC$ .



### Tesi:

- $\overline{HA} \cong \overline{HC}$ .

### Dimostrazione:

Considero i triangoli  $\triangle HPC$  e  $\triangle HPA$ . Essi hanno

- (a) il lato  $\overline{PH}$  in comune;
- (b) gli angoli  $\angle CHP \cong \angle AHP$  in quanto supplementari ed uno di essi è retto.
- (c) gli angoli  $\angle CPH \cong \angle APH$  in quanto la semiretta su cui si trova il segmento  $\overline{PH}$  è bisettrice dell'angolo in  $P$ .

I due triangoli sono quindi congruenti, ed in particolare lo sono i segmenti:  
 $\overline{AH} \cong \overline{HC}$  C.V.D. .

### Ipotesi:

- $\triangle ABC$  isoscele ( $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ );
- $AD$  bisettrice di  $\angle BAC$ ;
- (f) •  $D$  appartiene alla bisettrice  $AD$ .

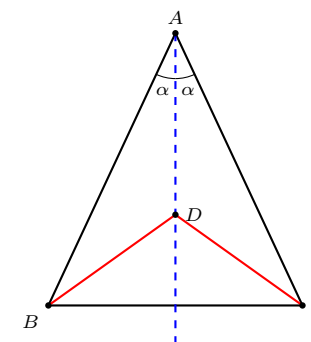
### Tesi:

- $\triangle BCD$  è isoscele ( $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ ).

### Dimostrazione:

Consideriamo  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACD$ . Hanno:

- (a)  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$  per ipotesi;



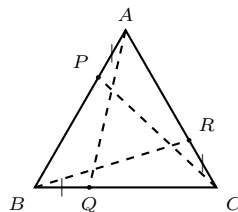
(b)  $\overline{AD}$  in comune;

(c)  $\angle BAD \cong \angle CAD$  per def. di bisettrice.

Sono congruenti per il 1° criterio. Ne segue  $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ , quindi  $\triangle BCD$  è isoscele. C.V.D. .

**Ipotesi:**

- (g)
- $\triangle ABC$  equilatero;
  - $P \in AB, Q \in BC, R \in AC$ ;
  - $\overline{AP} \cong \overline{BQ} \cong \overline{CR}$ .



**Tesi:**

- $\overline{CP} \cong \overline{BR} \cong \overline{AQ}$ .

**Dimostrazione:**

Consideriamo i triangoli  $\triangle APC$ ,  $\triangle BQA$  e  $\triangle CRB$ . Essi hanno

(a) i lati  $\overline{AP} \cong \overline{BQ} \cong \overline{CR}$  per ipotesi;

(b) gli angoli in  $A$ , in  $B$ , in  $C$  congruenti per ipotesi in quanto  $\triangle ABC$  è equilatero.

(c) i lati  $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$  sempre per ipotesi;

I tre triangoli sono quindi congruenti e lo sono di conseguenza i segmenti corrispondenti:  $\overline{CP} \cong \overline{BR} \cong \overline{AQ}$  C.V.D. .

**Ipotesi:**

- $A, B \in Ox$  ( $\overline{OA} < \overline{OB}$ );
- $C, D \in Oy$  ( $\overline{OC} < \overline{OD}$ );
- (h) •  $\overline{OA} \cong \overline{OC}$ ;
- $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ .

**Tesi:**

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ .

**Dimostrazione:**

Consideriamo i triangoli  $\triangle OAD$  e  $\triangle OCB$ . Essi hanno:

- (a) l'angolo in  $O$  in comune;
- (b)  $\overline{OA} \cong \overline{OC}$  per ipotesi;
- (c)  $\overline{OD} \cong \overline{OB}$  per ipotesi.

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di conseguenza, i lati terzi sono quindi congruenti, ovvero  $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ . C.V.D. .

**Ipotesi:**

- (i)
- $\triangle ABC$  isoscele su base  $BC$  ( $AB \cong AC$ );
  - $AD$  bisettrice dell'angolo  $\angle A$  ( $\angle BAD \cong \angle CAD$ );

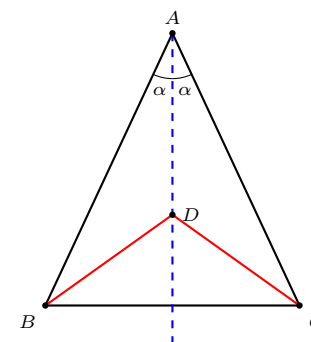
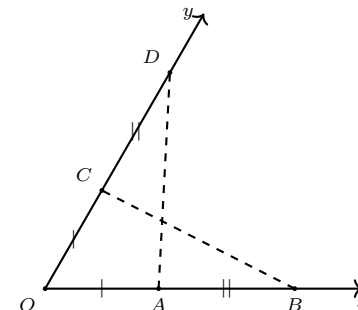
**Tesi:**

- $\triangle BCD$  isoscele ( $BD \cong CD$ )

**Dimostrazione:**

Consideriamo  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACD$ . Essi hanno:

- (a)  $AB \cong AC$  per ipotesi;



(b)  $AD$  in comune;

(c)  $\angle BAD \cong \angle CAD$  per definizione di bisettrice.

Sono congruenti per il primo criterio (LAL). Ne segue  $BD \cong CD$ , quindi  $\triangle BCD$  è isoscele. C.V.D. .

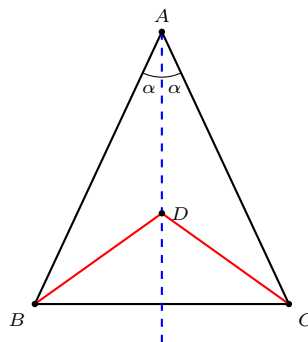
### Ipotesi:

- $\triangle ABC$  isoscele su base  $BC$  ( $AB \cong AC$ );
- $AD$  bisettrice dell'angolo  $\angle A$  ( $\angle BAD \cong \angle CAD$ );

(j)

### Tesi:

- $\triangle BCD$  isoscele ( $BD \cong CD$ )



### Dimostrazione:

Consideriamo  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACD$ . Essi hanno:

(a)  $AB \cong AC$  per ipotesi;

(b)  $AD$  in comune;

(c)  $\angle BAD \cong \angle CAD$  per definizione di bisettrice.

Sono congruenti per il primo criterio (LAL). Ne segue che anche i corrispondenti angoli esterni al triangolo in  $D$  sono congruenti. Quindi la semiretta  $AD$  è anche bisettrice dell'angolo  $\angle BDC$  C.V.D. .

### Ipotesi: Ipotesi:

- $\triangle ABC$  isoscele su base  $BC$  ( $AB \cong AC$ );
- $AD$  bisettrice dell'angolo  $\angle A$  ( $\angle BAD \cong \angle CAD$ );
- $E \in AB, F \in AC$  tali che  $AE \cong AF$ .

(k)

### Tesi:

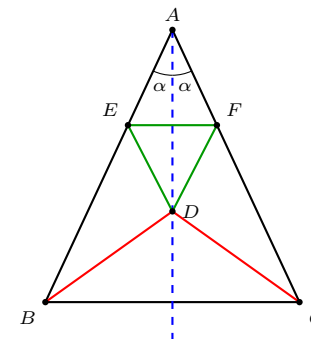
- $\triangle EFD$  isoscele ( $ED \cong FD$ ).

### Dimostrazione:

Consideriamo  $\triangle ADE$  e  $\triangle ADF$ . essi hanno

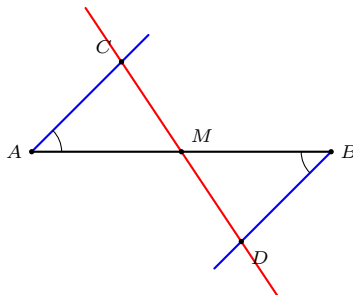
- $AD$  in comune
- $\angle EAD \cong \angle FAD$  per ipotesi ( $AD$  è infatti la bisettrice dell'angolo  $\angle A$ )
- $AE \cong AF$  (per ipotesi)

Essi sono congruenti per il primo criterio (LAL), dunque i lati corrispondenti sono congruenti:  $DE \cong DF$ . Il triangolo  $\triangle EFD$  è quindi isoscele. C.V.D. .



**Ipotesi:**

- $M$  punto medio di  $AB$  ( $AM \cong MB$ );
- Semiretta  $r$  uscente da  $A$  e semiretta  $s$  uscente da  $B$ , poste da parti opposte rispetto ad  $AB$ ;
- $\angle MAC \cong \angle MBD$ ;
- Retta passante per  $M$  che interseca  $r$  in  $C$  e  $s$  in  $D$ .



(l)

**Tesi:**

- $\triangle ACM \cong \triangle BDM$ ;

**Dimostrazione:**

Consideriamo i triangoli  $\triangle ACM$  e  $\triangle BDM$ . Essi hanno:

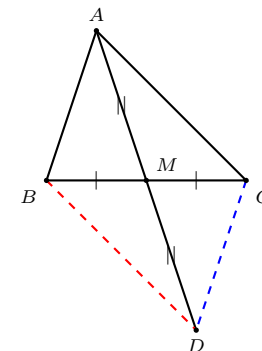
- (a)  $AM \cong MB$  per ipotesi ( $M$  è punto medio);
- (b)  $\angle CAM \cong \angle DBM$  per ipotesi;
- (c)  $\angle AMC \cong \angle BMD$  in quanto angoli opposti al vertice.

I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio (ALA). Di conseguenza, i lati corrispondenti sono congruenti:  $CM \cong MD$  e  $AC \cong BD$ . C.V.D. .

**Ipotesi:**

- $\triangle ABC$  triangolo qualsiasi;
- $M$  punto medio di  $BC$  ( $BM \cong MC$ );
- $D$  sul prolungamento di  $AM$  tale che  $AM \cong MD$ .

(m)

**Tesi:**

- $CD \cong AB$ ;

**Dimostrazione:**

Consideriamo i triangoli  $\triangle AMB$  e  $\triangle DMC$ . Essi hanno:

- (a)  $AM \cong MD$  per costruzione;
- (b)  $BM \cong MC$  per ipotesi ( $M$  è punto medio);
- (c)  $\angle AMB \cong \angle DMC$  in quanto angoli opposti al vertice.

I due triangoli sono quindi congruenti per il primo criterio di congruenza (LAL). Di conseguenza, i loro lati e angoli corrispondenti sono congruenti, ed in particolare  $AB \cong CD$ . C.V.D..

**Problema:** EU0101 - Geometria piana - dimostrazioni con criteri di congruenza e teoremi sul triangolo isoscele - esercizi base/intermedi

**Testo** [EU0101] [2★ 3🕒 1📖] Svolgi la seguente dimostrazione.

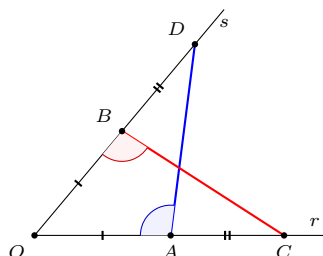
- (a) Siano date due semirette  $r$  e  $s$  di origine in  $O$ . A partire da  $O$ , si prendano i punti  $A$  su  $r$  e  $B$  su  $s$  tali che  $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ . Successivamente, si prendano  $C$  su  $r$  e  $D$  su  $s$ , sui prolungamenti di  $OA$  e  $OB$  rispettivamente, tali che  $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ . Dimostra che il segmento  $AD$  è congruente al segmento  $BC$ . Dimostra anche che l'angolo  $\angle OAD$  è congruente all'angolo  $\angle OBC$ .
- (b) Due triangoli,  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , sono tali che i lati  $AB \cong A'B'$ ,  $BC \cong B'C'$  e  $AC \cong A'C'$ . Dimostra che anche le mediane relative ai lati congruenti, ad esempio la mediana  $AM$  (relativa a  $BC$ ) e  $A'M'$  (relativa a  $B'C'$ ), sono congruenti.
- (c) Dato il triangolo equilatero  $\triangle ABC$ , traccia sui suoi tre lati rispettivamente i punti  $D$ ,  $E$  ed  $F$  in modo da formare tre segmenti congruenti  $\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$ . Dimostra che il triangolo  $\triangle DEF$  è equilatero.
- (d) Sia  $ABC$  un triangolo isoscele di base  $BC$ . Sui prolungamenti della base  $BC$ , si prendano due punti  $D$  (dalla parte di  $B$ ) ed  $E$  (dalla parte di  $C$ ) tali che  $DB \cong CE$ . Dimostra che il triangolo  $ADE$  è isoscele.
- (e) Sia  $ABC$  un triangolo equilatero. Prolunga i lati  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  rispettivamente dalla parte di  $B$ , di  $C$  e di  $A$  di tre segmenti congruenti  $BD \cong CE \cong AF$ . Dimostra che il triangolo  $DEF$  è equilatero.

**Spiegazione** Per svolgere una dimostrazione devi per prima cosa segnarti in modo chiaro quali sono le ipotesi e quale la tesi. Utilizzando teoremi noti, devi partire dalle affermazioni che hai come ipotesi per arrivare, passaggio dopo passaggio, ad affermare la tesi. In questo esercizio sono raccolte dimostrazioni che per essere svolte devi applicare i criteri di congruenza dei triangoli e i teoremi sul triangolo isoscele. Presto aggiungerò anche i disegni alle spiegazioni. Voi però **dovete** fare il disegno prima di leggere la spiegazione. **Dovete** poi indicare chiaramente le ipotesi e la tesi.

**Svolgimento** Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

**Ipotesi:**

- (a)
- $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ;
  - $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ ;
  - $A, C \in r$ ;
  - $B, D \in s$ .



**Tesi:**

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ;
- $\angle OAD \cong \angle OBC$ .

**Dimostrazione:**

Si considerino i triangoli  $\triangle COB$  e  $\triangle DOA$ . Essi hanno

- l'angolo nel vertice  $O$  in comune;
- i lati  $\overline{OA} \cong \overline{OB}$  per ipotesi;
- i lati  $\overline{OC} \cong \overline{OD}$  perché somme di segmenti congruenti. Infatti

$$\overline{OC} \cong \overline{OA} + \overline{AC} \cong \overline{OB} + \overline{BD} \cong \overline{OD}$$

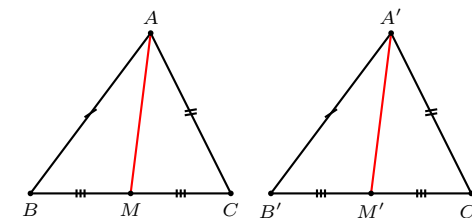
I due triangoli sono quindi congruenti per il primo criterio di congruenza. In particolare sono tra loro congruenti i lati corrispondenti opposti all'angolo in  $O$

$$\overline{AD} \cong \overline{BC}$$

C.V.D. .

**Ipotesi:**

- (b)
- $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ,  $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ,  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ ;
  - $AM$  mediana relativa a  $BC$ ;
  - $A'M'$  mediana relativa a  $B'C'$ .



**Tesi:**

- $\overline{AM} \cong \overline{A'M'}$ .

**Dimostrazione:**

Per ipotesi i triangoli  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  per il terzo criterio di congruenza, ed in particolare hanno tra loro congruenti i rispettivi angoli  $\angle A \cong \angle A'$ ,  $\angle B \cong \angle B'$  e  $\angle C \cong \angle C'$ .

Consideriamo i triangoli  $\triangle AMC$  e  $\triangle A'M'C'$ . Essi hanno

- il lato  $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$  per ipotesi;
- i lati  $\overline{CM} \cong \overline{C'M'}$  poiché  $M$  e  $M'$  sono i punti medi di segmenti tra loro congruenti per ipotesi;
- gli angoli  $\angle C \cong \angle C'$  come precedentemente dimostrato.

I due triangoli sono quindi congruenti per il primo criterio di congruenza, ed in particolare sono congruenti i lati corrispondenti

$$\overline{AM} \cong \overline{A'M'}$$

C.V.D. .

**Ipotesi:**

- (c)
- $\triangle ABC$  equilatero;
  - $D \in AB, E \in BC, F \in AC$ ;
  - $\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$ .

**Tesi:**

- $\triangle DEF$  equilatero ( $\overline{DF} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF}$ ).

**Dimostrazione:**

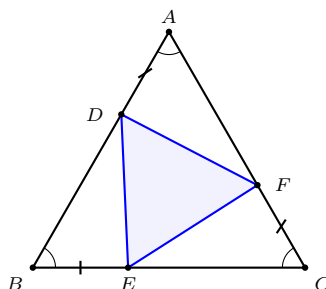
Consideriamo i tre triangoli  $\triangle ADF$ ,  $\triangle BED$  e  $\triangle CFE$ . Essi hanno:

- (a)  $\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$  per ipotesi;
- (b)  $\angle A \cong \angle B \cong \angle C = 60^\circ$  poiché  $\triangle ABC$  è equilatero;
- (c)  $\overline{AF} \cong \overline{BD} \cong \overline{CE}$  per differenza di segmenti congruenti (lato del triangolo meno il segmento dato).

I tre triangoli sono quindi congruenti per il 1° criterio (LAL). Di conseguenza, i terzi lati sono congruenti tra loro:

$$\overline{DF} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF}$$

Avendo tre lati congruenti, il triangolo  $\triangle DEF$  è equilatero. C.V.D. .

**Ipotesi:**

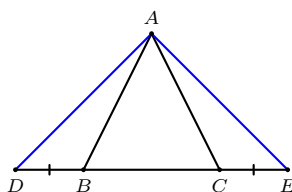
- (d)
- $\triangle ABC$  isoscele ( $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ );
  - $D, B, C, E$  allineati in quest'ordine;
  - $\overline{DB} \cong \overline{CE}$ .

**Tesi:**

- $\triangle ADE$  isoscele ( $\overline{AD} \cong \overline{AE}$ ).

**Dimostrazione:**

Consideriamo i triangoli  $\triangle ABD$  e  $\triangle ACE$ . Essi hanno:



- (a)  $AB \cong AC$  per ipotesi (triangolo isoscele);
- (b)  $DB \cong CE$  per ipotesi;
- (c)  $\angle ABD \cong \angle ACE$  perché supplementari degli angoli alla base del triangolo isoscele (che sono congruenti).

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio (LAL). Di conseguenza, i lati  $AD \cong AE$ . Il triangolo  $\triangle ADE$  è quindi isoscele. C.V.D. .

**Ipotesi:**

- (e)
- $\triangle ABC$  equilatero;
  - $A, B, D$  allineati;
  - $B, C, E$  allineati;
  - $C, A, F$  allineati;
  - $\overline{BD} \cong \overline{CE} \cong \overline{AF}$ .

**Tesi:**

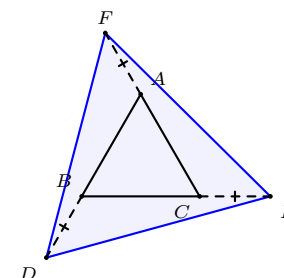
- $\triangle DEF$  equilatero ( $\overline{FD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF}$ ).

**Dimostrazione:**

Consideriamo i tre triangoli esterni  $\triangle FAD$ ,  $\triangle DBE$  e  $\triangle ECF$ . Essi hanno:

- (a)  $AF \cong BD \cong CE$  per costruzione;
- (b)  $AD \cong BE \cong CF$  perché somma di segmenti congruenti (lato del triangolo equilatero + prolungamento);
- (c)  $\angle FAD \cong \angle DBE \cong \angle ECF = 120^\circ$  (angoli esterni di un triangolo equilatero).

I tre triangoli sono congruenti per il primo criterio (LAL). Di conseguenza le basi  $FD \cong DE \cong EF$ . Il triangolo  $DEF$  è equilatero. C.V.D. .





**Problema:** EU0016 - Geometria piana - dimostrazioni con criteri di congruenza e teoremi sul triangolo isoscele

**Testo** [EU0016] [3★ 4🕒 1📖] Svolgi la seguente dimostrazione.

- (a) Siano  $ABC$  e  $ABD$  due triangoli isosceli situati da parti opposte rispetto alla base comune  $AB$ . Dimostra che la retta  $CD$  è bisettrice degli angoli al vertice  $\angle ACB$  e  $\angle ADB$  e che  $CD$  è perpendicolare ad  $AB$ .
- (b) Dato il triangolo equilatero  $\triangle ABC$ , considera i punti  $P$  su  $\overline{AB}$ ,  $Q$  su  $\overline{BC}$ , e  $R$  su  $\overline{AC}$  tali che  $\overline{BQ} \cong \overline{CR} \cong \overline{AP}$ . I segmenti  $\overline{AQ}$  e  $\overline{BR}$  si intersecano in  $D$ . I segmenti  $\overline{BR}$  e  $\overline{CP}$  si intersecano in  $E$ . I segmenti  $\overline{CP}$  e  $\overline{AQ}$  si intersecano in  $F$ . Dimostra che i triangoli  $\triangle APF$ ,  $\triangle BQD$ , e  $\triangle CRE$ , sono tutti congruenti. Dimostra che il triangolo  $\triangle DEF$  è equilatero.
- (c) Dato un segmento  $\overline{AB}$  si traccino dai vertici due semirette, dalla parte opposta rispetto al segmento, che con esso formano angoli congruenti. Si tracci la ret-

ta passante per il punto medio  $M$  del segmento e secante le due semirette nei punti  $C$  e  $D$ . Dimostra che sono congruenti i triangoli  $\triangle BCM$  e  $\triangle ADM$ .

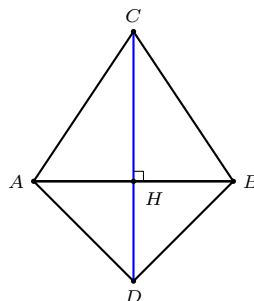
- (d) In un triangolo  $\triangle ABC$ , isoscele sulla base  $\overline{AB}$ , traccia le mediane  $\overline{AN}$  e  $\overline{BM}$  e indica con  $P$  il loro punto di intersezione. Dimostra che  $\overline{CP}$  è la bisettrice dell'angolo  $\angle C$ .
- (e) Sia  $ABC$  un triangolo isoscele sulla base  $BC$ . Si prendano sui lati obliqui  $AB$  e  $AC$  rispettivamente i punti  $P$  e  $Q$  tali che  $AP \cong AQ$ . Si dimostri che i segmenti  $BQ$  e  $CP$  sono congruenti e che si intersecano in un punto  $K$  che appartiene alla bisettrice dell'angolo  $A$ .

**Spiegazione** Per svolgere una dimostrazione devi per prima cosa segnarti in modo chiaro quali sono le ipotesi e quale la tesi. Utilizzando teoremi noti, devi partire dalle affermazioni che hai come ipotesi per arrivare, passaggio dopo passaggio, ad affermare la tesi. In questo esercizio sono raccolte dimostrazioni che per essere svolte devi applicare i criteri di congruenza dei triangoli e i teoremi sul triangolo isoscele.

**Svolgimento** Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

**Ipotesi:**

- $\triangle ABC$  isoscele su base  $AB$  ( $AC \cong BC$ );
- $\triangle ABD$  isoscele su base  $AB$  ( $AD \cong BD$ );
- (a) •  $C$  e  $D$  situati da parti opposte rispetto alla retta  $AB$ .



**Tesi:**

- $CD$  bisettrice di  $\angle ACB$  e  $\angle ADB$ ;
- $CD \perp AB$ .

**Dimostrazione:**

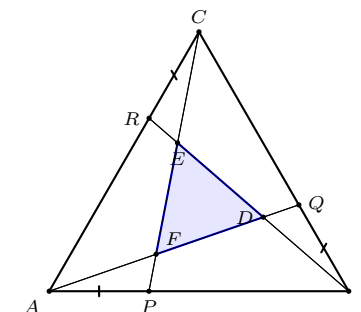
Consideriamo i triangoli  $\triangle ACD$  e  $\triangle BCD$ . Essi hanno:

- $AC \cong BC$  (lati obliqui del primo triangolo isoscele);
- $AD \cong BD$  (lati obliqui del secondo triangolo isoscele);
- $CD$  lato in comune.

I triangoli sono congruenti per il terzo criterio (LLL). Ne segue che gli angoli corrispondenti sono congruenti:  $\angle ACD \cong \angle BCD$  (quindi  $CD$  è bisettrice in  $C$ ) e  $\angle ADC \cong \angle BDC$  (quindi  $CD$  è bisettrice in  $D$ ). Nel triangolo isoscele  $ABC$ , la bisettrice dell'angolo al vertice coincide sempre con l'altezza relativa alla base, dunque deduciamo che  $CD \perp AB$ . C.V.D. .

**Ipotesi:**

- $\triangle ABC$  equilatero;
- $P \in AB, Q \in BC, R \in AC$  tali che  $AP \cong BQ \cong CR$ ;
- (b) •  $D = AQ \cap BR, E = BR \cap CP, F = CP \cap AQ$ .



**Tesi:**

- $\triangle APF \cong \triangle BQD \cong \triangle CRE$ ;
- $\triangle DEF$  equilatero.

**Dimostrazione:**

Consideriamo prima i triangoli  $\triangle ABQ, \triangle BCR$  e  $\triangle CAP$ .

Essi hanno:

- $AB \cong BC \cong CA$  (triangolo equilatero)
- $BQ \cong CR \cong AP$  (per ipotesi)
- gli angoli compresi  $\angle B \cong \angle C \cong \angle A = 60^\circ$ .

Per il primo criterio (LAL),  $\triangle ABQ \cong \triangle BCR \cong \triangle CAP$ .

Di conseguenza si ha che sono congruenti i seguenti segmenti

$$AQ \cong BR \cong CP$$

ed i seguenti angoli

$$\angle BAQ \cong \angle CBR \cong \angle ACP$$

$$\angle AQB \cong \angle BRC \cong \angle CPA$$

Consideriamo ora i triangoli  $\triangle APF, \triangle BQD$  e  $\triangle CRE$ .

Essi hanno:

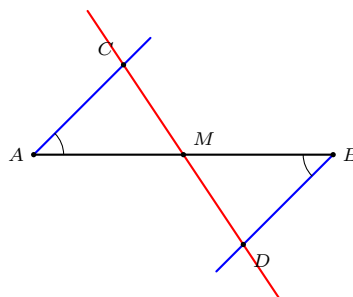
- (a)  $AP \cong BQ \cong CR$  per ipotesi;

- (b)  $\angle PAF \cong \angle QBD \cong \angle RCE$  (dimostrato precedentemente);
- (c)  $\angle APF \cong \angle BQD \cong \angle CRE$  in quanto supplementari degli angoli  $\angle CPA \cong \angle AQB \cong \angle BRC$ .

Per il secondo criterio (ALA), i tre triangoli sono congruenti ( $\triangle APF \cong \triangle BQD \cong \triangle CRE$ ). Per dimostrare la seconda parte, notiamo che dalla congruenza appena dimostrata ricaviamo  $AF \cong BD \cong CE$  e  $PF \cong QD \cong RE$ . Poiché  $FD = AQ - AF - QD$ ,  $DE = BR - BD - RE$  e  $EF = CP - CE - PF$ , per differenza di segmenti rispettivamente congruenti si ottiene  $FD \cong DE \cong EF$ . Il triangolo  $\triangle DEF$  è quindi equilatero. C.V.D. .

#### Ipotesi:

- $M$  punto medio di  $AB$  ( $AM \cong MB$ );
- Semiretta  $r$  uscente da  $A$  e semiretta  $s$  uscente da  $B$ , poste da parti opposte rispetto ad  $AB$ ;
- (c) •  $\angle MAC \cong \angle MBD$ ;
- Retta passante per  $M$  che interseca  $r$  in  $C$  e  $s$  in  $D$ .



#### Tesi:

- $\triangle BCM \cong \triangle ADM$ .

#### Dimostrazione:

Consideriamo i triangoli  $\triangle ACM$  e  $\triangle BDM$ . Essi hanno:

- (a)  $AM \cong MB$  per ipotesi ( $M$  è punto medio);
- (b)  $\angle CAM \cong \angle DBM$  per ipotesi;
- (c)  $\angle AMC \cong \angle BMD$  in quanto angoli opposti al vertice.

I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio (ALA). Di conseguenza, i lati corrispondenti sono congruenti:  $CM \cong MD$  e  $AC \cong BD$ . Ora consideriamo i triangoli  $\triangle BCM$  e  $\triangle ADM$ . Essi hanno:

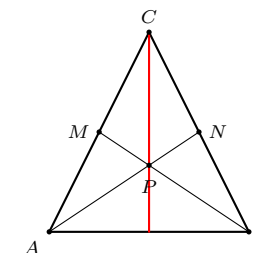
- (a)  $BM \cong AM$  per ipotesi;
- (b)  $CM \cong MD$  come appena dimostrato;
- (c)  $\angle BMC \cong \angle AMD$  in quanto angoli opposti al vertice.

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio (LAL).

C.V.D. .

#### Ipotesi:

- $\triangle ABC$  isoscele su base  $AB$  ( $AC \cong BC$  e  $\angle CAB \cong \angle CBA$ );
- $AN$  mediana relativa a  $BC$  ( $BN \cong NC$ );
- (d) •  $BM$  mediana relativa a  $AC$  ( $AM \cong MC$ );
- $P = AN \cap BM$ .



#### Tesi:

- $CP$  bisettrice dell'angolo in  $C$  ( $\angle ACP \cong \angle BCP$ ).

#### Dimostrazione:

Poiché  $AC \cong BC$  e i punti  $M$  e  $N$  sono i punti medi, risulta  $AM \cong MC \cong BN \cong NC$ . Consideriamo i triangoli  $\triangle ABM$  e  $\triangle BAN$ . Essi hanno la base  $AB$  in comune,  $AM \cong BN$  e gli angoli alla base  $\angle MAB \cong \angle NBA$  per ipotesi. Per il primo criterio (LAL),  $\triangle ABM \cong \triangle BAN$ . Di conseguenza, si ha  $\angle PAB \cong \angle PBA$ . Questo ci dice che il triangolo  $\triangle APB$  è isoscele, da cui  $PA \cong PB$ . Consideriamo infine i triangoli  $\triangle APC$  e  $\triangle BPC$ . Essi hanno:

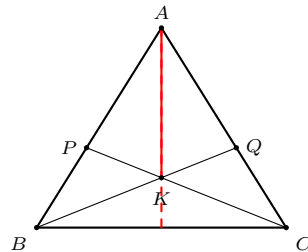
- (a)  $AC \cong BC$  per ipotesi;
- (b)  $PC$  in comune;

(c)  $PA \cong PB$  come appena dimostrato.

I due triangoli sono congruenti per il terzo criterio (LLL). Ne consegue che gli angoli corrispondenti sono congruenti:  $\angle ACP \cong \angle BCP$ . Il segmento  $CP$  è quindi la bisettrice dell'angolo al vertice  $C$ .  
C.V.D. .

**Ipotesi:**

- $\triangle ABC$  isoscele su base  $BC$  ( $AB \cong AC$ );
  - $P \in AB, Q \in AC$  tali che  $AP \cong AQ$ ;
- (e)
- $K = BQ \cap CP$ .



**Tesi:**

- $BQ \cong CP$ ;
- $AK$  bisettrice dell'angolo  $\angle A$  ( $\angle BAK \cong \angle CAK$ ).

**Dimostrazione:**

Confrontiamo i triangoli  $\triangle ABQ$  e  $\triangle ACP$ . Hanno  $AB \cong AC$  (per ipotesi), l'angolo in  $A$  in comune, e  $AQ \cong AP$  (per ipotesi). Per il primo criterio (LAL),  $\triangle ABQ \cong \triangle ACP$ , dunque i lati corrispondenti sono congruenti:  $BQ \cong CP$ . Per la seconda parte, consideriamo i triangoli  $\triangle PBK$  e  $\triangle QCK$ . Poiché  $AB \cong AC$  e  $AP \cong AQ$ , allora per differenza di segmenti congruenti si ha  $PB \cong QC$ . Dalla congruenza precedente si ricava  $\angle ABQ \cong \angle ACP$ , quindi  $\angle PBK \cong \angle QCK$ . Sappiamo anche che  $\angle BPC \cong \angle CQB$  (in quanto angoli supplementari di angoli congruenti). Dunque  $\triangle PBK \cong \triangle QCK$  per il secondo criterio (ALA). Ne segue  $KB \cong KC$ . Il punto  $K$  è quindi equidistante dagli estremi della base  $BC$ , così come il punto  $A$ . Dunque il segmento  $AK$  costituisce l'asse del segmento  $BC$  e contemporaneamente la bisettrice dell'angolo al vertice in  $A$ .  
C.V.D. .

**Problema:** *EU0013* - Geometria euclidea - dimostrazioni note sulle disuguaglianze triangolari.

**Testo** [*EU0013*] [3★ 3🕒 1📖] Svolgi la seguente dimostrazione riguardante le disuguaglianze nei triangoli.

- |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(a) In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ognuno degli angoli interni non adiacenti ad esso</p> <p>(b) In ogni triangolo non equilatero, a lato maggiore è opposto angolo maggiore.</p> | <p>(c) In ogni triangolo un lato è sempre minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Spiegazione** Per svolgere una dimostrazione devi per prima cosa segnarti in modo chiaro quali sono le ipotesi e quale la tesi. Utilizzando teoremi noti, devi partire dalle affermazioni che hai come ipotesi per arrivare, passaggio dopo passaggio, ad affermare la tesi. In questo esercizio sono raccolte dimostrazioni note sui triangoli. Devi conoscere i teoremi sulle disequaglianze dei triangoli che trovi sul libro di testo.

**Svolgimento** Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) [...].

---

(b) [...].

---

(c) [...].

---

### 3.1 dimostrazione

#### 3.1.1 dimostrazione sui triangoli