

Problema: DS0003 -

Testo [DS0003] [1½★ 2👉1📖] Risolvi la seguente disequazione di primo grado.

$$(a) \quad 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{4} \right) - x(x+2) \leq \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$(b) \quad \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 - \frac{2-3x}{5} \leq (x-1)^2 - \left(1 - \frac{3x-1}{2} \right)$$

$$(c) \quad (x-2)^2 - (x-1)(x+1) < 5 - 3x$$

$$(d) \quad (2x+1)^2 - 4x^2 \leq 2(x-3) + 7$$

$$(e) \quad \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 > x + 1$$

$$(f) \quad (x+3)^2 - x(x+5) \geq 2(x+1) + 5$$

$$(g) \quad \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{x^2+1}{2} < 2x+3$$

$$(h) \quad (x-2)(x+2) - (x-3)^2 \leq 4x-1$$

$$(i) \quad \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x + \frac{1}{3} \right) - x^2 < \frac{2x-1}{3}$$

$$(j) \quad (3x-1)^2 - 9x(x-2) > 10x+5$$

$$(k) \quad (x+4)^2 - (x-2)^2 > 10x$$

$$(l) \quad (2x-1)(2x+1) - 4(x-1)^2 < x+2$$

$$(m) \quad \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - x^2 \geq 2x + \frac{1}{4}$$

$$(n) \quad (x+1)^3 - x^2(x+3) < 4x+5$$

$$(o) \quad (x+2)^2 - (x-2)^2 \leq 8$$

$$(p) \quad \frac{(x-2)(x+2)}{3} - \frac{x^2-1}{3} > x$$

$$(q) \quad (2x+3)^2 - 4x(x+2) \geq 5x+1$$

$$(r) \quad \left(x + \frac{1}{3} \right)^2 - \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 \leq \frac{4}{3}x + 1$$

Spiegazione In una disequazione devo trovare l'intervallo di valori che rende vera l'affermazione iniziale..

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

$$(a) \quad 2(x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}) - x^2 - 2x \leq x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - x^2 - 2x \leq x^2 - x$$

$$-\frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \leq -x$$

$$-\frac{1}{2}x \leq \frac{1}{4}$$

Ora moltiplico da entrambe le parti per -2 e giro il segno della disequazione

$$x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$(b) \quad \frac{1}{4} - x + x^2 - \frac{2-3x}{5} \leq x^2 - 2x + 1 - (1 - \frac{3x-1}{2})$$

$$\frac{5-20x-8+12x}{20} \leq \frac{-40x+30x-10}{20}$$

$$-8x-3 \leq -10x-10$$

$$2x \leq -7$$

$$x \leq -\frac{7}{2}.$$

$$(c) \quad x^2 - 4x + 4 - (x^2 - 1) < 5 - 3x$$

$$-4x + 5 < 5 - 3x$$

$$-x < 0$$

$$x > 0.$$

$$(d) \quad 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 \leq 2x - 6 + 7$$

$$4x + 1 \leq 2x + 1$$

$$2x \leq 0$$

$$x \leq 0.$$

$$(e) \quad (x^2 + x + \frac{1}{4}) - (x^2 - x + \frac{1}{4}) > x + 1$$

$$2x > x + 1$$

$$x > 1.$$

$$(f) \quad x^2 + 6x + 9 - x^2 - 5x \geq 2x + 2 + 5$$

$$x + 9 \geq 2x + 7$$

$$-x \geq -2$$

$$x \leq 2.$$

$$(g) \quad \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 1}{2} < 2x + 3$$

$$-x < 2x + 3$$

$$-3x < 3$$

$$x > -1.$$

(h) $x^2 - 4 - (x^2 - 6x + 9) \leq 4x - 1$

$$6x - 13 \leq 4x - 1$$

$$2x \leq 12$$

$$x \leq 6.$$

(i) $x^2 - \frac{1}{9} - x^2 < \frac{2x - 1}{3}$

$$-\frac{1}{9} < \frac{2x - 1}{3}$$

$$-1 < 6x - 3$$

$$2 < 6x$$

$$x > \frac{1}{3}.$$

(j) $9x^2 - 6x + 1 - 9x^2 + 18x > 10x + 5$

$$12x + 1 > 10x + 5$$

$$2x > 4$$

$$x > 2.$$

(k) $x^2 + 8x + 16 - (x^2 - 4x + 4) > 10x$

$$12x + 12 > 10x$$

$$2x > -12$$

$$x > -6.$$

(l) $4x^2 - 1 - 4(x^2 - 2x + 1) < x + 2$

$$8x - 5 < x + 2$$

$$7x < 7$$

$$x < 1.$$

(m) $x^2 - x + \frac{1}{4} - x^2 \geq 2x + \frac{1}{4}$

$$-x \geq 2x$$

$$-3x \geq 0$$

$$x \leq 0.$$

(n) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 - 3x^2 < 4x + 5$

$$3x + 1 < 4x + 5$$

$$-x < 4$$

$$x > -4.$$

(o) $x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4) \leq 8$

$$8x \leq 8$$

$$x \leq 1.$$

(p) $\frac{x^2 - 4 - x^2 + 1}{3} > x$

$$-\frac{3}{3} > x$$

$$-1 > x$$

$$x < -1.$$

(q) $4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 - 8x \geq 5x + 1$

$$4x + 9 \geq 5x + 1$$

$$-x \geq -8$$

$$x \leq 8.$$

(r) $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - (x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) \leq \frac{4}{3}x + 1$

$$\frac{4}{3}x \leq \frac{4}{3}x + 1$$

$$0 \leq 1$$

Dal momento che 0 è sempre minore di 1 allora la disequazione è sempre verificata, cioè è verificata per qualunque valore di x appartenente ai numeri reali $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problema: DS0014 - Disequazioni di primo grado.

Testo [DS0014] [1 ★ 2 ⌚ 1 📖] Risolvi la seguente disequazione di primo grado.

(a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+2}{3} \geq \frac{x-3}{4}$

(b) $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+1}{4} < \frac{1-x}{2}$

(c) $\frac{3x-2}{5} - \frac{x-1}{2} \geq \frac{x}{10}$

(d) $\frac{x+1}{4} - \frac{2x-3}{2} \leq \frac{3-x}{8}$

(e) $\frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(x-3) \geq \frac{x+1}{6}$

(f) $\frac{x-5}{2} - \frac{x-3}{4} \leq \frac{x-1}{8}$

(g) $\frac{2x-1}{5} - \frac{x+2}{2} > -1$

(h) $\frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{6} < \frac{x-3}{9}$

Spiegazione In una disequazione bisogna arrivare ad indicare l'intervallo di valori che la rendono vera.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

$$(a) \frac{6(x-1) - 4(x+2)}{12} \geq \frac{3(x-3)}{12}$$

$$6x - 6 - 4x - 8 \geq 3x - 9$$

$$2x - 14 \geq 3x - 9$$

$$-x \geq 5$$

$$x \leq -5.$$

$$(b) \frac{4(2x-1) - 3(3x+1)}{12} < \frac{6(1-x)}{12}$$

$$8x - 4 - 9x - 3 < 6 - 6x$$

$$5x < 13$$

$$x < \frac{13}{5}.$$

$$(c) \frac{6x - 4 - 5x + 5}{10} \geq \frac{x}{10}$$

$$x + 1 \geq x$$

$$1 \geq 0$$

Quest'ultima affermazione è sempre vera per qualunque valore di x , quindi

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(d) \frac{2x + 2 - 8x + 12}{8} \leq \frac{3 - x}{8}$$

$$-6x + 14 \leq 3 - x$$

$$-5x \leq -11$$

$$x \geq \frac{11}{5}.$$

$$(e) \frac{4x - 4 - 3x + 9}{6} \geq \frac{x + 1}{6}$$

$$x + 5 \geq x + 1$$

$$5 \geq 1$$

Quest'ultima affermazione è sempre vera per qualunque valore di x , quindi

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(f) \frac{4x - 20 - 2x + 6}{8} \leq \frac{x - 1}{8}$$

$$2x - 14 \leq x - 1$$

$$x \leq 13.$$

$$(g) \frac{4x - 2 - 5x - 10}{10} > \frac{-10}{10}$$

$$-x - 12 > -10$$

$$-x > 2$$

$$x < -2.$$

$$(h) \frac{6x - 6 - 3x + 6}{18} < \frac{2x - 6}{18}$$

$$3x < 2x - 6$$

$$x < -6.$$

Problema: *DS0002* - Disequazioni fratte con numeratore e denominatore di primo grado.

Testo [*DS0002*] [1½★ 3🕒 1📖] Risolvi la seguente disequazione fratta.

(a) $\frac{x-2}{x+3} < 2$

(b) $\frac{x-2}{x+3} < 3$

(c) $\frac{x-3}{x+2} > 3$

(d) $\frac{x-5}{x+1} > 2$

(e) $\frac{x-1}{2x+1} < 3$

(f) $\frac{3x+2}{2x-5} < 1$

(g) $\frac{x^2+2}{x-2} < x$

(h) $2x < \frac{6x^2+1}{3x-2}$

(i) $\frac{2x-6}{x^2-4} \leq 0$

Spiegazione In una disequazione fratta ci si chiede per quali valori dell'incognita la frazione risulta positiva o negativa. Si studiano quindi i segni del numeratore e del denominatore per capire il segno della frazione.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Per prima cosa portiamo a sinistra dell'uguale il termine che si trova a destra. Successivamente uniamo tutto in un'unica frazione.

$$\frac{x-2}{x+3} - 2 < 0$$

$$\frac{x-2-2 \cdot (x+3)}{x+3} < 0$$

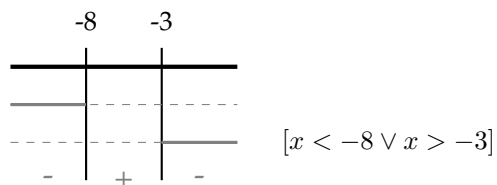
$$\frac{x-2-2x-6}{x+3} < 0$$

$$\frac{-x-8}{x+3} < 0$$

Adesso studiamo il segno di questa frazione analizzando il numeratore ed il denominatore separatamente.

$$-x-8 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -8$$

$$x+3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -3$$



- (b) Cominciamo con il portare il numero a sinistra

$$\frac{x-2}{x+3} - 3 < 0$$

Adesso eseguiamo la sottrazione

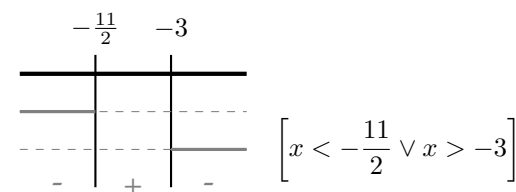
$$\frac{x-2-3x-9}{x+3} < 0$$

$$\frac{-2x-11}{x+3} < 0$$

Studiamo adesso il segno della disequazione

$$-2x-11 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{11}{2}$$

$$x+3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -3$$



(c) $\left[-\frac{9}{2} < x < -2 \right]$.

(d) $[-7 < x < -1]$.

(e) $\left[x < -\frac{4}{5} \vee x > -\frac{1}{2} \right]$.

(f) $\left[-7 < x < \frac{5}{2}\right].$

(g) $[-1 < x < 2].$

(h) Cominciamo con il portare tutto a sinistra

$$2x - \frac{6x^2 + 1}{3x - 2} < 0$$

Adesso eseguiamo la sottrazione

$$\frac{6x^2 - 4x - 6x^2 - 1}{3x - 2} < 0$$

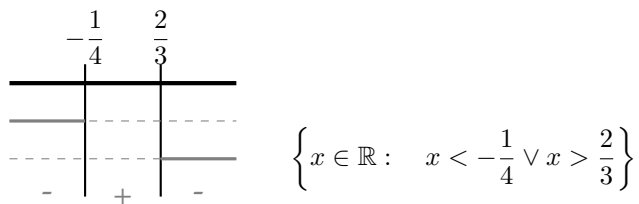
$$\frac{\cancel{6x^2} - 4x - \cancel{6x^2} - 1}{3x - 2} < 0$$

$$\frac{-4x - 1}{3x - 2} < 0$$

Studiamo adesso il segno della disequazione

$$-4x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{1}{4}$$

$$3x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{2}{3}$$



(i) $x < -2 \quad \vee \quad 2 < x \leq 3.$

Problema: *DS0015* - Disequazioni fratte con numeratore e denominatore di primo grado.

Testo [*DS0015*] [2★ 3🕒 1📖] Risolvi la seguente disequazione fratta.

(a) $x - \frac{1}{3-2x} < \frac{2x-1}{2} + \frac{6x+1}{2x-3}$

(b) $\frac{6+(3-x)^2}{x+2} - 1 \leq \frac{2+x^2}{x+2}$

(c) $\frac{5x-1}{3x-9} - \frac{x+1}{2x-6} > 1 + \frac{2}{3-x}$

(d) $\frac{2x-5}{2-x} < -2$

(e) $\frac{x^2}{x+1} - x \leq -2$

(f) $\frac{4x^2+x}{2x-1} - 2x > \frac{5}{2}$

Spiegazione In una disequazione fratta ci si chiede per quali valori dell'incognita la frazione risulta positiva o negativa. Si studiano quindi i segni del numeratore e del denominatore per capire il segno della frazione.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Portiamo tutti i termini al primo membro e notiamo che $3 - 2x = -(2x - 3)$, quindi cambiamo segno alla prima frazione:

$$x + \frac{1}{2x-3} - \frac{2x-1}{2} - \frac{6x+1}{2x-3} < 0$$

Calcoliamo il minimo comune multiplo che è $2(2x-3)$:

$$\frac{2x(2x-3) + 2 - (2x-1)(2x-3) - 2(6x+1)}{2(2x-3)} < 0$$

Svolgiamo i calcoli al numeratore:

$$\frac{4x^2 - 6x + 2 - (4x^2 - 6x - 2x + 3) - 12x - 2}{2(2x-3)} < 0$$

$$\frac{4x^2 - 6x - 4x^2 + 8x - 3 - 12x}{2(2x-3)} < 0$$

Sommiamo i termini simili:

$$\frac{-10x - 3}{2(2x-3)} < 0$$

Moltiplichiamo per -1 cambiando il verso della disequazione:

$$\frac{10x + 3}{2(2x-3)} > 0$$

Studiamo il segno di numeratore e denominatore:

$$N > 0 \Rightarrow 10x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{10}$$

$$D > 0 \Rightarrow 2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

Dallo studio dei segni (regola dei segni), otteniamo valori positivi per: $x < -\frac{3}{10} \vee x > \frac{3}{2}$.

- (b) Svolgiamo il quadrato al numeratore e portiamo tutti i termini al primo membro:

$$\frac{6+9-6x+x^2}{x+2} - 1 - \frac{2+x^2}{x+2} \leq 0$$

Facciamo il minimo comune multiplo $(x+2)$:

$$\frac{15-6x+x^2-(x+2)-(2+x^2)}{x+2} \leq 0$$

Semplifichiamo il numeratore:

$$\frac{15-6x+x^2-x-2-2-x^2}{x+2} \leq 0$$

$$\frac{-7x+11}{x+2} \leq 0$$

Moltiplichiamo per -1 invertendo il verso della disequazione per avere la x positiva al numeratore:

$$\frac{7x-11}{x+2} \geq 0$$

Studiamo il segno di numeratore e denominatore:

$$N \geq 0 \Rightarrow 7x - 11 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{11}{7}$$

$$D > 0 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

Facendo il grafico dei segni, cerchiamo i valori positivi (≥ 0): $x < -2 \vee x \geq \frac{11}{7}$.

- (c) Scomponiamo i denominatori: $3x-9=3(x-3)$, $2x-6=2(x-3)$ e notiamo che $3-x=-(x-3)$. Riscriviamo la disequazione portando tutto a sinistra:

$$\frac{5x-1}{3(x-3)} - \frac{x+1}{2(x-3)} - 1 + \frac{2}{x-3} > 0$$

Il minimo comune multiplo è $6(x-3)$:

$$\frac{2(5x-1)-3(x+1)-6(x-3)+6(2)}{6(x-3)} > 0$$

Svolgiamo i calcoli al numeratore:

$$\frac{10x - 2 - 3x - 3 - 6x + 18 + 12}{6(x - 3)} > 0$$

Sommiamo i termini simili:

$$\frac{x + 25}{6(x - 3)} > 0$$

Studiamo il segno:

$$N > 0 \Rightarrow x + 25 > 0 \Rightarrow x > -25$$

$$D > 0 \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

(il 6 è positivo trascurabile) Dal grafico dei segni cerchiamo i valori positivi:
 $x < -25 \vee x > 3$.

(d) Portiamo il -2 a sinistra e facciamo il m.c.m. $(2 - x)$:

$$\frac{2x - 5 + 2(2 - x)}{2 - x} < 0$$

$$\frac{2x - 5 + 4 - 2x}{2 - x} < 0$$

Semplifichiamo il numeratore:

$$\frac{-1}{2 - x} < 0$$

Analisi gradi: Numeratore 0° (costante), Denominatore 1° . Moltiplichiamo per -1 sopra e sotto per "pulire" i segni (o ragioniamo direttamente):

$$\frac{1}{x - 2} < 0$$

Una frazione con numeratore positivo è minore di zero solo se il denominatore è negativo: $x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2$.

(e) Portiamo il -2 a sinistra:

$$\frac{x^2}{x + 1} - x + 2 \leq 0$$

M.c.m. è $(x + 1)$:

$$\frac{x^2 - x(x + 1) + 2(x + 1)}{x + 1} \leq 0$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{x^2 - x^2 - x + 2x + 2}{x + 1} \leq 0$$

$$\frac{x + 2}{x + 1} \leq 0$$

Analisi gradi: Numeratore 1° , Denominatore 1° . Studio dei segni: $N \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ $D > 0 \Rightarrow x > -1$ Cerchiamo i valori negativi o nulli (segni discordi). $-2 \leq x < -1$.

(f) Portiamo tutto a sinistra. M.c.m. è $2(2x - 1)$:

$$\frac{2(4x^2 + x) - 4x(2x - 1) - 5(2x - 1)}{2(2x - 1)} > 0$$

$$\frac{8x^2 + 2x - 8x^2 + 4x - 10x + 5}{2(2x - 1)} > 0$$

Sommiamo i termini simili (x^2 si elimina):

$$\frac{-4x + 5}{2(2x - 1)} > 0$$

Analisi gradi: Numeratore 1° , Denominatore 1° . Cambiamo segno al numeratore e invertiamo il verso:

$$\frac{4x - 5}{2(2x - 1)} < 0$$

Studio dei segni: $N > 0 \Rightarrow x > 5/4$ $D > 0 \Rightarrow x > 1/2$ Cerchiamo i valori negativi (intervallo interno). $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}$.

5.2 Disequazioni di primo grado con valori assoluti

Problema: *DS0009* - Algebra letterale

Testo [\[DS0009\]](#) [1½★ 2🕒 1📖] Risolvi la disequazione con un valore assoluto.

(a) $|x + 2| - 3 < 0$

(c) $4x + |x + 2| > 2x + 1$

(e) $|2x - 3| \geq 5$

(g) $2x + 1 < |2x + 5|$

(b) $|x + 1| - 3x < 4$

(d) $4 - |3x - 1| > 1$

(f) $5x + |x - 1| > 7$

Spiegazione Per svolgere la disequazione bisogna prima gestire il valore assoluto. Per farlo è necessario studiare il segno dell'argomento del valore assoluto per poi trattare i casi in cui è positivo in modo separato dai casi in cui è negativo.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

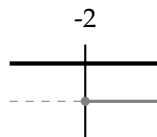
- (a) Cominciamo con lo studiare il segno dell'argomento del valore assoluto. Poniamo

$$x + 2 \geq 0$$

da cui otteniamo che

$$x > -2$$

Il diagramma che mostra questa discussione è quindi



A questo punto possiamo distinguere due casi separati: quando l'argomento del valore assoluto è positivo e quando è negativo. Le soluzioni della disequazione saranno l'unione delle soluzioni ottenute analizzando separatamente i due casi. L'analisi separata permetterà:

- di togliere il valore assoluto nel caso di argomento positivo
- di togliere il valore assoluto cambiando il segno dell'argomento nel caso di argomento negativo.

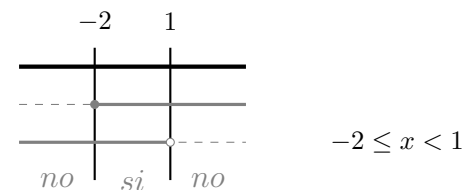
Il tutto lo si scriverà nel seguente modo:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x + 2 - 3 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -2 \\ -x - 2 - 3 < 0 \end{cases}$$

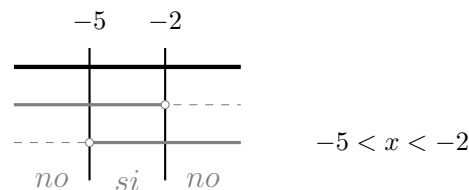
Risolviamo i due sistemi. Qui svolgo i calcoli in contemporanea. Vi suggerisco di svolgere un sistema alla volta e poi fare l'unione dei risultati

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -2 \\ x > -5 \end{cases}$$

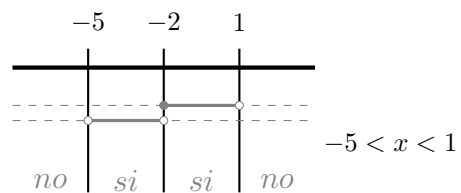
Per risolvere il primo sistema, e fare quindi l'**intersezione** delle due disequazioni, ci serviamo del grafico nel quale prenderemo solo le zone in cui entrambe le disequazioni sono vere.



Per risolvere il secondo sistema, e fare quindi l'**intersezione** delle due disequazioni, ci serviamo del grafico nel quale prenderemo solo le zone in cui entrambe le disequazioni sono vere.



Adesso ci rimane solo più da fare l'**unione** delle due soluzioni, ed anche in questo caso utilizziamo un grafico nel quale questa volta, visto che dobbiamo unire i risultati, accettiamo le zone in cui è presente almeno una linea continua



Ecco che abbiamo trovato il risultato finale di questo esercizio .

(b) $x > -\frac{5}{4}$.

(c) $x > -\frac{3}{2}$.

(d) $-\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$.

(e) $x \leq -1$ o $x \geq 4$.

(f) $x > 2$.

(g) $x > -\frac{3}{2}$.

Problema: DS0010 - Algebra letterale

Testo [DS0010] [2★ 3🕒 1📖] Risolvi la disequazione con un valore assoluto.

(a) $|x + 2| - 3 < |2x - 1|$

(b) $|x| - 3x < |x + 2|$

(c) $|x - 3| - 2x < |2x + 2| + 2$

(d) $|4x - 1| + 2 < |x - 1| - x$

(e) $|x + 1| - 2 < \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| - \frac{1}{2}$

(f) $|x - 3| \geq |2x - 5|$

(g) $|3x + 1| + 4 < |x - 2|$

(h) $2|x| - 1 > |x + 3|$

(i) $|4x - 1| - |x| \leq 3$

(j) $|x^2 + x| < |x^2 - 1|$

(k) $|2x - 7| - |x + 1| \geq x$

(l) $|x + 5| - 2 > |3x|$

(m) $3|x - 1| \leq |5x + 2| - 2$

(n) $|x - 1| + 2x > |x + 3|$

(o) $|2x - 3| + |2x + 3| \leq 10$

Spiegazione Per svolgere la disequazione bisogna prima gestire il valore assoluto. Per farlo è necessario studiare il segno dell'argomento del valore assoluto per poi trattare i casi in cui è positivo in modo separato dai casi in cui è negativo.

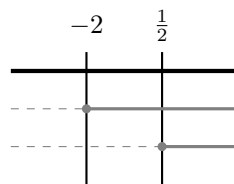
Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) In questa disequazione compaiono due valori assoluti, e quindi sarà necessario fare una doppia analisi del segno dei loro argomenti. Cominciamo con l'analisi

$$x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq -2$$

$$2x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Mostriamo adesso queste informazioni sul diagramma



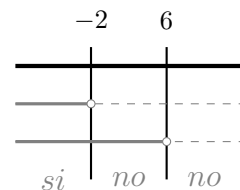
Abbiamo quindi da considerare tre differenti situazioni: quella con entrambi gli argomenti negativi, quella nella quale il primo argomento è positivo ed il secondo è negativo, ed infine quella nella quale entrambi sono positivi. La quarta restante opzione non si verificherà mai. A questo punto l'esercizio, togliendo i valori assoluti, si trasforma in quanto segue:

$$\begin{cases} x < -2 \\ -x - 5 < -2x + 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -2 \leq x < \frac{1}{2} \\ x - 1 < -2x + 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x - 1 < 2x - 1 \end{cases}$$

Risolviamo adesso i tre sistemi per poi unire le soluzioni e trovare il risultato finale dell'esercizio.

Primo sistema

$$\begin{cases} x < -2 \\ x < +6 \end{cases}$$

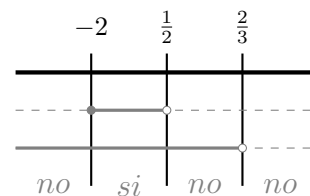


La soluzione del primo sistema è

$$x < -2$$

Secondo sistema

$$\begin{cases} -2 \leq x < \frac{1}{2} \\ 3x < +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x < \frac{1}{2} \\ x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

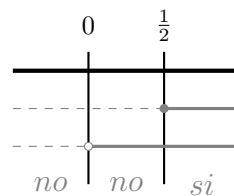


La soluzione del secondo sistema è

$$-2 \leq x < \frac{1}{2}$$

Terzo sistema

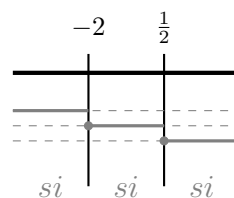
$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$$



La soluzione del terzo sistema è

$$x \geq \frac{1}{2}$$

Unione dei risultati



La soluzione della disequazione è

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

.

(b) $x > -\frac{2}{5}$.

(c) $x > -\frac{1}{5}$.

(d) Impossibile $\emptyset$.

(e) $-7 < x < 1$.

(f) $\frac{2}{3} \leq x \leq 8$.

(g) $-\frac{7}{2} < x < -\frac{3}{4}$.

(h) $x < -4 \vee x > 2$.

(i) $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{5}$.

(j) $x < -1 \vee x > \frac{1}{2}$.

(k) $x \leq 3$.

(l) $-\frac{7}{4} < x < \frac{3}{2}$.

(m) $x \leq 0 \quad \text{o} \quad x \geq 5$.

(n) $x > 1$.

(o) $-2 \leq x \leq 2$.

5.3 Disequazioni di secondo grado

Problema: DS0004 - Disequazioni fratte con termini di secondo grado

Testo [DS0004] [2★ 2⌚ 1📖] Risolvi la seguente disequazione fratta.

$$(a) \frac{1}{x-5} + \frac{3}{3x-15} > \frac{5}{x^2-25}$$

$$(b) \frac{1}{x-3} + \frac{3}{2x-6} > \frac{5}{x^2-9}$$

$$(c) \frac{1}{x-4} + \frac{3}{2x-8} > \frac{5}{x^2-16}$$

$$(d) \frac{1}{x+4} + \frac{2}{2x-8} < \frac{3}{x^2-16}$$

$$(e) \frac{3}{2x+4} < \frac{1-x}{x^2-4}$$

$$(f) \frac{2}{3x+6} + \frac{1}{x-1} < \frac{1-x}{x^2+x-2}$$

$$(g) \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} > 0$$

$$(h) \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} > \frac{x}{x^2-1}$$

$$(i) \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3x-6} < \frac{4}{x^2-4}$$

$$(j) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} > \frac{3}{x^2+x-2}$$

$$(k) \frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} < \frac{1}{x-3}$$

$$(l) \frac{2}{x+5} > \frac{1}{x-5} - \frac{10}{x^2-25}$$

$$(m) \frac{1}{4x-4} - \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x^2-1}$$

$$(n) \frac{x}{x^2-4x+3} > \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3}$$

$$(o) \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} > \frac{2}{x+2}$$

$$(p) \frac{1}{x-6} < \frac{1}{6-x} + \frac{1}{x^2-36}$$

Spiegazione Per risolvere una disequazione di un oggetto fattorizzato è necessario studiare il segno di ognuno dei fattori e successivamente il segno dell'oggetto nel suo complesso.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Portiamo tutto a primo membro e scomponiamo i denominatori:

$$\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-5} - \frac{5}{(x-5)(x+5)} > 0$$

Calcolando il m.c.m. otteniamo

$$\frac{2(x+5)-5}{(x-5)(x+5)} > 0 \implies \frac{2x+5}{(x-5)(x+5)} > 0$$

Studiando il segno

$$N > 0 \implies x > -\frac{5}{2}$$

$$D_1 > 0 \implies x > 5$$

$$D_2 > 0 \implies x > -5$$

e compilando il quadro dei segni, ricaviamo gli intervalli in cui la frazione è positiva. Risultato:

$$-5 < x < -\frac{5}{2} \vee x > 5$$

(b) Scomponiamo e portiamo a sinistra:

$$\frac{1}{x-3} + \frac{3}{2(x-3)} - \frac{5}{(x-3)(x+3)} > 0$$

Svolgendo il m.c.m. si ha

$$\frac{2(x+3)+3(x+3)-10}{2(x-3)(x+3)} > 0 \implies \frac{5x+5}{2(x-3)(x+3)} > 0$$

Lo studio del segno

$$N > 0 \implies x > -1$$

$$D_1 > 0 \implies x > 3$$

$$D_2 > 0 \implies x > -3$$

ci permette di individuare la soluzione dal quadro riassuntivo. Risultato:

$$-3 < x < -1 \vee x > 3$$

(c) Portiamo a sinistra e scomponiamo: $\frac{1}{x-4} + \frac{3}{2(x-4)} - \frac{5}{(x-4)(x+4)} > 0$. Il m.c.m. dà $\frac{2(x+4)+3(x+4)-10}{2(x-4)(x+4)} > 0 \implies \frac{5x+10}{2(x-4)(x+4)} > 0$. Studiamo il segno ($N > 0 \implies x > -2$; $D_1 > 0 \implies x > 4$; $D_2 > 0 \implies x > -4$) per trovare la positività. Risultato: $-4 < x < -2 \vee x > 4$.

(d) Portiamo tutto a sinistra: $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4} - \frac{3}{(x-4)(x+4)} < 0$. Svolgendo il m.c.m. otteniamo $\frac{x-4+x+4-3}{(x-4)(x+4)} < 0 \implies \frac{2x-3}{(x-4)(x+4)} < 0$. Cerchiamo gli intervalli negativi nel quadro dei segni con $N > 0 \implies x > \frac{3}{2}$; $D_1 > 0 \implies x > 4$; $D_2 > 0 \implies x > -4$. Risultato: $x < -4 \vee \frac{3}{2} < x < 4$.

(e) Scomponiamo e portiamo a sinistra: $\frac{3}{2(x+2)} - \frac{1-x}{(x-2)(x+2)} < 0$. Calcolando il m.c.m. si ha $\frac{3(x-2)-2(1-x)}{2(x-2)(x+2)} < 0 \implies \frac{5x-8}{2(x-2)(x+2)} < 0$. Segno: $N > 0 \implies x > \frac{8}{5}$; $D_1 > 0 \implies x > 2$; $D_2 > 0 \implies x > -2$. Dal quadro si estrae l'intervallo negativo. Risultato: $x < -2 \vee \frac{8}{5} < x < 2$.

(f) Fattorizziamo i denominatori ($x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$): $\frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{x-1} - \frac{1-x}{(x+2)(x-1)} < 0$. Con il m.c.m. otteniamo $\frac{2(x-1) + 3(x+2) - 3(1-x)}{3(x+2)(x-1)} < 0$
 $0 \Rightarrow \frac{8x+1}{3(x+2)(x-1)} < 0$. Lo studio dei segni rivela la soluzione. Risultato:
 $x < -2 \vee -\frac{1}{8} < x < 1$.

(g) Scomponiamo $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. La disequazione diventa $\frac{1}{(x-1)(x-2)} > 0$
 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} > 0$. Il m.c.m. fornisce $\frac{1+x-2+x-1}{(x-1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)}{(x-1)(x-2)} > 0$
 0. Semplificando per $x \neq 1$, otteniamo $\frac{2}{x-2} > 0$, che si risolve facilmente. Risultato: $x > 2$.

(h) Scomponiamo a primo membro: $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{x}{(x-1)(x+1)} > 0$. Calcolando il m.c.m. abbiamo $\frac{2(x+1) - (x-1) - x}{(x-1)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{3}{(x-1)(x+1)} > 0$.
 Il numeratore è sempre positivo, studiamo la positività del denominatore. Risultato: $x < -1 \vee x > 1$.

(i) Scomponiamo e portiamo a sinistra: $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} < 0 \Rightarrow$
 $\frac{4}{3(x-2)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} < 0$. Con il m.c.m. otteniamo $\frac{4(x+2) - 12}{3(x-2)(x+2)} < 0$
 $0 \Rightarrow \frac{4x-4}{3(x-2)(x+2)} < 0$. Compiliamo il quadro dei segni. Risultato:
 $x < -2 \vee 1 < x < 2$.

(j) Scomponendo $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, e portando a sinistra si ha $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)(x-1)} > 0$. Il m.c.m. dà $\frac{x+2+x-1-3}{(x+2)(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)}{(x+2)(x-1)} > 0$

0. Semplificando per $x \neq 1$, otteniamo $\frac{2}{x+2} > 0$ da intersecare con le C.E. Risultato: $-2 < x < 1 \vee x > 1$.

(k) Portiamo tutto a primo membro: $\frac{x}{(x-3)(x+3)} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-3} < 0$. Svolgendo il m.c.m. si ottiene $\frac{x + (x-3) - (x+3)}{(x-3)(x+3)} < 0 \Rightarrow \frac{x-6}{(x-3)(x+3)} < 0$.
 Costruiamo il quadro dei segni ed estraiamo gli intervalli negativi. Risultato:
 $x < -3 \vee 3 < x < 6$.

(l) Portiamo a primo membro e facciamo il m.c.m.: $\frac{2(x-5) - (x+5) + 10}{(x-5)(x+5)} > 0$
 $0 \Rightarrow \frac{x-5}{(x-5)(x+5)} > 0$. Semplificando il fattore $x-5$ per $x \neq 5$, si ha $\frac{1}{x+5} > 0$. Dalla condizione di esistenza scartiamo $x = 5$. Risultato:
 $-5 < x < 5 \vee x > 5$.

(m) Portiamo a sinistra e calcoliamo il m.c.m.: $\frac{x+1-4(x-1)-4}{4(x-1)(x+1)} < 0 \Rightarrow$
 $\frac{-3x+1}{4(x-1)(x+1)} < 0$. Studio del segno: $N > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$ (per via del segno meno); $D_1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $D_2 > 0 \Rightarrow x > -1$. Dal quadro si preleva l'intervallo negativo. Risultato: $-1 < x < \frac{1}{3} \vee x > 1$.

(n) Fattorizziamo $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ e portiamo a sinistra: $\frac{x}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} > 0$. Il m.c.m. fornisce $\frac{x - (x-3) - (x-1)}{(x-1)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{4-x}{(x-1)(x-3)} > 0$
 0. Quadro dei segni classico. Risultato: $x < 1 \vee 3 < x < 4$.

(o) Portiamo a sinistra e calcoliamo il m.c.m.: $\frac{(x-2)(x+2) + x(x+2) - 2x(x-2)}{x(x-2)(x+2)} >$

$$0 \implies \frac{x^2 - 4 + x^2 + 2x - 2x^2 + 4x}{x(x-2)(x+2)} > 0 \implies \frac{6x - 4}{x(x-2)(x+2)} > 0. \text{ Studiamo il segno del numeratore e dei tre fattori a denominatore. Risultato: } x < -2 \vee 0 < x < \frac{2}{3} \vee x > 2.$$

(p) Ricordando che $\frac{1}{6-x} = -\frac{1}{x-6}$, portiamo tutto a primo membro: $\frac{2}{x-6} - \frac{1}{(x-6)(x+6)} < 0$. Con il m.c.m. otteniamo $\frac{2(x+6) - 1}{(x-6)(x+6)} < 0 \implies \frac{2x+11}{(x-6)(x+6)} <$

0. Quadro dei segni tra numeratore e denominatori. Risultato: $x < -6 \vee -\frac{11}{2} < x < 6$.

Problema: *DS0008* - Disequazioni di secondo grado

Testo *[DS0008]* [1½★ 2🕒 2📖] Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

(a) $x^2 + 4x - 5 \geq 0$, $x^2 - 5x + 6 > 0$, $x^2 - x + 1 > 0$

(b) $x^2 + x - 6 > 0$, $x^2 + 2x - 8 < 0$, $-2x^2 + 3x - 5 < 0$

(c) $x^2 - 6x + 8 > 0$, $-x^2 + 7x - 10 \geq 0$, $3x^2 + 2x + 1 \leq 0$

(d) $x^2 - 5x + 6 > 0$, $x^2 - 6x + 9 > 0$, $6x^2 - 5x - 4 < 0$

(e) $2x^2 + 3x + 1 > 0$, $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$, $-x^2 + 4x - 4 < 0$

Spiegazione Una disequazione di secondo grado ha una procedura standard di risoluzione. cominciate a trovare le soluzioni dell'equazione associata e poi proseguite.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $x \leq 1 \vee x \geq 5; x < 2 \vee x > 3; \forall x \in \mathbb{R}.$

(b) $x < -3 \vee x > 2; \quad -4 < x < 2; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(c) $x < 2 \vee x > 4; \quad 2 \leq x \leq 5; \quad \text{Impossibile} \quad (\emptyset).$

(d) $x < 2 \vee x > 3; \quad x \neq 3; \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}.$

(e) $x < -1 \vee x > -\frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2}; \quad x \neq 2.$

Problema: *DS0011* - Disequazioni che si risolvono facendo lo studio del segno.

Testo [*DS0011*] [1½★ 2🕒 1📖] Risolvi la disequazione indicata facendo l'opportuno studio del segno.

(a) $\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)} \geq 0$

(b) $\frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)} \geq 0$

(c) $\frac{(x-1)(x-3)}{(x+2)} \leq 0$

(d) $\frac{(x-1)}{(x+2)(x-3)} \leq 0$

(e) $x(x+2)(x-3) \geq 0$

(f) $x(x-2)(x-1) \leq 0$

Spiegazione In questo esercizio è richiesto di studiare il segno di prodotti e divisioni di oggetti. Per farlo si deve studiare il segno di ognuno di quegli oggetti per poi capire con uno schema come questi segni si combinano.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Poniamo ogni fattore strettamente maggiore di zero per studiarne il segno complessivo:

- $F_1 : x + 1 > 0 \implies x > -1$
- $F_2 : x - 1 > 0 \implies x > 1$
- $F_3 : x + 3 > 0 \implies x > -3$

Analizzando il segno nei vari intervalli generati dai capisaldi $(-3, -1, 1)$:

- $x < -3$: tre fattori negativi $\implies$ segno $-$
- $-3 < x < -1$: due fattori negativi, uno positivo $\implies$ segno $+$
- $-1 < x < 1$: un fattore negativo, due positivi $\implies$ segno $-$
- $x > 1$: tre fattori positivi $\implies$ segno $+$

La disequazione richiede ≥ 0 . Incluiamo gli zeri del numeratore ($x = -1$, $x = 1$) ed escludiamo lo zero del denominatore ($x = -3$). La soluzione è l'unione degli intervalli positivi. .

(b) Studiamo il segno di ciascun fattore ponendolo strettamente maggiore di zero:

- $F_1 : x - 1 > 0 \implies x > 1$
- $F_2 : x - 3 > 0 \implies x > 3$
- $F_3 : x + 3 > 0 \implies x > -3$

Valutiamo il segno complessivo negli intervalli definiti dai punti $-3, 1, 3$:

- $x < -3$: tre fattori negativi $\implies$ segno $-$
- $-3 < x < 1$: due fattori negativi e uno positivo $\implies$ segno $+$

- $1 < x < 3$: un fattore negativo e due positivi $\implies$ segno $-$
- $x > 3$: tre fattori positivi $\implies$ segno $+$

Richiedendo valori ≥ 0 , consideriamo gli intervalli con segno $+$, includendo gli zeri del numeratore ($x = 1, x = 3$) ed escludendo quello del denominatore ($x = -3$). .

(c) Poniamo tutti i fattori strettamente maggiori di zero:

- $F_1 : x - 1 > 0 \implies x > 1$
- $F_2 : x - 3 > 0 \implies x > 3$
- $F_3 : x + 2 > 0 \implies x > -2$

Componiamo i segni negli intervalli separati da $-2, 1, 3$:

- $x < -2$: tre fattori negativi $\implies$ segno $-$
- $-2 < x < 1$: due fattori negativi e uno positivo $\implies$ segno $+$
- $1 < x < 3$: un fattore negativo e due positivi $\implies$ segno $-$
- $x > 3$: tre fattori positivi $\implies$ segno $+$

La disequazione è ≤ 0 , quindi prendiamo gli intervalli con segno $-$. Accettiamo gli zeri del numeratore ($x = 1, x = 3$) e scartiamo quello del denominatore ($x = -2$). .

(d) Studiamo la positività di ogni singolo fattore:

- $F_1 : x - 1 > 0 \implies x > 1$
- $F_2 : x + 2 > 0 \implies x > -2$
- $F_3 : x - 3 > 0 \implies x > 3$

Analizziamo il segno della frazione negli intervalli determinati da $-2, 1, 3$:

- $x < -2$: tre fattori negativi $\implies$ segno $-$

- $-2 < x < 1$: due negativi e uno positivo $\implies$ segno +
- $1 < x < 3$: un negativo e due positivi $\implies$ segno -
- $x > 3$: tre fattori positivi $\implies$ segno +

Poiché cerchiamo valori ≤ 0 , selezioniamo i segni -. Il valore $x = 1$ annulla il numeratore ed è compreso, mentre $x = -2$ e $x = 3$ annullano il denominatore e sono pertanto esclusi. .

(e) Impostiamo ogni fattore strettamente maggiore di zero per lo studio dei segni:

- $F_1 : x > 0$
- $F_2 : x + 2 > 0 \implies x > -2$
- $F_3 : x - 3 > 0 \implies x > 3$

Otteniamo i capisaldi $-2, 0, 3$. Calcoliamo il segno del prodotto:

- $x < -2$: tre fattori negativi $\implies$ segno -
- $-2 < x < 0$: due negativi e uno positivo $\implies$ segno +
- $0 < x < 3$: un negativo e due positivi $\implies$ segno -
- $x > 3$: tre fattori positivi $\implies$ segno +

La disequazione richiede valori ≥ 0 (segno +). Essendo un prodotto senza denominatori, tutti i valori che annullano i fattori ($x = -2, 0, 3$) sono inclusi nella soluzione. .

(f) Studiamo il segno ponendo ogni fattore strettamente positivo:

- $F_1 : x > 0$
- $F_2 : x - 2 > 0 \implies x > 2$
- $F_3 : x - 1 > 0 \implies x > 1$

Suddividiamo la retta reale con i punti 0, 1, 2 e determiniamo il segno del prodotto:

- $x < 0$: tre fattori negativi $\implies$ segno -
- $0 < x < 1$: due negativi e uno positivo $\implies$ segno +
- $1 < x < 2$: un negativo e due positivi $\implies$ segno -
- $x > 2$: tre fattori positivi $\implies$ segno +

Dobbiamo trovare gli intervalli in cui il prodotto è ≤ 0 (segno -). Trattandosi solo di fattori a numeratore, includiamo tutti i punti di annullamento ($x = 0, 1, 2$). .

Problema: *DS0016* - Disequazioni fratte. E' necessario svolgere alcuni passaggi prima di eseguire lo studio del segno

Testo [*DS0016*] [1½★ 3🕒 1📖] Risolvi la seguente disequazione fratta.

(a) $\frac{2x}{x+1} - 2 < \frac{3}{2-2x}$

(b) $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3} \leq 1$

(c) $\frac{1}{x^2-2x} + \frac{2}{x^2-4} \geq \frac{3}{x^2+2x}$

(d) $\frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x+2}{x-1}$

(e) $\frac{3}{2x-4} + \frac{1}{x+2} > \frac{x+6}{x^2-4}$

Spiegazione

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Portiamo tutto al primo membro e notiamo che

$$2 - 2x = -2(x - 1)$$

$$\frac{2x}{x+1} - 2 - \frac{3}{2(1-x)} < 0$$

Cambiamo segno al denominatore della terza frazione:

$$\frac{2x}{x+1} - 2 + \frac{3}{2(x-1)} < 0$$

Il minimo comune multiplo è

$$2(x+1)(x-1)$$

$$\frac{2(2x)(x-1) - 4(x+1)(x-1) + 3(x+1)}{2(x+1)(x-1)} < 0$$

Sviluppiamo il numeratore:

$$\frac{4x^2 - 4x - 4(x^2 - 1) + 3x + 3}{2(x+1)(x-1)} < 0$$

$$\frac{4x^2 - 4x - 4x^2 + 4 + 3x + 3}{2(x+1)(x-1)} < 0$$

Sommiamo i termini simili:

$$\frac{-x + 7}{2(x+1)(x-1)} < 0$$

Cambiamo segno moltiplicando per

$$-1$$

(e invertiamo il verso):

$$\frac{x-7}{2(x+1)(x-1)} > 0$$

Studio dei segni:

$$N > 0 \Rightarrow x > 7$$

$$D_1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$D_2 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Dal grafico dei segni otteniamo intervalli positivi per:

$$-1 < x < 1 \vee x > 7$$

(b) Portiamo l'1 a sinistra:

$$\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x+2}{x+3} - 1 \leq 0$$

Il m.c.m. è

$$(x-3)(x+3) = x^2 - 9$$

$$\frac{(2x-1)(x+3) - (x+2)(x-3) - (x^2-9)}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

Svolgiamo i prodotti:

$$\frac{(2x^2 + 6x - x - 3) - (x^2 - 3x + 2x - 6) - x^2 + 9}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 3 - x^2 + x + 6 - x^2 + 9}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

Semplifichiamo il numeratore:

$$\frac{6x + 12}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

Possiamo dividere per 6 (numero positivo, non cambia il verso):

$$\frac{x+2}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

Studio dei segni:

$$N \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$D_1 > 0 \Rightarrow x > 3$$

$$D_2 > 0 \Rightarrow x > -3$$

Dal grafico dei segni cerchiamo i valori negativi (

$$\leq 0$$

):

$$x < -3 \vee -2 \leq x < 3$$

.

(c) Scomponiamo i denominatori:

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$x^2 + 2x = x(x+2)$$

Il m.c.m. è

$$x(x-2)(x+2)$$

. Portiamo tutto a sinistra:

$$\frac{1}{x(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{x(x+2)} \geq 0$$

Calcoliamo il numeratore:

$$\frac{1(x+2) + 2(x) - 3(x-2)}{x(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{x+2+2x-3x+6}{x(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{8}{x(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Il numeratore è

$$8$$

(sempre positivo). Il segno dipende solo dal denominatore. Studiamo

$$D > 0$$

:

$$x > 0$$

$$x > 2$$

$$x > -2$$

Facendo il grafico dei segni cerchiamo dove il prodotto è positivo (+):

$$-2 < x < 0 \vee x > 2$$

.

(d) Portiamo tutto al primo membro e facciamo il m.c.m.

$$(x+1)(x-1)$$

:

$$\frac{(x-3)(x-1) - (x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

Svolgiamo i calcoli al numeratore:

$$\frac{(x^2 - x - 3x + 3) - (x^2 + x + 2x + 2)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 - 3x - 2}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

Sommiamo i termini simili (

$$x^2$$

si elimina):

$$\frac{-7x+1}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

Analisi gradi: Numeratore 1°, Denominatore 2°. Moltiplichiamo per

$$-1$$

invertendo il verso:

$$\frac{7x-1}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

Studio dei segni:

$$N \geq 0 \Rightarrow x \geq 1/7$$

$$D_1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

$$D_2 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Grafico dei segni: cerchiamo i negativi (

$$\leq 0$$

).

$$x < -1 \vee \frac{1}{7} \leq x < 1$$

.

(e) Scomponiamo:

$$2x-4 = 2(x-2)$$

e

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

. M.c.m. è

$$2(x-2)(x+2)$$

.

$$\frac{3(x+2)+2(x-2)-2(x+6)}{2(x-2)(x+2)} > 0$$

$$\frac{3x+6+2x-4-2x-12}{2(x-2)(x+2)} > 0$$

$$\frac{3x-10}{2(x-2)(x+2)} > 0$$

Analisi gradi: Numeratore 1°, Denominatore 2°. Studio dei segni:

$$N > 0 \Rightarrow x > 10/3$$

$$D_1 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$D_2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

Cerchiamo i valori positivi.

$$-2 < x < 2 \vee x > \frac{10}{3}$$

.

Problema: *DS0042* - Disequazioni di secondo grado.

Testo [*DS0042*] [1½★ 2½🕒 2📖] Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado

(a) $x^2 - 5x + 4 < 0$; $2x^2 - 3x - 1 > 0$; $x^2 + 5x + 3 < 0$;

(b) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$; $-3x^2 + x + 2 \geq 0$; $5x^2 - 4x - 1 > 0$

(c) $4x^2 - 4x + 1 > 0$; $x^2 - 6x + 7 < 0$; $-x^2 - 2x + 1 \geq 0$

(d) $x^2 + 6x + 9 \leq 0$; $4x^2 - x - 2 > 0$; $3x^2 + 7x + 1 < 0$

(e) $x^2 - x + 1 > 0$; $10x^2 - x - 1 > 0$; $x^2 - 4x + 2 \leq 0$

(f) $-2x^2 + 3x - 5 < 0$; $-x^2 + 4x + 3 > 0$; $6x^2 - x - 1 \leq 0$

(g) $x^2 + 2x - 1 \geq 0$; $2x^2 - 5x + 1 < 0$; $3x^2 + 2x - 2 > 0$

Spiegazione Per risolvere una disequazione di secondo grado abbiamo una procedura precisa da conoscere

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $1 < x < 4; x < \frac{3-\sqrt{17}}{4} \vee x > \frac{3+\sqrt{17}}{4}; \frac{-5-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{13}}{2};$

(b) $x \leq 2 \vee x \geq 5; -\frac{2}{3} \leq x \leq 1; x < -\frac{1}{5} \vee x > 1.$

(c) $x \neq 1/2; 3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}.$

(d) $x = -3; x < \frac{1-\sqrt{33}}{8} \vee x > \frac{1+\sqrt{33}}{8}; \frac{-7-\sqrt{37}}{6} < x < \frac{-7+\sqrt{37}}{6}.$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}; x < \frac{1-\sqrt{41}}{20} \vee x > \frac{1+\sqrt{41}}{20}; 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}.$

(f) $\forall x \in \mathbb{R}; 2 - \sqrt{7} < x < 2 + \sqrt{7}; -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}.$

(g) $x \leq -1 - \sqrt{2} \vee x \geq -1 + \sqrt{2}; \frac{5-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{5+\sqrt{17}}{4}; x < \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \vee x > \frac{-1+\sqrt{7}}{3}.$

Problema: *DS0051* - Disequazione fratta e trinomi speciali

Testo [*DS0051*] [1½★ 2½🕒 1📖] Risolvi la disequazione indicata.

(a) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 2} \geq 0$

(b) $\frac{x + 2}{x^2 - x - 6} \leq 0$

(c) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1} > 0$

(d) $\frac{x - 1}{x^2 - 2x - 8} \leq 0$

(e) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 3} \leq 0$

(f) $\frac{x - 5}{x^2 - x - 12} \geq 0$

(g) $\frac{x^2 - 6x + 5}{x + 2} < 0$

Spiegazione In questo esercizio è richiesto di studiare il segno di prodotti e divisioni di oggetti. Per farlo si deve studiare il segno di ognuno di quegli oggetti per poi capire con uno schema come questi segni si combinano. Tutti i trinomi di secondo grado sono trinomi speciali.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Scomponiamo il trinomio speciale al numeratore in due binomi di primo grado: $(x-1)(x-4)$. La disequazione diventa $\frac{(x-1)(x-4)}{x-2} \geq 0$. Studiamo il segno dei tre binomi: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$; $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$. Incrociando i segni nell'apposito schema, il risultato della disequazione è $1 \leq x < 2 \vee x \geq 4$.

- (b) Scomponiamo il trinomio speciale al denominatore in due binomi di primo grado: $(x-3)(x+2)$. La disequazione diventa $\frac{x+2}{(x-3)(x+2)} \leq 0$. Studiamo il segno dei tre binomi: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ (al numeratore); $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$ e $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$ (al denominatore). Valutando lo schema dei segni e ricordando che $x \neq -2$, il risultato della disequazione è $x < -2 \vee -2 < x < 3$.

- (c) Scomponiamo il trinomio speciale al numeratore in due binomi di primo grado: $(x-1)(x-3)$. La disequazione diventa $\frac{(x-1)(x-3)}{x+1} > 0$. Studiamo il segno dei tre binomi ponendoli strettamente positivi: $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$; $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$. Costruendo lo schema dei segni, il risultato della disequazione è $-1 < x < 1 \vee x > 3$.

- (d) Scomponiamo il trinomio speciale al denominatore in due binomi di primo grado: $(x-4)(x+2)$. La disequazione diventa $\frac{x-1}{(x-4)(x+2)} \leq 0$. Studiamo il segno dei tre binomi: $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$; $x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$; $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Dal quadro dei segni, considerando le aree in cui la

frazione è negativa o nulla, il risultato della disequazione è $x < -2 \vee 1 \leq x < 4$.

- (e) Scomponiamo il trinomio speciale al numeratore in due binomi di primo grado: $(x-2)(x-3)$. La disequazione diventa $\frac{(x-2)(x-3)}{x+3} \leq 0$. Studiamo il segno dei tre binomi: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$; $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$; $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$. Inserendo i valori nello schema dei segni, il risultato della disequazione è $x < -3 \vee 2 \leq x \leq 3$.

- (f) Scomponiamo il trinomio speciale al denominatore in due binomi di primo grado: $(x-4)(x+3)$. La disequazione diventa $\frac{x-5}{(x-4)(x+3)} \geq 0$. Studiamo il segno dei tre binomi: $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$; $x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$; $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$. Combinando i segni nell'apposito schema, il risultato della disequazione è $-3 < x < 4 \vee x \geq 5$.

- (g) Scomponiamo il trinomio speciale al numeratore in due binomi di primo grado: $(x-1)(x-5)$. La disequazione diventa $\frac{(x-1)(x-5)}{x+2} < 0$. Studiamo il segno dei tre binomi: $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $x-5 > 0 \Rightarrow x > 5$; $x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Analizzando lo schema dei segni per le zone in cui il rapporto è negativo, il risultato della disequazione è $x < -2 \vee 1 < x < 5$.

Problema: *DS0050* - Disequazione fratta con una disequazione di secondo grado.

Testo [*DS0050*] [2★ 3⌚ 2📖] Risolvi la disequazione indicata.

$$(a) \frac{x^2 + x - 2}{(x + 3)} \geq 0$$

$$(b) \frac{x^2 - 3x + 1}{(x + 3)} \geq 0$$

$$(c) \frac{x^2 - 4x - 1}{x - 5} \geq 0$$

$$(d) \frac{x + 4}{2x^2 + 5x - 3} < 0$$

$$(e) \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \leq 0$$

$$(f) \frac{x^2 - x - 7}{x} > 0$$

$$(g) \frac{x^2 + 3}{x^2 + 4} \leq 0$$

$$(h) \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 1} < 0$$

$$(i) \frac{x^2 + 2x + 5}{3x - 6} > 0$$

Spiegazione In questo esercizio è richiesto di studiare il segno di prodotti e divisioni di oggetti. Per farlo si deve studiare il segno di ognuno di quegli oggetti per poi capire con uno schema come questi segni si combinano.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $-3 < x \leq -2 \quad \vee \quad x \geq 1.$

(b) $-3 < x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$

(c) $2 - \sqrt{5} \leq x \leq 2 + \sqrt{5} \vee x > 5.$

(d) $x < -4 \vee -3 < x < \frac{1}{2}.$

(e) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$

(f) $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < x < 0 \vee x > \frac{1+\sqrt{29}}{2}.$

(g) Impossibile ($\nexists x \in \mathbb{R}$).

(h) $x < -1 - \sqrt{5} \vee 1 < x < -1 + \sqrt{5}.$

(i) $x > 2.$

Problema: *DS0018* - Disequazioni fratte provenienti dalla somma di due frazioni algebriche con denominatori di primo grado, le quali sommate danno un numeratore di primo grado.

Testo [*DS0018*] [1½★ 2🕒 1📖] Risolvi la seguente disequazione.

(a) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{x}{x+2} < 0$

(b) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x+2} \geq 0$

(c) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+3} > 0$

(d) $\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \leq 0$

(e) $\frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x+3} \geq 0$

(f) $\frac{x-3}{x-1} - \frac{x-2}{x+4} < 0$

(g) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} > 0$

(h) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+1}{x-3} \leq 0$

(i) $\frac{x}{x+1} - \frac{x-4}{x-2} \geq 0$

(j) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-2}{x+1} < 0$

(k) $\frac{x+4}{x-1} - \frac{x+1}{x} > 0$

(l) $\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+3}{x+2} \leq 0$

Spiegazione Studio del segno di una frazione con numeratore di primo grado e denominatore prodotto di due fattori di primo grado.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Per prima cosa portiamo la disequazione a una forma fratta unica calcolando il minimo comune denominatore: $\frac{(x+1)(x+2) - x(x-3)}{(x-3)(x+2)} < 0$. Sviluppando i prodotti al numeratore otteniamo $\frac{x^2 + 2x + x + 2 - x^2 + 3x}{(x-3)(x+2)} < 0$, che si semplifica in $\frac{6x+2}{(x-3)(x+2)} < 0$. Studiamo il segno dei singoli fattori: $N > 0 \Rightarrow 6x+2 > 0 \Rightarrow x > -1/3$; $D_1 > 0 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$; $D_2 > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Attraverso il quadro dei segni, cerchiamo gli intervalli in cui il rapporto è negativo: $x < -2 \vee -1/3 < x < 3$.

- (b) Sommiamo le due frazioni trovando il denominatore comune: $\frac{(x+1)(x+2) - x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$.
0. Sviluppiamo i calcoli al numeratore: $\frac{x^2 + 3x + 2 - (x^2 - x)}{(x-1)(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{4x+2}{(x-1)(x+2)} \geq 0$. Studiamo ora i segni: $N \geq 0 \Rightarrow 4x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1/2$; $D_1 > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $D_2 > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Costruendo il quadro dei segni e selezionando gli intervalli positivi o nulli (escludendo i valori che annullano il denominatore), otteniamo: $-2 < x \leq -1/2 \vee x > 1$.

- (c) Calcoliamo il denominatore comune: $\frac{(x-1)(x+3) - (x+1)(x-2)}{(x-2)(x+3)} > 0$. Sviluppando i prodotti al numeratore: $\frac{x^2 + 2x - 3 - (x^2 - x - 2)}{(x-2)(x+3)} > 0$, che semplificato dà $\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)} > 0$. Studiamo i segni: $N > 0 \Rightarrow 3x-1 > 0 \Rightarrow x > 1/3$; $D_1 > 0 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$; $D_2 > 0 \Rightarrow x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$. Costruendo il quadro dei segni, la frazione è positiva negli intervalli:

$$-3 < x < 1/3 \vee x > 2.$$

- (d) Troviamo il minimo comune denominatore: $\frac{(x+2)(x+1) - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$.
Sviluppando i prodotti e il quadrato di binomio: $\frac{x^2 + 3x + 2 - (x^2 - 2x + 1)}{(x-1)(x+1)} \leq$

0, ovvero $\frac{5x+1}{(x-1)(x+1)} \leq 0$. Studio del segno: $N \geq 0 \Rightarrow 5x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1/5$; $D_1 > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $D_2 > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$. Dal quadro dei segni ricaviamo che la frazione è minore o uguale a zero per: $x < -1 \vee -1/5 \leq x < 1$.

- (e) Calcoliamo il denominatore comune: $\frac{x(x+3) - (x-2)^2}{(x-2)(x+3)} \geq 0$. Sviluppando i calcoli: $\frac{x^2 + 3x - (x^2 - 4x + 4)}{(x-2)(x+3)} \geq 0 \Rightarrow \frac{7x-4}{(x-2)(x+3)} \geq 0$. Analizziamo i segni: $N \geq 0 \Rightarrow 7x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4/7$; $D_1 > 0 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$; $D_2 > 0 \Rightarrow x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$. Tramite il quadro dei segni, cerchiamo i valori in cui il rapporto è positivo o nullo: $-3 < x \leq 4/7 \vee x > 2$.

- (f) Sommiamo le due frazioni: $\frac{(x-3)(x+4) - (x-2)(x-1)}{(x-1)(x+4)} < 0$. Espandendo e cambiando i segni: $\frac{x^2 + x - 12 - (x^2 - 3x + 2)}{(x-1)(x+4)} < 0 \Rightarrow \frac{4x-14}{(x-1)(x+4)} < 0$. Poniamo i fattori positivi: $N > 0 \Rightarrow 4x-14 > 0 \Rightarrow x > 7/2$; $D_1 > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$; $D_2 > 0 \Rightarrow x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$. Impostando lo schema dei segni, la disequazione è verificata (negativa) per: $x < -4 \vee 1 < x < 7/2$.

- (g) Facciamo il minimo comune multiplo: $\frac{(x+3)(x-2) - (x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} > 0$. Risolviamo il numeratore: $\frac{x^2 + x - 6 - (x^2 - 1)}{(x-1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{x-5}{(x-1)(x-2)} > 0$. Valutiamo i segni: $N > 0 \Rightarrow x-5 > 0 \Rightarrow x > 5$; $D_1 > 0 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$.

$0 \Rightarrow x > 1$; $D_2 > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$. Elaborando lo schema, ricaviamo le zone in cui il rapporto è positivo: $1 < x < 2 \vee x > 5$.

- (h) Riduciamo a un'unica frazione: $\frac{(x-2)(x-3) - (x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} \leq 0$. Svolgiamo i calcoli al numeratore: $\frac{x^2 - 5x + 6 - (x^2 + 3x + 2)}{(x+2)(x-3)} \leq 0 \Rightarrow \frac{-8x + 4}{(x+2)(x-3)} \leq 0$. Segno dei termini: $N \geq 0 \Rightarrow -8x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1/2$; $D_1 > 0 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$; $D_2 > 0 \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$. Guardando il prodotto dei segni nel grafico, il risultato finale (minore o uguale a zero) è: $-2 < x \leq 1/2 \vee x > 3$.

- (i) Sviluppiamo a denominatore comune: $\frac{x(x-2) - (x-4)(x+1)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$. Calcoliamo il numeratore: $\frac{x^2 - 2x - (x^2 - 3x - 4)}{(x+1)(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+4}{(x+1)(x-2)} \geq 0$. Verifichiamo i segni: $N \geq 0 \Rightarrow x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$; $D_1 > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$; $D_2 > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$. Incrociando i risultati nel tabellone dei segni, la disequazione è vera negli intervalli: $-4 \leq x < -1 \vee x > 2$.

- (j) Portiamo le frazioni allo stesso denominatore: $\frac{(x-1)(x+1) - (x-2)(x+3)}{(x+3)(x+1)} < 0$. Eseguiamo le operazioni in alto: $\frac{x^2 - 1 - (x^2 + x - 6)}{(x+3)(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{-x+5}{(x+3)(x+1)} < 0$. Poniamo tutto maggiore di zero: $N > 0 \Rightarrow -x + 5 > 0 \Rightarrow x < 5$; $D_1 > 0 \Rightarrow x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$; $D_2 > 0 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$. Costruendo il diagramma, le aree negative sono: $-3 < x < -1 \vee x > 5$.

- (k) Comunichiamo il denominatore: $\frac{x(x+4) - (x+1)(x-1)}{x(x-1)} > 0$. Risolvendo il numeratore con il prodotto notevole otteniamo: $\frac{x^2 + 4x - (x^2 - 1)}{x(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{4x+1}{x(x-1)} > 0$. Analisi del segno: $N > 0 \Rightarrow 4x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1/4$;

$D_1 > 0 \Rightarrow x > 0$; $D_2 > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Osservando lo schema riepilogativo per i valori > 0 , l'insieme delle soluzioni è: $-1/4 < x < 0 \vee x > 1$.

- (l) Scriviamo con lo stesso minimo comune multiplo: $\frac{(x-2)(x+2) - (x+3)(x-4)}{(x-4)(x+2)} \leq 0$. Al numeratore avremo: $\frac{x^2 - 4 - (x^2 - x - 12)}{(x-4)(x+2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x+8}{(x-4)(x+2)} \leq 0$. Studiamo separatamente: $N \geq 0 \Rightarrow x + 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq -8$; $D_1 > 0 \Rightarrow x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$; $D_2 > 0 \Rightarrow x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$. Dal quadro dei segni ricaviamo le regioni in cui la frazione è minore o uguale a zero: $x \leq -8 \vee -2 < x < 4$.

Problema: *DS0013* - Disequazioni fratte con numeratori e denominatori di secondo grado.

Testo [*DS0013*] [2★ 3🕒 2📖] Risolvi la seguente disequazione.

$$(a) \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2} \geq 0$$

$$(b) \frac{2x^2 + 5x}{x^2 - 4} > 1$$

$$(c) \frac{x^2 + 3}{x^2 - 2x} \leq 2$$

$$(d) \frac{2x + 1}{x - 2} + \frac{x}{x + 1} > 0$$

$$(e) \frac{3x^2}{x^2 + 1} < 2$$

$$(f) \frac{2(x - 1)^2}{x^2 + 3x} \leq 1$$

$$(g) \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} \geq 2$$

$$(h) \frac{2x}{x - 3} - \frac{x}{x + 2} < 0$$

$$(i) \frac{x^2 + 6x}{x^2 + x + 1} \geq 1$$

$$(j) \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} > 3$$

$$(k) \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2 - 5} \leq 1$$

$$(l) \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x + 1} \geq 0$$

$$(m) \frac{x^2 - 5}{x^2 + 4x + 4} \leq 0$$

$$(n) \frac{x^2 - 7}{x^2 + 3x - 1} \geq 0$$

Spiegazione Studio del segno di una frazione con numeratore e denominatore trinomi di secondo grado che daranno disequazioni di secondo grado.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) .

(b) .

(c) .

(d) .

(e) .

(f) .

(g) .

(h) .

(i) .

(j) .

(k) .

(l) $x \leq 2 \vee x \geq 4$.

(m) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$ e $x \neq -2$.

(n) $x \leq -\sqrt{7} \vee \frac{-3-\sqrt{13}}{2} < x \leq \sqrt{7} \vee x > \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

5.4 Disequazioni di secondo grado con valori assoluti

Problema: DS0055 - Algebra letterale**Testo** [DS0055] [2½★ 3🕒 2📖] Risolvi la seguente disequazione

(a) $x^2 - 3|x| + 2 > 0$

(b) $x^2 - 5|x| + 6 < 0$

(c) $x^2 - 3|x - 1| + 2 > 0$

(d) $x^2 + |x - 1| - 7 \leq 0$

(e) $|x^2 - 3x| > 2$

(f) $|x^2 - 2x - 3| \geq 2x + 1$

(g) $(x + 2)^2 - 5|x + 1| + 3 < 0$

(h) $3x^2 + |x| \leq 4$

(i) $|x^2 - 1| > |x + 1|$

(j) $(|x| - 3)(|x| + 1) > 2|x|$

(k) $|2x^2 - x| > 2x^2 + x - 8$

Spiegazione**Svolgimento** Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $x < -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2.$

(b) $-3 < x < -2 \quad \vee \quad 2 < x < 3.$

(c) $x < \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad x > \frac{-3+\sqrt{13}}{2}.$

(d) $-2 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{33}}{2}.$

(e) $x < \frac{3-\sqrt{17}}{2} \quad \text{o} \quad 1 < x < 2 \quad \text{o} \quad x > \frac{3+\sqrt{17}}{2}.$

(f) $(-\infty, \sqrt{2}] \cup [2 + 2\sqrt{2}, +\infty).$

(g) $\frac{-9 - \sqrt{33}}{2} < x < \frac{-9 + \sqrt{33}}{2}.$

(h) $-1 \leq x \leq 1.$

(i) $x < -1 \vee -1 < x < 0 \vee x > 2.$

(j) $x < -2 - \sqrt{7} \quad \vee \quad x > 2 + \sqrt{7}.$

(k) $x < 4.$

5.5 Disequazioni irrazionali

Problema: *DS0060* - Disequazioni irrazionali (con risoluzioni al più di una disequazione di secondo grado)

Testo [*DS0060*] [1½★ 3🕒 2📖] Esegui la seguente disequazione irrazionale

(a) $\sqrt{x+3} < x+1$

(b) $\sqrt{x-1} > x-3$

(c) $\sqrt{x^2-9} \leq x-1$

(d) $\sqrt{x^2+1} \geq x+1$

(e) $\sqrt{x-2} < x-4$

(f) $\sqrt{x+7} > x+1$

(g) $\sqrt{x^2-1} < x$

(h) $\sqrt{x^2-4} > x$

(i) $\sqrt{2x+5} \leq x+1$

(j) $\sqrt{x+4} \geq x-2$

(k) $\sqrt{x^2-3x} < x-1$

(l) $\sqrt{x^2+x} > x$

(m) $\sqrt{1-x^2} \leq x$

(n) $\sqrt{4-x^2} \geq x$

(o) $\sqrt{x+1} < 1-x$

(p) $\sqrt{x} > x-2$

(q) $\sqrt{x^2-5x+6} < x-2$

(r) $\sqrt{x^2-x} \geq x-1$

(s) $\sqrt{x^2+x+4} \geq x+3$

(t) $\sqrt{x^4-1} > x^2-x$

(u) $\sqrt{x^2-5x+4} > x-2$

Spiegazione Una disequazione di secondo grado si risolve seguendo uno schema di lavoro ben preciso. Seguitelo ed arrivate al risultato.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a)

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \\ x + 3 < (x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x > -1 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x > -1 \\ x < -2 \vee x > 1 \end{cases}$$

$$x > 1$$

(b)

$$\begin{cases} x - 3 < 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x - 1 > (x - 3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 3 \\ 2 < x < 5 \end{cases}$$

$$[1, 3) \cup [3, 5)$$

$$1 \leq x < 5$$

(c)

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 9 \leq (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ x \geq 1 \\ 2x \leq 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$3 \leq x \leq 5$$

(d)

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ x^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 1 \geq (x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x \leq 0 \end{cases}$$

$$x < -1 \cup [-1, 0]$$

$$x \leq 0$$

(e)

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 4 > 0 \\ x - 2 < (x - 4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > 4 \\ x^2 - 9x + 18 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x > 4 \\ x < 3 \vee x > 6 \\ x > 6 \end{cases}$$

(f)

$$\begin{cases} x + 1 < 0 \\ x + 7 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 7 > (x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x \geq -7 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$$

$$[-7, -1) \cup [-1, 2)$$

$$-7 \leq x < 2$$

(g)

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2 - 1 < x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x > 0 \\ -1 < 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

(h)

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4 > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \leq -2 \vee x \geq 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ -4 > 0 \end{cases}$$

$$x \leq -2 \cup \emptyset$$

$$x \leq -2$$

(i)

$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ 2x + 5 \leq (x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x \geq -1 \\ x^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x \geq -1 \\ x \leq -2 \vee x \geq 2 \end{cases}$$

$$x \geq 2$$

(l)

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x > x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \leq -1 \vee x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x \leq -1 \cup x > 0$$

(j)

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 4 \geq (x - 2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x \geq -4 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x \leq 0 \end{cases}$$

$$[-4, 2) \cup [2, 5]$$

$$-4 \leq x \leq 5$$

(m)

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 1 - x^2 \leq x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \\ x^2 \geq 1/2 \end{cases}$$

(k)

$$\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 - 3x < (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 3 \\ x > 1 \\ x > -1 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1$$

(n)

$$\begin{cases} x < 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$[-2, 0) \cup [0, \sqrt{2}]$$

$$-2 \leq x \leq \sqrt{2}$$

(o)

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 1 - x > 0 \\ x + 1 < (1 - x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 1 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ x < 0 \vee x > 3 \end{cases}$$

$$-1 \leq x < 0$$

(p)

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x > (x - 2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$$

$$[0, 2) \cup [2, 4)$$

$$0 \leq x < 4$$

(q)

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < (x - 2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \vee x \geq 3 \\ x > 2 \\ -x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$

(r)

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x \geq (x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$x \leq 0 \cup x \geq 1$$

(s)

$$\begin{cases} x+3 < 0 \\ x^2+x+4 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2+x+4 \geq (x+3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ \forall x \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq -3 \\ 5x \leq -5 \end{cases}$$

$$x < -3 \cup [-3, -1]$$

$$x \leq -1$$

$$x \leq 1 \cup \emptyset$$

$$x \leq 1$$

(t)

$$\begin{cases} x^2-x < 0 \\ x^4-1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-x \geq 0 \\ x^4-1 > (x^2-x)^2 \end{cases}$$

$$\emptyset \cup \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ 2x^3-x^2-1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)(2x^2+x+1) > 0 \end{cases}$$

$$x > 1$$

(u)

$$\begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2-5x+4 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-5x+4 > (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x \leq 1 \vee x \geq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2 \\ -x > 0 \end{cases}$$

Problema: DS0063 - Disequazioni irrazionali (con risoluzioni di due disequazioni di secondo grado)

Testo [DS0063] [1¼★ 3½🕒 2📖] Esegui la seguente disequazione irrazionale

(a) $\sqrt{x^2 - 9} < \frac{x}{2} + 1$

(b) $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \leq x - 1$

(c) $\sqrt{x^2 - 4} < \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$

(d) $\sqrt{x^2 - 2x} \geq \sqrt{3x^2 - 6x}$

(e) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq \sqrt{x^2 + x - 2}$

(f) $\sqrt{3x^2 - 2x - 5} > \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$

(g) $\sqrt{4x^2 - 9} < \sqrt{x^2 + 3x}$

(h) $\sqrt{2x^2 - 8} \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$

(i) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} \geq \sqrt{2x^2 + 3x + 1}$

(j) $\sqrt{5x^2 - 4x} < \sqrt{2x^2 - x + 2}$

(k) $\sqrt{x^2 - 9} \leq \sqrt{4x^2 - 4x - 8}$

(l) $\sqrt{2x^2 + 5x - 3} > \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

Spiegazione Una disequazione di secondo grado si risolve seguendo uno schema di lavoro ben preciso. Seguitelo ed arrivate al risultato.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

$$(a) \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ \frac{x}{2} + 1 > 0 \\ x^2 - 9 < \frac{x^2}{4} + x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ x > -2 \\ 3x^2 - 4x - 40 < 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq x < \frac{2 + 2\sqrt{31}}{3}.$$

$$(b) \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \leq (x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 1 \\ x \geq 1 \\ x^2 - x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

$$(c) \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 < 2x^2 - 3x - 2 \\ x \leq -2 \vee x > 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x < 1 \vee x > 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(d) \begin{cases} 3x^2 - 6x \geq 0 \\ x^2 - 2x \geq 3x^2 - 6x \\ 0 \vee x = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x(x - 2) \geq 0 \\ 2x^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x =$$

$$(e) \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \leq x^2 + x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq \frac{3}{2} \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq \frac{3}{2} \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = 1 \vee \frac{3}{2} \leq x \leq 5.$$

$$(f) \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 2x - 5 > 2x^2 - 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 2 \\ x^2 + x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 2 \\ x < \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \vee x > \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$x < \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \vee x \geq 2.$$

$$(g) \begin{cases} 4x^2 - 9 \geq 0 \\ 4x^2 - 9 < x^2 + 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \vee x \geq \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 3x - 9 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \vee x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} \leq x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$(h) \begin{cases} 2x^2 - 8 \geq 0 \\ 2x^2 - 8 \leq x^2 - x - 2 \\ -3 \leq x \leq -2 \vee x = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(i) \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 2x - 1 \geq 2x^2 + 3x + 1 \\ x \leq -1 \vee x \geq 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq -1 \vee x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(j) \begin{cases} 5x^2 - 4x \geq 0 \\ 5x^2 - 4x < 2x^2 - x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq \frac{4}{5} \\ 3x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee x \geq \frac{4}{5} \\ \frac{3 - \sqrt{33}}{6} < x < \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{3 - \sqrt{33}}{6} < x \leq 0 \vee \frac{4}{5} \leq x < \frac{3 + \sqrt{33}}{6}.$$

$$(k) \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x^2 - 9 \leq 4x^2 - 4x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ 3x^2 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ x \leq \frac{1}{3} \vee x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \leq -3 \vee x \geq 3.$$

$$(I) \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 5x - 3 > x^2 + 2x - 3 \\ x < -3 \vee x \geq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 1 \\ x^2 + 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 1 \\ x < -3 \vee x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Problema: *DS0061* - Disequazioni irrazionali (con risoluzioni complesse)

Testo [*DS0061*] [2½★ 4🕒 2📖]

(a) $\sqrt{x^2 - 1} \geq x^2 - 3$

(b) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} < 2x + 1$

(c) $\sqrt{x^2 + 1} < x^2 - 1$

(d) $\sqrt{x^2 - 4} < x^2 - 4$

Spiegazione Una disequazione di secondo grado si risolve seguendo uno schema di lavoro ben preciso. Seguitelo ed arrivate al risultato.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Trattandosi di una disequazione del tipo $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$, dobbiamo analizzare l'unione di due sistemi.

Il primo sistema considera il caso in cui il membro di destra è negativo (e il radicando esiste):

$$\begin{cases} x^2 - 3 < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Risolviamo le singole disequazioni:

$$\begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

Intersecando le soluzioni otteniamo il primo intervallo valido:

$$S_1 : (-\sqrt{3} < x \leq -1) \vee (1 \leq x < \sqrt{3})$$

Il secondo sistema considera il caso in cui il membro di destra è non negativo (possiamo elevare al quadrato):

$$\begin{cases} x^2 - 3 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq (x^2 - 3)^2 \end{cases}$$

Sviluppiamo la seconda disequazione:

$$x^2 - 1 \geq x^4 - 6x^2 + 9 \Rightarrow x^4 - 7x^2 + 10 \leq 0$$

Risolviamo la biquadratica ponendo $t = x^2$: $t^2 - 7t + 10 \leq 0$. Le radici sono 2 e 5, quindi $2 \leq x^2 \leq 5$. Il sistema diventa:

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \\ (-\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{2}) \vee (\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{5}) \end{cases}$$

Intersecando con la condizione $x^2 \geq 3$:

$$S_2 : [-\sqrt{5}, -\sqrt{3}] \vee [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$$

Uniamo le soluzioni $S_1 \cup S_2$:

$$S_{tot} : [-\sqrt{5}, -1] \vee [1, \sqrt{5}]$$

- (b) Per le disequazioni della forma $\sqrt{A(x)} < B(x)$ si imposta un unico sistema a tre condizioni.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 \geq 0 & \text{(Realtà radicale)} \\ 2x + 1 > 0 & \text{(Concordanza segno)} \\ 3x^2 + 2x - 1 < (2x + 1)^2 & \text{(Elevamento al quadrato)} \end{cases}$$

Risolviamo la prima (radici -1 e $1/3$):

$$x \leq -1 \vee x \geq \frac{1}{3}$$

Risolviamo la seconda:

$$x > -\frac{1}{2}$$

Sviluppiamo la terza:

$$3x^2 + 2x - 1 < 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 > 0$$

Questa è sempre verificata ($\forall x \in \mathbb{R}$) poiché il $\Delta < 0$.

Intersechiamo le condizioni valide:

$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq \frac{1}{3} \\ x > -\frac{1}{2} \\ \forall x \end{cases}$$

La soluzione comune è:

$$x \geq \frac{1}{3}$$

.

(c) Impostiamo il sistema per la forma $\sqrt{A(x)} < B(x)$.

$$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 > 0 \\ x^2 + 1 < (x^2 - 1)^2 \end{cases}$$

La prima è sempre vera. La seconda impone $x < -1 \vee x > 1$. Sviluppiamo la terza:

$$x^2 + 1 < x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow x^4 - 3x^2 > 0$$

Raccogliamo x^2 :

$$x^2(x^2 - 3) > 0$$

Poiché $x^2 \geq 0$ (e $x \neq 0$ per la seconda condizione), basta studiare $x^2 - 3 > 0$:

$$x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$$

Intersecando con $x < -1 \vee x > 1$, la soluzione, più restrittiva, è:

$$x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$$

.

(d) Possiamo procedere con il sistema classico o notare che la disequazione è del tipo $\sqrt{t} < t$ con $t = x^2 - 4$. Affinché $\sqrt{t} < t$ sia vera, deve essere $t > 1$ (si deduce dal sistema $t \geq 0, t > 0, t < t^2$).

Procediamo comunque con il sistema standard:

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4 < (x^2 - 4)^2 \end{cases}$$

Le prime due si riassumono in $x^2 - 4 > 0$, ovvero $x < -2 \vee x > 2$. Per la terza, poniamo $y = x^2 - 4$:

$$y < y^2 \Rightarrow y^2 - y > 0 \Rightarrow y(y - 1) > 0$$

Soluzione per y : $y < 0 \vee y > 1$. Tuttavia, la seconda condizione del sistema impone $y > 0$, quindi accettiamo solo $y > 1$. Torniamo alla variabile x :

$$x^2 - 4 > 1 \Rightarrow x^2 > 5$$

Le soluzioni sono:

$$x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5}$$

.

Problema: *DS0064* - Disequazioni irrazionali (con risoluzioni complesse)

Testo [*DS0064*] [3★ 4🕒 2📖] Esegui la seguente disequazione irrazionale

(a) $\sqrt{8 - x^3} > 2 - x$

Spiegazione Una disequazione irrazionale si risolve seguendo uno schema di lavoro ben preciso. Seguitelo ed arrivate al risultato. Tra le disequazioni presenti nel/nei sistemi compariranno disequazioni di grado superiore al secondo

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) Impostiamo l'unione di due sistemi per la forma $\sqrt{A(x)} > B(x)$.

Primo sistema (secondo membro negativo):

$$\begin{cases} 2 - x < 0 \\ 8 - x^3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^3 \leq 8 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

Secondo sistema (secondo membro positivo, eleviamo al quadrato):

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 8 - x^3 > (2 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 8 - x^3 > 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^3 + x^2 - 4x - 4 < 0 \end{cases}$$

Scomponiamo $x^3 + x^2 - 4x - 4 < 0$ con raccoglimento parziale: $x^2(x + 1) - 4(x + 1) < 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - 4) < 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 2)(x + 2) < 0$. Lo studio del segno fornisce $x < -2 \vee -1 < x < 2$. Intersecando con $x \leq 2$, otteniamo: $x < -2 \vee -1 < x < 2$.

Problema: *DS0062* - Disequazioni irrazionali (con risoluzioni con disequazioni fratte.)

Testo [*DS0062*] [3★ 4🕒 2📖] Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

(a) $\sqrt{\frac{1}{x-1}} > \frac{1}{x}$

(b) $\sqrt{\frac{x}{x+4}} < x$

(c) $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \leq x$

(d) $\sqrt{\frac{8}{x-1}} > x-1$

Spiegazione Una disequazione di secondo grado si risolve seguendo uno schema di lavoro ben preciso. Seguitelo ed arrivate al risultato.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Analizziamo il dominio: $x > 1$. In questo intervallo il secondo membro $\frac{1}{x}$ è sempre positivo, quindi possiamo elevare al quadrato direttamente imponendo la concordanza.

$$\begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Portiamo tutto a sinistra e facciamo il denominatore comune:

$$\frac{x^2 - (x-1)}{x^2(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x^2(x-1)} > 0$$

Il numeratore $x^2 - x + 1$ ha $\Delta < 0$, quindi è sempre positivo in quanto lo è il coefficiente di x^2 . Il denominatore è positivo per $x > 1$.

$$x > 1$$

- (b) Impostiamo il sistema per $\sqrt{A} < B$.

$$\begin{cases} \frac{x}{x+4} \geq 0 \\ x > 0 \\ \frac{x}{x+4} < x^2 \end{cases}$$

Dalle prime due otteniamo $x > 0$. Nella terza, potendo dividere per x (che è positivo):

$$\frac{1}{x+4} < x \Rightarrow 1 < x^2 + 4x$$

Risolviamo $x^2 + 4x - 1 > 0$. Le radici sono $-2 \pm \sqrt{5}$.

$$x < -2 - \sqrt{5} \vee x > -2 + \sqrt{5}$$

Intersecando con la condizione di esistenza $x > 0$:

$$x > \sqrt{5} - 2$$

.

- (c) Impostiamo il sistema.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+2} \geq 0 \\ x \geq 0 \\ \frac{x-2}{x+2} \leq x^2 \end{cases}$$

Il dominio è $x < -2 \vee x \geq 2$. Intersecando con $x \geq 0$ otteniamo $x \geq 2$. Sostituendo $x \geq 2$ nella terza disequazione:

Primo membro < 1 , Secondo membro ≥ 4

La disuguaglianza è sempre verificata nel dominio trovato.

$$x \geq 2$$

.

- (d) Poniamo una variabile ausiliaria $t = x - 1$. La disequazione diventa $\sqrt{\frac{8}{t}} > t$.

$$\begin{cases} t > 0 \\ \frac{8}{t} > t^2 \end{cases}$$

Poiché $t > 0$ possiamo moltiplicare per t :

$$8 > t^3 \Rightarrow t < 2$$

Ritornando alla variabile x :

$$0 < x - 1 < 2 \Rightarrow 1 < x < 3$$

.

5.6 Sistemi di disequazioni

5.6.1 ... di primo grado

Problema: DS0001 - Algebra letterale

Testo [DS0001] [1★ 2🕒 1📖] Risolvi il seguente sistema di disequazioni lineari.

$$(a) \begin{cases} 3x + 5 < x + 7 \\ -3x + 5 > -2x + 7 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 2 > 3x - 4 \\ x - 2 > -2x + 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x + 2 > 3x - 4 \\ x - 3 > -x + 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 3x + 2 > 2x - 4 \\ -x + 3 > x + 2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 7x + 2 > 3x - 4 \\ x - 3 > -2x + 3 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} x - 2 > 3x + 4 \\ x + 1 > -x + 2 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} -5x + 6 > -2x + 9 \\ x + 2 < -4x - 7 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x + 6 < 4x + 2 \\ x < -2x \end{cases}$$

Spiegazione In un sistema di disequazioni di primo grado dovete risolvere entrambe le disequazioni; successivamente dovete risolvere il sistema, cioè trovare l'intervallo o gli intervalli di valori nei quali entrambe le disequazioni sono contemporaneamente verificate.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

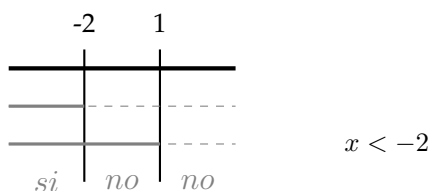
(a) Comincio con il portare i termini con la x da un lato ed i numeri dall'altro.

$$\begin{cases} 3x - x < +7 - 5 \\ -3x + 2x > +7 - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 2 \\ -x > 2 \end{cases}$$

Divido la prima per 2. Moltiplico la seconda per -1 e cambio verso alla disequazione

$$\begin{cases} \frac{2x}{2} < \frac{2}{2} \\ x < -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x < -2 \end{cases}$$

Il risultato del sistema (cioè dell'intersezione delle sue due righe) è



(d) $\left[-6 < x < \frac{1}{2}\right]$.

(e) $[x > 2]$.

(f) $[impossibile]$.

(g) $\left[x < -\frac{9}{5}\right]$.

(h) $[...]$.

(b) $[1 < x < 3]$.

(c) $\left[\frac{5}{2} < x < 6\right]$.

Problema: *DS0006* - Sistemi di disequazioni di primo grado.

Testo [\[DS0006\]](#) [1½★ 2🕒 1📖] Risolvi il seguente sistema di disequazioni.

$$(a) \begin{cases} (x+5)(x-5) > (x+5)^2 \\ 3x+1 < 4x-5 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} (x+3)(x-3) > (x+2)^2 \\ 2x+5 > 3x+2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x^2+9 > (x+2)^2 \\ 4x+3 < 6x+7 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x^2+9 > (x-1)^2 \\ (x+2)(x-2) > (x+1)^2 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} (x+4)^2 > (x-1)(x+1) \\ (x-5)^2 < (x+2)^2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} (2x+1)^2 > 4(x-1)^2 \\ x(x-3) \leq (x+4)^2 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} (x+2)(x-3) < (x-4)(x+1) \\ 2(x+1)^2 \geq (x-3)^2 + x^2 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} (x+1)^3 - x^3 > 3x^2 + 5x \\ (3x-1)(3x+1) < (3x+2)^2 \end{cases}$$

Spiegazione In un sistema di disequazioni di primo grado dovete risolvere entrambe le disequazioni; successivamente dovete risolvere il sistema, cioè trovare l'intervallo o gli intervalli di valori nei quali entrambe le disequazioni sono contemporaneamente verificate. Per questo esercizio non dimenticatevi i prodotti notevoli.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) *impossibile*.

(b) $x < -\frac{13}{4}$.

(c) $\left[-2 < x < \frac{5}{4}\right]$.

(d) $\left[-4 < x < -\frac{5}{2}\right]$.

(e) $x > \frac{3}{2}$.

(f) $x > \frac{1}{4}$.

(g) $\frac{7}{10} \leq x < 1$.

(h) .

5.6.2 ... fratte

Problema: DS0005 - Algebra letterale

Testo [DS0005] [3★ 3🕒 1📖] Risolvi il seguente sistema di disequazioni.

$$(a) \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x + 4} \geq 0 \\ 5x - 7 \leq 4x - 4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 9} + \frac{1}{x^2 - 3x} \leq 0 \\ 3x + 1 > 5 - x \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^2 - 2x + 1} > 0 \\ 4(x + 2) \leq 2x + 10 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9} \leq 0 \\ 2x + 1 > x - 3 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x} \leq 0 \\ 10x - 1 \geq 4x + 17 \end{cases}$$

Spiegazione Risolvete le singole disequazioni del sistema e successivamente risolvete il sistema intersecando gli intervalli trovati nelle singole disequazioni.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $[x < -2 \vee -2 < x \leq 0 \vee 2 < x \leq 3]$.

(b) $1 < x < 3$.

(c) $-3 < x < -1$.

(d) $-2 \leq x < 3$.

(e) Impossibile $(\emptyset)$.

Problema: DS0017 - Sistemi di disequazioni di secondo grado unicamente con trinomi speciali.

Testo [DS0017] [2★ 4🕒 1📖] Risolvi il seguente sistema di disequazioni.

$$(a) \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 9 \leq 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -x^2 + 4 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x^2 - x - 1 \leq 0 \\ x^2 - 4x > 0 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2x \leq 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} -x^2 + 3x > 0 \\ x^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} 2x^2 - 8 \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x^2 - 25 \geq 0 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} 3x^2 - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 > 0 \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} -x^2 + x + 2 \geq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases}$$

$$(l) \begin{cases} x^2 - 6x + 8 \leq 0 \\ -x^2 + 5x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$(m) \begin{cases} 4x^2 - 1 \leq 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(n) \begin{cases} x^2 + 4x + 4 \leq 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases}$$

$$(o) \begin{cases} x^2 + 2x - 8 < 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$(p) \begin{cases} x^2 - 5x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$(q) \begin{cases} -x^2 + 9 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 > 0 \end{cases}$$

$$(r) \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 8 \leq 0 \end{cases}$$

$$(s) \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0 \\ x^2 - 2x \leq 0 \end{cases}$$

$$(t) \begin{cases} x^2 + 3x \leq 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

$$(u) \begin{cases} x^2 - 10x + 25 \leq 0 \\ x^2 - 4x > 0 \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} -2x^2 + x + 1 \leq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$(w) \begin{cases} x^2 + x - 2 \leq 0 \\ -x^2 + 2x > 0 \end{cases}$$

$$(x) \begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < 0 \end{cases}$$

$$(y) \begin{cases} 3x^2 - 12 < 0 \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(z) \begin{cases} x^2 - x - 12 \leq 0 \\ x^2 + 5x + 6 > 0 \end{cases}$$

Spiegazione In un sistema di disequazioni di secondo grado dovete risolvere entrambe le disequazioni; successivamente dovete risolvere il sistema, cioè trovare l'intervallo o gli intervalli di valori nei quali entrambe le disequazioni sono contemporaneamente verificate.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Risolviamo la prima disequazione: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$. L'equazione associata ha soluzioni $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Con il verso $\geq$ prendiamo i valori esterni: $x \leq 1 \vee x \geq 3$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - x - 2 \leq 0$. L'equazione associata ha soluzioni $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$. Con il verso $\leq$ prendiamo i valori interni: $-1 \leq x \leq 2$.

Mettendo a sistema le due soluzioni:

$$\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Dalla rappresentazione degli intervalli si ricava che l'intersezione avviene per i valori compresi tra -1 e 1 , estremi inclusi..

- (b) Risolviamo la prima disequazione: $x^2 - 5x + 6 > 0$. L'equazione associata $x^2 - 5x + 6 = 0$ ha come soluzioni $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Poiché il verso è $>$, la disequazione è verificata per valori esterni all'intervallo delle radici: $x < 2 \vee x > 3$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 9 \leq 0$. L'equazione associata $x^2 - 9 = 0$ ha soluzioni $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$. Essendo il verso $\leq$, prendiamo i valori interni: $-3 \leq x \leq 3$.

Risolviamo ora il sistema intersecando le soluzioni:

$$\begin{cases} x < 2 \vee x > 3 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Rappresentando gli intervalli sulla retta reale, l'intersezione tra i due insiemi di soluzioni si ottiene per i valori compresi tra -3 (incluso) e 2 (escluso)..

- (c) Risolviamo la prima disequazione: $-x^2 + 4 \geq 0$. Moltiplicando per -1 e cambiando verso, otteniamo $x^2 - 4 \leq 0$. Le soluzioni dell'equazione associata sono $x = \pm 2$. Essendo il verso $\leq$, le soluzioni sono comprese nell'intervallo: $-2 \leq x \leq 2$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 + 2x + 1 > 0$. Si tratta del quadrato di un binomio: $(x + 1)^2 > 0$. Il quadrato di un numero è sempre strettamente positivo tranne quando la base è nulla. Si annulla per $x = -1$. Quindi è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ossia per $x \neq -1$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

L'intersezione tra l'intervallo chiuso da -2 a 2 e l'insieme di tutti i numeri reali tranne -1 genera un "buco" all'interno dell'intervallo..

- (d) Risolviamo la prima disequazione: $2x^2 - x - 1 \leq 0$. Calcoliamo il delta dell'equazione associata: $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 9$. Le soluzioni sono $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$, da cui $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$. Poiché il verso è $\leq$, le soluzioni sono i valori interni: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 4x > 0$. Raccogliendo la x otteniamo $x(x - 4) = 0$, con soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$. Con il verso $>$ prendiamo i valori esterni: $x < 0 \vee x > 4$.

Impostiamo il sistema con le soluzioni trovate:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x < 0 \vee x > 4 \end{cases}$$

Dalla rappresentazione grafica si osserva che gli intervalli si sovrappongono per i valori tra $-\frac{1}{2}$ (incluso) e 0 (escluso)..

- (e) Risolviamo la prima disequazione: $x^2 - 1 > 0$. Le soluzioni dell'equazione associata sono $x = \pm 1$. Essendo il verso $>$, prendiamo i valori esterni: $x < -1 \vee x > 1$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 2x \leq 0$. Mettendo in evidenza la x si ha $x(x - 2) = 0$, le cui radici sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Con il verso $\leq$, prendiamo i valori interni: $0 \leq x \leq 2$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

L'intersezione tra i due intervalli si ottiene per i valori tra 1 e 2..

- (f) Risolviamo la prima disequazione: $-x^2 + 3x > 0$. Cambiando di segno si ha $x^2 - 3x < 0$. Le radici sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$. Per il verso $<$, prendiamo i valori interni: $0 < x < 3$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 16 \leq 0$. Le radici associate sono ± 4 . Essendo il verso $\leq$, consideriamo i valori interni: $-4 \leq x \leq 4$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 0 < x < 3 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Rappresentando graficamente, l'intersezione è data dall'intero intervallo aperto $(0, 3)$, in quanto è contenuto in $[-4, 4]$..

- (g) Risolviamo la prima disequazione: $x^2 + x - 6 \geq 0$. Scomponendo si ha $(x + 3)(x - 2) \geq 0$. Le radici sono -3 e 2 . Con il verso $\geq$, prendiamo i valori esterni: $x \leq -3 \vee x \geq 2$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - x < 0$. Scomponendo si ottiene $x(x - 1) < 0$. Le radici sono 0 e 1 . Essendo il verso $<$, prendiamo i valori interni: $0 < x < 1$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Come si può notare graficamente, i due intervalli non hanno alcuna parte in comune. Il sistema non ammette soluzioni..

- (h) Risolviamo la prima disequazione: $2x^2 - 8 \leq 0$. Dividendo per 2 otteniamo $x^2 - 4 \leq 0$, con soluzioni $-2 \leq x \leq 2$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Scomponendo come trinomio notevole otteniamo $(x - 1)(x - 2) \geq 0$. Le radici sono 1 e 2 . Essendo il verso $\geq$, prendiamo i valori esterni: $x \leq 1 \vee x \geq 2$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \leq 1 \vee x \geq 2 \end{cases}$$

Dall'intersezione grafica notiamo che gli insiemi si sovrappongono nell'intervallo tra -2 e 1 inclusi, e condividono il singolo punto $x = 2$..

- (i) La prima disequazione è $x^2 - 9x + 14 < 0$. Scomponendo troviamo $(x - 2)(x - 7) < 0$. Le radici sono 2 e 7 . Poiché il verso è $<$, la soluzione è $2 < x < 7$.

La seconda disequazione è $x^2 - 25 \geq 0$. Le radici sono ± 5 . Il verso è $\geq$, quindi prendiamo i valori esterni: $x \leq -5 \vee x \geq 5$.

Intersecando a sistema:

$$\begin{cases} 2 < x < 7 \\ x \leq -5 \vee x \geq 5 \end{cases}$$

La zona in cui sono verificate entrambe cade tra il 5 (compreso) e il 7 (escluso)..

- (j) Prima disequazione: $3x^2 - 3 \geq 0$. Dividiamo per 3: $x^2 - 1 \geq 0$. Soluzioni per valori esterni: $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

Seconda disequazione: $x^2 - 4x + 4 > 0$. Riconosciamo il quadrato di un binomio: $(x - 2)^2 > 0$. È strettamente maggiore di zero per ogni valore tranne quello che lo annulla, perciò $x \neq 2$.

Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

L'intersezione richiede di escludere il valore 2 dall'intervallo delle soluzioni della prima disequazione..

- (k) Risolviamo la prima disequazione cambiando di segno e verso: $x^2 - x - 2 \leq 0$. Le radici di $(x - 2)(x + 1) = 0$ sono -1 e 2 . Valori interni: $-1 \leq x \leq 2$.

Risolviamo la seconda: $x^2 - x \geq 0$. Le radici di $x(x - 1) = 0$ sono 0 e 1 . Valori esterni: $x \leq 0 \vee x \geq 1$.

A sistema:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

L'intersezione genera due intervalli disgiunti e chiusi..

- (l) La prima disequazione è $x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 4) \leq 0$. Radici 2 e 4 . Valori interni: $2 \leq x \leq 4$.

La seconda disequazione si può riscrivere come $x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 4) < 0$. Radici 1 e 4 . Valori interni: $1 < x < 4$.

Mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$$

Intersecando notiamo che l'estremo 4 è incluso nel primo ma escluso nel secondo, quindi rimane escluso nell'intersezione..

- (m) Prima disequazione: $4x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4}$. Radici associate $\pm \frac{1}{2}$. Valori interni: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Seconda disequazione: $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$. Calcoliamo il delta: $\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25$. Le radici sono $x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$, cioè -2 e $\frac{1}{2}$. Valori esterni: $x \leq -2 \vee x \geq \frac{1}{2}$.

Sistema:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x \leq -2 \vee x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dall'intersezione grafica l'unico valore in comune tra i due insiemi è esattamente $\frac{1}{2}$..

- (n) Prima disequazione: $x^2 + 4x + 4 \leq 0$. Trinomio quadrato perfetto: $(x + 2)^2 \leq 0$. Un quadrato non può essere negativo, può solo essere nullo. Si annulla unicamente per $x = -2$.

Seconda disequazione: $x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x - 1) > 0$. Radici 0 e 1 . Valori esterni: $x < 0 \vee x > 1$.

Sistema:

$$\begin{cases} x = -2 \\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$

Verifichiamo se il singolo punto $x = -2$ cade nell'intervallo delle soluzioni della seconda disequazione. Poiché $-2 < 0$, è accettabile..

- (o) Prima disequazione: $x^2 + 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) < 0$. Radici -4 e 2 . Valori interni: $-4 < x < 2$.

Seconda disequazione: $x^2 - 1 > 0$. Radici ± 1 . Valori esterni: $x < -1 \vee x > 1$.

Sistema:

$$\begin{cases} -4 < x < 2 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

Sovrapponendo le soluzioni sulla retta, si individuano due intervalli comuni compresi tra i vari estremi..

- (p) Prima disequazione: $x^2 - 5x < 0 \Rightarrow x(x-5) < 0$. Radici 0 e 5 . Valori interni: $0 < x < 5$.

Seconda disequazione: $x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \leq 0$. Radici 1 e 3 . Valori interni: $1 \leq x \leq 3$.

Sistema:

$$\begin{cases} 0 < x < 5 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Poiché l'intervallo $[1, 3]$ è interamente contenuto nell'intervallo aperto $(0, 5)$, l'intersezione coincide con il secondo intervallo..

- (q) Prima disequazione: $-x^2 + 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 9 \leq 0$. Radici ± 3 . Valori interni: $-3 \leq x \leq 3$.

Seconda disequazione: $x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) > 0$. Radici -2 e 3 . Valori esterni: $x < -2 \vee x > 3$.

Sistema:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x < -2 \vee x > 3 \end{cases}$$

Incrociando sulla retta reale, la sovrapposizione avviene solo nella porzione sinistra..

- (r) Prima disequazione: $x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) \leq 0$. Radici 2 e 5 . Valori interni: $2 \leq x \leq 5$.

Seconda disequazione: $x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) \leq 0$. Radici 2 e 4 . Valori interni: $2 \leq x \leq 4$.

Sistema:

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

La zona comune a entrambi i segmenti sulla retta numerica è data dal più restrittivo dei due intervalli..

- (s) Prima disequazione: $2x^2 - 5x + 2 > 0 \Rightarrow (2x-1)(x-2) > 0$. Radici $\frac{1}{2}$ e 2 . Valori esterni: $x < \frac{1}{2} \vee x > 2$.

Seconda disequazione: $x^2 - 2x \leq 0 \Rightarrow x(x-2) \leq 0$. Radici 0 e 2 . Valori interni: $0 \leq x \leq 2$.

Sistema:

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \vee x > 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Intersecando gli intervalli, l'estremo 2 fa parte del secondo ma non del primo. Ci resta unicamente la porzione sinistra..

- (t) Prima disequazione: $x^2 + 3x \leq 0 \Rightarrow x(x+3) \leq 0$. Radici -3 e 0 . Valori interni: $-3 \leq x \leq 0$.

Seconda disequazione: $x^2 - 9 > 0$. Radici ± 3 . Valori esterni: $x < -3 \vee x > 3$.

Sistema:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ x < -3 \vee x > 3 \end{cases}$$

L'estremo -3 è incluso nel primo intervallo ma escluso dal secondo. Non ci sono altri punti in comune. Pertanto il sistema è impossibile..

- (u) Prima disequazione: $x^2 - 10x + 25 \leq 0 \Rightarrow (x - 5)^2 \leq 0$. Si tratta di un quadrato perfetto che è minore o uguale a zero solo quando si annulla, quindi l'unica soluzione è $x = 5$.

Seconda disequazione: $x^2 - 4x > 0 \Rightarrow x(x - 4) > 0$. Radici 0 e 4. Valori esterni: $x < 0 \vee x > 4$.

Sistema:

$$\begin{cases} x = 5 \\ x < 0 \vee x > 4 \end{cases}$$

Verifichiamo il punto isolato: essendo $5 > 4$, rientra nell'intervallo accettato dalla seconda condizione..

- (v) Prima disequazione: moltiplichiamo per -1 e cambiamo verso: $2x^2 - x - 1 \geq 0$. Le radici associate sono $-\frac{1}{2}$ e 1 . Essendo ora $\geq$, si prendono i valori esterni: $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1$.

Seconda disequazione: $x^2 - 1 \leq 0$. Radici ± 1 . Verso $\leq$, quindi prendiamo i valori interni: $-1 \leq x \leq 1$.

Sistema:

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

L'intersezione fornisce un segmento da sinistra e isola il punto 1 da destra..

- (w) Prima disequazione: $x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) \leq 0$. Radici -2 e 1 . Valori interni: $-2 \leq x \leq 1$.

Seconda disequazione: $-x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow x(x - 2) < 0$. Radici 0 e 2. Valori interni: $0 < x < 2$.

Sistema:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

Sovrapponendo le soluzioni, le condizioni coesistono tra i due estremi centrali..

- (x) Prima disequazione: $x^2 - 8x + 15 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) > 0$. Radici 3 e 5. Valori esterni: $x < 3 \vee x > 5$.

Seconda disequazione: $x^2 - 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) < 0$. Radici -2 e 5 . Valori interni: $-2 < x < 5$.

Sistema:

$$\begin{cases} x < 3 \vee x > 5 \\ -2 < x < 5 \end{cases}$$

Incrociando i campi di validità, la parte comune copre la zona sinistra dell'intervallo..

- (y) Prima disequazione: dividiamo per 3 per ottenere $x^2 - 4 < 0$. Radici ± 2 . Valori interni: $-2 < x < 2$.

Seconda disequazione: $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x + 1)^2 \geq 0$. Un quadrato è sempre maggiore o uguale a zero per qualsiasi valore reale: $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sistema:

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'intersezione tra un intervallo limitato e tutto l'insieme dei numeri reali corrisponde ovviamente all'intervallo stesso..

- (z) Prima disequazione: $x^2 - x - 12 \leq 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) \leq 0$. Radici -3 e 4 . Valori interni: $-3 \leq x \leq 4$.

Seconda disequazione: $x^2 + 5x + 6 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 3) > 0$. Radici -3 e -2 .

Valori esterni: $x < -3 \vee x > -2$.

Sistema:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 4 \\ x < -3 \vee x > -2 \end{cases}$$

Dalla rappresentazione degli intervalli, l'estremo -3 va escluso a causa della seconda condizione. Rimane solo la seconda porzione valida..

Problema: DS0007 - Sistemi di disequazioni di secondo grado.

Testo [DS0007] [2½★ 4🕒 2📖] Risolvi il seguente sistema di disequazioni.

$$(a) \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 9 \leq 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} -x^2 + 4 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x^2 - x - 1 \leq 0 \\ x^2 - 4x > 0 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2x \leq 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} -x^2 + 3x > 0 \\ x^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} 2x^2 - 8 \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0 \\ x^2 - 25 \geq 0 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} 3x^2 - 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 > 0 \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} -x^2 + x + 2 \geq 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases}$$

$$(l) \begin{cases} x^2 - 6x + 8 \leq 0 \\ -x^2 + 5x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$(m) \begin{cases} 4x^2 - 1 \leq 0 \\ 2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(n) \begin{cases} x^2 + 4x + 4 \leq 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases}$$

$$(o) \begin{cases} x^2 + 2x - 8 < 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$(p) \begin{cases} x^2 - 5x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases}$$

$$(q) \begin{cases} -x^2 + 9 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 > 0 \end{cases}$$

$$(r) \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 8 \leq 0 \end{cases}$$

$$(s) \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 > 0 \\ x^2 - 2x \leq 0 \end{cases}$$

$$(t) \begin{cases} x^2 + 3x \leq 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases}$$

$$(u) \begin{cases} x^2 - 10x + 25 \leq 0 \\ x^2 - 4x > 0 \end{cases}$$

$$(v) \begin{cases} -2x^2 + x + 1 \leq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$(w) \begin{cases} x^2 + x - 2 \leq 0 \\ -x^2 + 2x > 0 \end{cases}$$

$$(x) \begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 0 \\ x^2 - 3x - 10 < 0 \end{cases}$$

$$(y) \begin{cases} 3x^2 - 12 < 0 \\ x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$(z) \begin{cases} x^2 - x - 12 \leq 0 \\ x^2 + 5x + 6 > 0 \end{cases}$$

Spiegazione In un sistema di disequazioni di secondo grado dovete risolvere entrambe le disequazioni; successivamente dovete risolvere il sistema, cioè trovare l'intervallo o gli intervalli di valori nei quali entrambe le disequazioni sono contemporaneamente verificate.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

- (a) Risolviamo la prima disequazione: $x^2 - 4x + 3 \geq 0$. L'equazione associata ha soluzioni $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Con il verso $\geq$ prendiamo i valori esterni: $x \leq 1 \vee x \geq 3$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - x - 2 \leq 0$. L'equazione associata ha soluzioni $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$. Con il verso $\leq$ prendiamo i valori interni: $-1 \leq x \leq 2$.

Mettendo a sistema le due soluzioni:

$$\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Dalla rappresentazione degli intervalli si ricava che l'intersezione avviene per i valori compresi tra -1 e 1 , estremi inclusi..

- (b) Risolviamo la prima disequazione: $x^2 - 5x + 6 > 0$. L'equazione associata $x^2 - 5x + 6 = 0$ ha come soluzioni $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Poiché il verso è $>$, la disequazione è verificata per valori esterni all'intervallo delle radici: $x < 2 \vee x > 3$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 9 \leq 0$. L'equazione associata $x^2 - 9 = 0$ ha soluzioni $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$. Essendo il verso $\leq$, prendiamo i valori interni: $-3 \leq x \leq 3$.

Risolviamo ora il sistema intersecando le soluzioni:

$$\begin{cases} x < 2 \vee x > 3 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Rappresentando gli intervalli sulla retta reale, l'intersezione tra i due insiemi di soluzioni si ottiene per i valori compresi tra -3 (incluso) e 2 (escluso)..

- (c) Risolviamo la prima disequazione: $-x^2 + 4 \geq 0$. Moltiplicando per -1 e cambiando verso, otteniamo $x^2 - 4 \leq 0$. Le soluzioni dell'equazione associata sono $x = \pm 2$. Essendo il verso $\leq$, le soluzioni sono comprese nell'intervallo: $-2 \leq x \leq 2$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 + 2x + 1 > 0$. Si tratta del quadrato di un binomio: $(x + 1)^2 > 0$. Il quadrato di un numero è sempre strettamente positivo tranne quando la base è nulla. Si annulla per $x = -1$. Quindi è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ossia per $x \neq -1$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

L'intersezione tra l'intervallo chiuso da -2 a 2 e l'insieme di tutti i numeri reali tranne -1 genera un "buco" all'interno dell'intervallo..

- (d) Risolviamo la prima disequazione: $2x^2 - x - 1 \leq 0$. Calcoliamo il delta dell'equazione associata: $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 9$. Le soluzioni sono $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}$, da cui $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$. Poiché il verso è $\leq$, le soluzioni sono i valori interni: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 4x > 0$. Raccogliendo la x otteniamo $x(x - 4) = 0$, con soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$. Con il verso $>$ prendiamo i valori esterni: $x < 0 \vee x > 4$.

Impostiamo il sistema con le soluzioni trovate:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x < 0 \vee x > 4 \end{cases}$$

Dalla rappresentazione grafica si osserva che gli intervalli si sovrappongono per i valori tra $-\frac{1}{2}$ (incluso) e 0 (escluso)..

- (e) Risolviamo la prima disequazione: $x^2 - 1 > 0$. Le soluzioni dell'equazione associata sono $x = \pm 1$. Essendo il verso $>$, prendiamo i valori esterni: $x < -1 \vee x > 1$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 2x \leq 0$. Mettendo in evidenza la x si ha $x(x - 2) = 0$, le cui radici sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$. Con il verso $\leq$, prendiamo i valori interni: $0 \leq x \leq 2$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

L'intersezione tra i due intervalli si ottiene per i valori tra 1 e 2..

- (f) Risolviamo la prima disequazione: $-x^2 + 3x > 0$. Cambiando di segno si ha $x^2 - 3x < 0$. Le radici sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$. Per il verso $<$, prendiamo i valori interni: $0 < x < 3$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 16 \leq 0$. Le radici associate sono ± 4 . Essendo il verso $\leq$, consideriamo i valori interni: $-4 \leq x \leq 4$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} 0 < x < 3 \\ -4 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Rappresentando graficamente, l'intersezione è data dall'intero intervallo aperto $(0, 3)$, in quanto è contenuto in $[-4, 4]$..

- (g) Risolviamo la prima disequazione: $x^2 + x - 6 \geq 0$. Scomponendo si ha $(x + 3)(x - 2) \geq 0$. Le radici sono -3 e 2 . Con il verso $\geq$, prendiamo i valori esterni: $x \leq -3 \vee x \geq 2$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - x < 0$. Scomponendo si ottiene $x(x - 1) < 0$. Le radici sono 0 e 1 . Essendo il verso $<$, prendiamo i valori interni: $0 < x < 1$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Come si può notare graficamente, i due intervalli non hanno alcuna parte in comune. Il sistema non ammette soluzioni..

- (h) Risolviamo la prima disequazione: $2x^2 - 8 \leq 0$. Dividendo per 2 otteniamo $x^2 - 4 \leq 0$, con soluzioni $-2 \leq x \leq 2$.

Risolviamo la seconda disequazione: $x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Scomponendo come trinomio notevole otteniamo $(x - 1)(x - 2) \geq 0$. Le radici sono 1 e 2 . Essendo il verso $\geq$, prendiamo i valori esterni: $x \leq 1 \vee x \geq 2$.

Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \leq 1 \vee x \geq 2 \end{cases}$$

Dall'intersezione grafica notiamo che gli insiemi si sovrappongono nell'intervallo tra -2 e 1 inclusi, e condividono il singolo punto $x = 2$..

- (i) La prima disequazione è $x^2 - 9x + 14 < 0$. Scomponendo troviamo $(x - 2)(x - 7) < 0$. Le radici sono 2 e 7 . Poiché il verso è $<$, la soluzione è $2 < x < 7$.

La seconda disequazione è $x^2 - 25 \geq 0$. Le radici sono ± 5 . Il verso è $\geq$, quindi prendiamo i valori esterni: $x \leq -5 \vee x \geq 5$.

Intersecando a sistema:

$$\begin{cases} 2 < x < 7 \\ x \leq -5 \vee x \geq 5 \end{cases}$$

La zona in cui sono verificate entrambe cade tra il 5 (compreso) e il 7 (escluso)..

- (j) Prima disequazione: $3x^2 - 3 \geq 0$. Dividiamo per 3: $x^2 - 1 \geq 0$. Soluzioni per valori esterni: $x \leq -1 \vee x \geq 1$.

Seconda disequazione: $x^2 - 4x + 4 > 0$. Riconosciamo il quadrato di un binomio: $(x - 2)^2 > 0$. È strettamente maggiore di zero per ogni valore tranne quello che lo annulla, perciò $x \neq 2$.

Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

L'intersezione richiede di escludere il valore 2 dall'intervallo delle soluzioni della prima disequazione..

- (k) Risolviamo la prima disequazione cambiando di segno e verso: $x^2 - x - 2 \leq 0$. Le radici di $(x - 2)(x + 1) = 0$ sono -1 e 2 . Valori interni: $-1 \leq x \leq 2$.

Risolviamo la seconda: $x^2 - x \geq 0$. Le radici di $x(x - 1) = 0$ sono 0 e 1 . Valori esterni: $x \leq 0 \vee x \geq 1$.

A sistema:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

L'intersezione genera due intervalli disgiunti e chiusi..

- (l) La prima disequazione è $x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 4) \leq 0$. Radici 2 e 4 . Valori interni: $2 \leq x \leq 4$.

La seconda disequazione si può riscrivere come $x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 4) < 0$. Radici 1 e 4 . Valori interni: $1 < x < 4$.

Mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$$

Intersecando notiamo che l'estremo 4 è incluso nel primo ma escluso nel secondo, quindi rimane escluso nell'intersezione..

- (m) Prima disequazione: $4x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4}$. Radici associate $\pm \frac{1}{2}$. Valori interni: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Seconda disequazione: $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$. Calcoliamo il delta: $\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25$. Le radici sono $x_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{4}$, cioè -2 e $\frac{1}{2}$. Valori esterni: $x \leq -2 \vee x \geq \frac{1}{2}$.

Sistema:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x \leq -2 \vee x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dall'intersezione grafica l'unico valore in comune tra i due insiemi è esattamente $\frac{1}{2}$..

- (n) Prima disequazione: $x^2 + 4x + 4 \leq 0$. Trinomio quadrato perfetto: $(x + 2)^2 \leq 0$. Un quadrato non può essere negativo, può solo essere nullo. Si annulla unicamente per $x = -2$.

Seconda disequazione: $x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x - 1) > 0$. Radici 0 e 1 . Valori esterni: $x < 0 \vee x > 1$.

Sistema:

$$\begin{cases} x = -2 \\ x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$

Verifichiamo se il singolo punto $x = -2$ cade nell'intervallo delle soluzioni della seconda disequazione. Poiché $-2 < 0$, è accettabile..

- (o) Prima disequazione: $x^2 + 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) < 0$. Radici -4 e 2 . Valori interni: $-4 < x < 2$.

Seconda disequazione: $x^2 - 1 > 0$. Radici ± 1 . Valori esterni: $x < -1 \vee x > 1$.

Sistema:

$$\begin{cases} -4 < x < 2 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

Sovrapponendo le soluzioni sulla retta, si individuano due intervalli comuni compresi tra i vari estremi..

- (p) Prima disequazione: $x^2 - 5x < 0 \Rightarrow x(x-5) < 0$. Radici 0 e 5 . Valori interni: $0 < x < 5$.

Seconda disequazione: $x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \leq 0$. Radici 1 e 3 . Valori interni: $1 \leq x \leq 3$.

Sistema:

$$\begin{cases} 0 < x < 5 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Poiché l'intervallo $[1, 3]$ è interamente contenuto nell'intervallo aperto $(0, 5)$, l'intersezione coincide con il secondo intervallo..

- (q) Prima disequazione: $-x^2 + 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 9 \leq 0$. Radici ± 3 . Valori interni: $-3 \leq x \leq 3$.

Seconda disequazione: $x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) > 0$. Radici -2 e 3 . Valori esterni: $x < -2 \vee x > 3$.

Sistema:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x < -2 \vee x > 3 \end{cases}$$

Incrociando sulla retta reale, la sovrapposizione avviene solo nella porzione sinistra..

- (r) Prima disequazione: $x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) \leq 0$. Radici 2 e 5 . Valori interni: $2 \leq x \leq 5$.

Seconda disequazione: $x^2 - 6x + 8 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) \leq 0$. Radici 2 e 4 . Valori interni: $2 \leq x \leq 4$.

Sistema:

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

La zona comune a entrambi i segmenti sulla retta numerica è data dal più restrittivo dei due intervalli..

- (s) Prima disequazione: $2x^2 - 5x + 2 > 0 \Rightarrow (2x-1)(x-2) > 0$. Radici $\frac{1}{2}$ e 2 . Valori esterni: $x < \frac{1}{2} \vee x > 2$.

Seconda disequazione: $x^2 - 2x \leq 0 \Rightarrow x(x-2) \leq 0$. Radici 0 e 2 . Valori interni: $0 \leq x \leq 2$.

Sistema:

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \vee x > 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Intersecando gli intervalli, l'estremo 2 fa parte del secondo ma non del primo. Ci resta unicamente la porzione sinistra..

- (t) Prima disequazione: $x^2 + 3x \leq 0 \Rightarrow x(x+3) \leq 0$. Radici -3 e 0 . Valori interni: $-3 \leq x \leq 0$.

Seconda disequazione: $x^2 - 9 > 0$. Radici ± 3 . Valori esterni: $x < -3 \vee x > 3$.

Sistema:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ x < -3 \vee x > 3 \end{cases}$$

L'estremo -3 è incluso nel primo intervallo ma escluso dal secondo. Non ci sono altri punti in comune. Pertanto il sistema è impossibile..

- (u) Prima disequazione: $x^2 - 10x + 25 \leq 0 \Rightarrow (x - 5)^2 \leq 0$. Si tratta di un quadrato perfetto che è minore o uguale a zero solo quando si annulla, quindi l'unica soluzione è $x = 5$.

Seconda disequazione: $x^2 - 4x > 0 \Rightarrow x(x - 4) > 0$. Radici 0 e 4. Valori esterni: $x < 0 \vee x > 4$.

Sistema:

$$\begin{cases} x = 5 \\ x < 0 \vee x > 4 \end{cases}$$

Verifichiamo il punto isolato: essendo $5 > 4$, rientra nell'intervallo accettato dalla seconda condizione..

- (v) Prima disequazione: moltiplichiamo per -1 e cambiamo verso: $2x^2 - x - 1 \geq 0$. Le radici associate sono $-\frac{1}{2}$ e 1 . Essendo ora $\geq$, si prendono i valori esterni: $x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1$.

Seconda disequazione: $x^2 - 1 \leq 0$. Radici ± 1 . Verso $\leq$, quindi prendiamo i valori interni: $-1 \leq x \leq 1$.

Sistema:

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

L'intersezione fornisce un segmento da sinistra e isola il punto 1 da destra..

- (w) Prima disequazione: $x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) \leq 0$. Radici -2 e 1 . Valori interni: $-2 \leq x \leq 1$.

Seconda disequazione: $-x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow x(x - 2) < 0$. Radici 0 e 2. Valori interni: $0 < x < 2$.

Sistema:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

Sovrapponendo le soluzioni, le condizioni coesistono tra i due estremi centrali..

- (x) Prima disequazione: $x^2 - 8x + 15 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 5) > 0$. Radici 3 e 5. Valori esterni: $x < 3 \vee x > 5$.

Seconda disequazione: $x^2 - 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) < 0$. Radici -2 e 5 . Valori interni: $-2 < x < 5$.

Sistema:

$$\begin{cases} x < 3 \vee x > 5 \\ -2 < x < 5 \end{cases}$$

Incrociando i campi di validità, la parte comune copre la zona sinistra dell'intervallo..

- (y) Prima disequazione: dividiamo per 3 per ottenere $x^2 - 4 < 0$. Radici ± 2 . Valori interni: $-2 < x < 2$.

Seconda disequazione: $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x + 1)^2 \geq 0$. Un quadrato è sempre maggiore o uguale a zero per qualsiasi valore reale: $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sistema:

$$\begin{cases} -2 < x < 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'intersezione tra un intervallo limitato e tutto l'insieme dei numeri reali corrisponde ovviamente all'intervallo stesso..

- (z) Prima disequazione: $x^2 - x - 12 \leq 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) \leq 0$. Radici -3 e 4 . Valori interni: $-3 \leq x \leq 4$.

Seconda disequazione: $x^2 + 5x + 6 > 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 3) > 0$. Radici -3 e -2 .

Valori esterni: $x < -3 \vee x > -2$.

Sistema:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 4 \\ x < -3 \vee x > -2 \end{cases}$$

Dalla rappresentazione degli intervalli, l'estremo -3 va escluso a causa della seconda condizione. Rimane solo la seconda porzione valida..

Problema: *DS0012* - Sistemi di disequazioni di secondo grado fratte.

Testo [*DS0012*] [3★ 4🕒 2📖] Risolvi il seguente sistema di disequazioni.

$$(a) \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+4x+4} \geq \frac{x}{x^2-4} \\ x^2-3x-10 < 0 \end{cases}$$

Spiegazione In un sistema di disequazioni dovete risolvere entrambe le disequazioni; successivamente dovete risolvere il sistema, cioè trovare l'intervallo o gli intervalli di valori nei quali entrambe le disequazioni sono contemporaneamente verificate.

Svolgimento Qui di seguito le soluzioni degli esercizi proposti

(a) $-2 < x < 5$.

Parte III

Piano cartesiano

6.1 Punti e segmenti