

6.1 Semplice calcolo di forze

Problema di: Dinamica - D0014

Testo [D0014] [1★ 1🕒 1a📖]

Se un oggetto di volume $V = 9 \text{ cm}^3$ galleggia sull'acqua immerso per $\frac{2}{3}$ del suo volume, quanto vale la forza di Archimede che agisce su di lui? [$\rho_{\text{acqua}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$]

Spiegazione L'oggetto subisce la forza di Archimede in quanto è immerso nell'acqua. In questo esercizio è sufficiente applicare la formula della forza di Archimede.

Svolgimento Il calcolo della forza è:

$$F_{\text{Arc}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{imm}} g = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \frac{2}{3} V_{\text{ogg}} g = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,000009 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_{\text{Arc}} = 0,0588 \text{ N}$$

Volendo essere più precisi potremmo considerare anche la parte dell'oggetto che si trova fuori dall'acqua, pari ad un terzo del volume dell'oggetto, in quanto è immersa nell'aria

$$F_{\text{Arc-aria}} = \rho_{\text{aria}} V_{\text{imm}} g = \rho_{\text{aria}} \frac{1}{3} V_{\text{ogg}} g = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,000009 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_{\text{Arc-aria}} = 0,0000392 \text{ N}$$

La forza di Archimede totale sarà la somma delle due forze

$$F_{\text{Arch-tot}} = F_{\text{Arc}} + F_{\text{Arc-aria}} = 0,0588392 \text{ N}$$

tenendo presente che entrambe le forze sono dirette verso l'alto.

Problema di: Dinamica - D0019

Testo [D0019] [1★ 1🕒 1a📖]

Quanto vale la forza di gravità che agisce su di un oggetto di ferro ($\rho_{\text{Fe}} = 7,874 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) di volume $V = 5 \text{ dm}^3$?

Spiegazione In questo problema bisogna semplicemente mettere i valori nelle formule e fare i conti. l'unica particolarità è quella di notare che per calcolare la forza di gravità bisogna avere la massa dell'oggetto, mentre il problema fornisce soltanto il suo volume. Avendo però specificato il materiale, è come se il problema ci avesse anche indicato il valore della densità dell'oggetto.

Svolgimento La massa dell'oggetto vale

$$m = \rho \cdot V = 7874 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,005 \text{ m}^3 = 39,37 \text{ kg}$$

Quindi la forza di gravità vale

$$F_g = mg = 39,37 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 385,826 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0033**Testo** [D0033] [1★ 1🕒 1a📖]

Faccio più fatica a sorreggere un oggetto di ferro di densità $\rho_{Fe} = 7874 \frac{kg}{m^3}$ e volume $V_{Fe} = 2 dm^3$ o ad allungare una molla di costante elastica $k = 30 \frac{N}{cm}$ dalla lunghezza $l_i = 10 cm$ alla lunghezza $l_f = 15 cm$?

Spiegazione In questo esercizio viene chiesto di confrontare i valori di due forze differenti per dire quale delle due è più intensa. Le due forze sono la forza di gravità sull'oggetto di ferro e la forza elastica sulla molla.

Svolgimento La forza di gravità vale

$$F_g = mg = 2 dm^3 \cdot 7874 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 0,002 m^3 \cdot 7874 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 154,33 N$$

La forza elastica della molla vale

$$F_{el} = k \cdot \Delta l = k \cdot (l_f - l_i) = 30 \frac{N}{cm} \cdot 5 cm = 150 N$$

la forza di gravità è quindi maggiore

Problema di: Dinamica - D0020**Testo** [D0020] [1★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 100 kg$ e volume $V = 5 dm^3$ si trova sul fondo di una piscina piena di acqua ($\rho_{acqua} = 1 \frac{kg}{dm^3}$). Quanto vale la densità dell'oggetto? Se sollevo l'oggetto con una forza $F_2 = 2000 N$, con quale forza totale l'oggetto si muove?

Spiegazione Questo esercizio si risolve semplicemente mettendo i dati all'interno delle formule ed eseguendo una somma di vettori.

Svolgimento La densità dell'oggetto vale

$$\rho_{ogg} = \frac{m}{V} = \frac{100 kg}{5 dm^3} = 20 \frac{kg}{dm^3}$$

La forza di gravità che agisce sull'oggetto vale

$$F_g = mg = 100 kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 980 N$$

La forza di Archimede vale

$$F_{Arc} = \rho_f V_{fsg} = 1 \frac{kg}{dm^3} \cdot 5 dm^3 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 49 N$$

Sommando tutte le forze, tenendo conto che la forza di gravità spinge verso il basso e le altre due verso l'alto, avremo che la forza totale verso l'alto vale

$$F_{tot} = 1069 N$$

Problema di: Dinamica - D0021**Testo** [D0021] [1★ 3🕒 1a📖]

Una statua d'oro ($m = 19,3 \text{ kg}$; $V = 1 \text{ dm}^3$) viene lanciata in mare ($\rho_{H_2O-mare} = 1,02 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$). Calcola la forza di gravità, di Archimede e totale che agiscono sulla statua. Se attacco alla statua un pallone di massa $m_p = 1,7 \text{ kg}$ e volume $V_p = 40 \text{ dm}^3$, quanto vale la forza totale sulla statua?

Spiegazione Abbiamo un oggetto immerso nell'acqua che subisce quindi due forze: la forza di gravità verso il basso e la forza di Archimede verso l'alto.

Svolgimento La densità dell'oro vale

$$\rho_{Au} = \frac{m}{V} = \frac{19,3 \text{ kg}}{1 \text{ dm}^3} = 19,3 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

La forza di gravità, di Archimede e totale che agiscono sull'oggetto valgono

$$F_g = mg = 19,3 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 189,1 \text{ N}$$

$$F_{Arc} = \rho_f V_{fs} g = 1,02 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 1 \text{ dm}^3 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10 \text{ N}$$

$$F_{tot} = F_g - F_{Arc} = 179,1 \text{ N}$$

Attaccando poi il pallone, cambiano di conseguenza la massa del sistema ed il volume dello stesso. I nuovi valori di forza di gravità, di Archimede e totale sono:

$$F_{g2} = (m + m_p) g = (19,3 \text{ kg} + 1,7 \text{ kg}) \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 205,8 \text{ N}$$

$$F_{Arc2} = \rho_f V_{fs} g = 1,02 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot (1 \text{ dm}^3 + 40 \text{ dm}^3) \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 409,8 \text{ N}$$

$$F_{tot2} = F_{Arc2} - F_{g2} = 204 \text{ N}$$

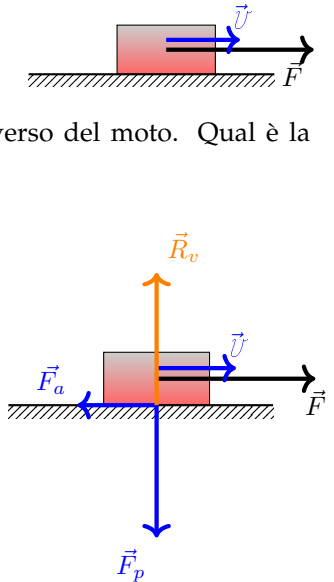
Problema di: Dinamica - D0038**Testo** [D0038] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di peso $F_p = 40 \text{ N}$ si muove su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,02$, spinto da una forza $F = 20 \text{ N}$ nello stesso verso del moto. Qual è la forza totale che agisce su di esso?

Spiegazione Il peso dell'oggetto lo schiaccia contro il piano, generando una forza di attrito. Sulla linea del movimento abbiamo quindi due forze opposte: la forza esterna che spinge l'oggetto nel verso del moto e la forza di attrito ad essa opposta. Sulla linea perpendicolare al moto la forza totale è invece nulla. Il pavimento fa una reazione vincolare che compensa il peso dell'oggetto.

Svolgimento

$$F_{tot} = F - F_a = F - \mu_d F_p = 20 \text{ N} - 0,02 \cdot 40 \text{ N} = 19,2 \text{ N}$$



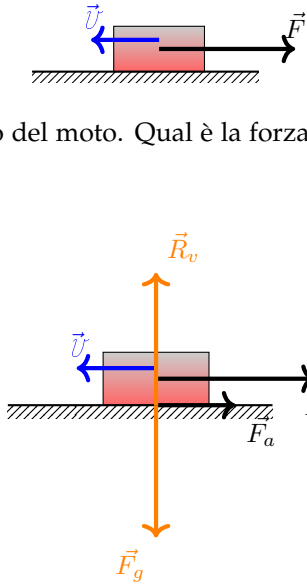
Problema di: Dinamica - D0038a**Testo** [D0038a] [2★ 2🕒 1a📖]

Un corpo di peso $F_p = 40\text{ N}$ si muove su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,02$, spinto da una forza $F = 20\text{ N}$ opposta al verso del moto. Qual è la forza totale che agisce su di esso?

Spiegazione Il peso dell'oggetto lo schiaccia contro il piano, generando una forza di attrito. Sulla linea del movimento abbiamo quindi due forze concordi: la forza esterna che spinge l'oggetto nel verso opposto del moto e la forza di attrito ad essa opposta al verso del moto. Sulla linea perpendicolare al moto la forza totale è invece nulla. Il pavimento fa una reazione vincolare che compensa il peso dell'oggetto.

Svolgimento

$$F_{tot} = F + F_a = F + \mu_d F_p = 20\text{ N} + 0,02 \cdot 40\text{ N} = 20,8\text{ N}$$

**Problema di: Dinamica - D0039****Testo** [D0039] [3★ 3🕒 1a📖]

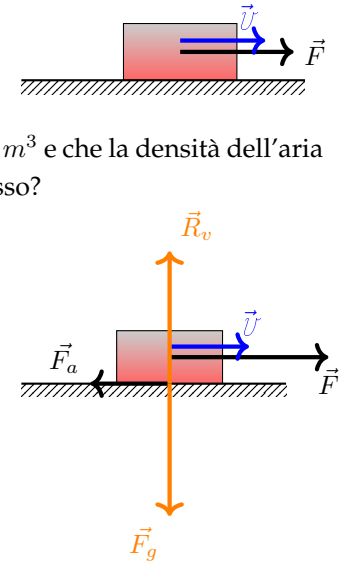
Un oggetto di massa $m = 2\text{ kg}$ si muove su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,2$, spinto da una forza $F = 20\text{ N}$ nello stesso verso del moto. Considera che l'oggetto ha un volume $V = 0,5\text{ m}^3$ e che la densità dell'aria è $\rho_{aria} = 1,3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Qual è la forza totale che agisce su di esso?

Spiegazione Il peso dell'oggetto lo schiaccia contro il piano, generando una forza di attrito. In questo caso il peso dell'oggetto è pari alla forza di gravità che subisce, in quanto trascuriamo gli effetti della forza di Archimede. Sulla linea del movimento abbiamo quindi due forze opposte: la forza esterna che spinge l'oggetto nella direzione del moto e la forza di attrito ad essa opposta. Sulla linea perpendicolare al moto la forza totale è invece nulla. Il pavimento fa una reazione vincolare che compensa il peso dell'oggetto.

Svolgimento

$$F_{tot} = F - F_a = F - \mu_d (F_g - \rho_{aria} V g)$$

$$F_{tot} = F - \mu_d (mg - \rho_{aria} V g) = 20\text{ N} - 0,2 \cdot \left(2\text{ kg} - 0,5\text{ m}^3 \cdot 1,3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 17,35\text{ N}$$



Problema di: Dinamica - D0002**Testo** [D0002] [2★ 2🕒 1a📖]

Quale percentuale del volume di una statuetta di legno di densità $\rho = 0,7 \frac{g}{cm^3}$ rimane immersa nell'acqua quando galleggia?

Spiegazione Abbiamo un oggetto di legno che sta galleggiando e quindi si trova in equilibrio statico. La somma della forza di gravità e della forza di archimede deve essere nulla, quindi queste due forze devono essere uguali.

Svolgimento

1. La forza di gravità che agisce sull'oggetto deve essere uguale alla forza di archimede:

$$F_g = F_{Arch}$$

$$m_{ogg}g = \rho_{acqua}V_{imm}g$$

$$m_{ogg} = \rho_{acqua}V_{imm}$$

2. La massa dell'oggetto può essere scritta come

$$m_{ogg} = \rho_{ogg}V_{ogg}$$

3. La precedente formula diventa quindi

$$\rho_{ogg}V_{ogg} = \rho_{acqua}V_{imm}$$

$$\frac{V_{imm}}{V_{ogg}} = \frac{\rho_{ogg}}{\rho_{acqua}}$$

$$\frac{V_{imm}}{V_{ogg}} = \frac{0,7 \frac{g}{cm^3}}{1 \frac{g}{cm^3}} = 0,7 = 70\%$$

Problema di: Dinamica - D0116**Testo** [D0116] [1★ 2🕒 1a📖]

una molla a riposo è lunga $\ell_i = 15 \text{ cm}$. Se tirata con una forza $F = 10 \text{ N}$ si allunga fino alla lunghezza $\ell_f = 23 \text{ cm}$. Quanto vale la costante elastica della molla?

Spiegazione [...]**Svolgimento** [...]

Problema di: Dinamica - D0116a**Testo** [D0116a] [1★ 2⌚ 1a📖]

Una molla di costante elastica $k = 2 \frac{N}{cm}$, a riposo è lunga $\ell_i = 15 \text{ cm}$. Se tirata con una forza $F = 10 \text{ N}$ si allunga fino alla lunghezza ℓ_f . Quanto vale ℓ_f ?

Spiegazione [...]**Svolgimento** [...]**Problema di: Dinamica - D0116b****Testo** [D0116b] [1★ 2⌚ 1a📖]

Una molla di costante elastica $k = 2 \frac{N}{cm}$, a riposo è lunga $\ell_i = 15 \text{ cm}$. Se si allunga fino alla lunghezza $\ell_f = 20 \text{ cm}$, con quale forza è stata tirata?

Spiegazione [...]**Svolgimento** [...]

Problema di: Dinamica - D0116c**Testo** [D0116c] [1★ 2⌚ 1a📖]

Una molla di costante elastica $k = 2 \frac{N}{cm}$, a riposo è lunga $\ell_i = 15 \text{ cm}$. Se si accorcia fino alla lunghezza $\ell_f = 8 \text{ cm}$, con quale forza è stata schiacciata?

Spiegazione [...]**Svolgimento** [...]**Problema di: Dinamica - D0044****Testo** [D0044] [2★ 3⌚ 2a📖]

In quale punto, sulla linea tra la Terra e la Luna, deve essere messo un satellite affinché subisca a causa dei due corpi celesti una forza di gravità complessiva nulla?

Spiegazione Il satellite in questione si deve trovare sul segmento di congiunzione tra due corpi celesti; in questo modo subisce due forze di gravità aventi stessa direzione ma verso opposto. Affinchè le forze siano uguali è necessario che il satellite si trovi più distante dal corpo celeste con più massa.



Svolgimento Indichiamo con r la distanza del satellite dalla Terra. Indichiamo con d la distanza della Terra dalla Luna. Per avere che il satellite sia sulla congiungente dei due corpi celesti dobbiamo avere $0 < r < d$

Eguagliamo adesso le due forze di gravità che agiscono sul satellite.

$$G \frac{M_T m}{r^2} = G \frac{M_L m}{(d - r)^2}$$

da cui

$$\frac{M_T}{r^2} = \frac{M_L}{(d - r)^2}$$

$$\frac{r^2}{M_T} = \frac{(d - r)^2}{M_L}$$

$$\frac{M_L}{M_T} r^2 = d^2 - 2dr + r^2$$

$$\left(1 - \frac{M_L}{M_T}\right) r^2 - 2dr + d^2 = 0$$

Indichiamo per comodità $a = \frac{M_L}{M_T}$ Procediamo con i calcoli ed avremo

$$r = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - d^2(1 - a)}}{1 - a}$$

$$r = d \frac{1 \pm \sqrt{a}}{1 - a}$$

Escludiamo adesso la soluzione che non rappresenta una posizione che sia tra i due corpi celesti, rimane

$$r = d \frac{1 - \sqrt{a}}{1 - a}$$

Nel nostro problema r è la distanza del satellite dalla Terra, d è la distanza della Luna dalla Terra, a è il rapporto tra la assa della luna e quella della Terra. Avremo quindi

$$\begin{cases} a = \frac{M_L}{M_T} = 0,0123 \\ d = 384400 \text{ km} \\ r = 384400 \text{ km} \frac{1 - \sqrt{0,0123}}{1 - 0,0123} = 346020 \text{ km} \end{cases}$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - CD0011

Testo [CD0011] [2★ 3🕒 1a📖]

La Terra ha la forma di un ellissoide con semiassi maggiori dal centro all'equatore $a = 6378135 \text{ m}$, e minore dal centro ai poli $b = 6356750 \text{ m}$. Calcola l'accelerazione di gravità ai poli e all'equatore.

Spiegazione La Terra non è una sfera, quindi i punti all'equatore non hanno la stessa distanza dal centro rispetto ai due poli. Inoltre la Terra ruota sul suo asse, quindi un corpo all'equatore sente anche l'accelerazione centrifuga dovuta al moto di rotazione intorno all'asse.

Svolgimento Per una persona ai poli, avremo

$$g_{max} = G \frac{M}{b^2} = 6,67408 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6356750 \text{ m})^2} = 9,8637 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Per una persona ai poli, avremo la composizione di due contributi diversi: l'attrazione gravitazionale del pianeta e la forza centrifuga della rotazione dello stesso. Detta ω la velocità angolare del pianeta e T il periodo di rotazione, avremo

$$\begin{aligned} g_{min} &= G \frac{M}{a^2} - \omega^2 a = G \frac{M}{a^2} - \frac{4\pi^2}{T^2} a \\ g_{min} &= 6,67408 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6378135 \text{ m})^2} - \frac{4\pi^2}{(23,9345 \cdot 3600 \text{ s})^2} \cdot 6378135 \text{ m} \\ g_{min} &= 9,79769 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 0,03391 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,76378 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Problema di: Cinematica - Dinamica CD0018**Testo** [CD0018] [2½★ 3🕒 3a📖]

Un oscillatore armonico, formato da una molla e da un corpo di massa $m = 1\text{ kg}$, oscilla tra una posizione minima ed una massima distanti tra loro $h = 10\text{ cm}$. Il periodo dell'oscillazione è $T = 2\text{ s}$. Calcolate la massima accelerazione subita dal corpo.

Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo in sequenza le formule del moto armonico generato da una molla, ed i principi della dinamica.

Svolgimento Per prima cosa possiamo trovare la costante elastica della molla dal periodo del moto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$k = \frac{T^2 m}{4\pi^2} = 0,1 \frac{N}{m}$$

L'ampiezza dell'oscillazione è

$$A = \frac{h}{2} = 5\text{ cm}$$

L'accelerazione massima del corpo è quindi

$$a = \frac{kA}{m} = 0,005 \frac{m}{s^2}$$

6.2 Applicazione diretta di un principio della dinamica**Problema di: Dinamica - D0015****Testo** [D0015] [1★ 1🕒 1a📖]

Un ciclista di massa $m = 60\text{ kg}$ corre in pianura alla velocità costante $v = 35 \frac{km}{h}$. Se le forze d'attrito con l'aria hanno un valore $F_a = 500\text{ N}$, quanto vale la forza in avanti che il ciclista fa spingendo sui pedali? Spiegate il perché. Quanto vale l'accelerazione con la quale si muove la bicicletta?

Spiegazione In questo problema dobbiamo semplicemente applicare il primo principio della dinamica.

Svolgimento Dal momento che il ciclista si muove con velocità costante, possiamo applicare il primo principio della dinamica, per cui la somma di tutte le forze è nulla.

$$F_{tot} = 0$$

Sul ciclista, in orizzontale, agiscono soltanto due forze, quella di attrito e quella del ciclista. Visto che sono opposte, e che la loro somma deve fare zero, allora le due forze sono uguali. Per cui

$$F_{attrito} = 500\text{ N}$$

Dalla definizione di accelerazione avremo che se la velocità è costante, allora l'accelerazione è nulla

$$a = 0 \frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica, secondo principio - D0005**Testo** [D0005] [2★ 1🕒 1a📖]

Una palla da tennis di massa $m = 58\text{ g}$, colpisce una racchetta con una velocità $U_i = 20 \frac{m}{s}$ e a causa della forza della racchetta, torna indietro con una velocità $U_f = 30 \frac{m}{s}$. Sapendo che il tempo di impatto è $\Delta t = 5\text{ ms}$, quale forza media ha espresso la racchetta sulla pallina?

Spiegazione La racchetta fa una forza e di conseguenza fa cambiare la velocità e quindi la quantità di moto della pallina. E' il secondo principio della dinamica.

Svolgimento La pallina prima dell'urto ha una velocità in un verso, e dopo l'urto ha una velocità nel verso opposto. Questo fa sì che la variazione di velocità è pari a

$$\Delta U = U_f - U_i = 20 \frac{m}{s} - \left(-30 \frac{m}{s}\right) = 50 \frac{m}{s}$$

Applicando il secondo principio della dinamica avremo:

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m \frac{\Delta U}{\Delta t} = 0,058\text{ kg} \cdot \frac{50 \frac{m}{s}}{0,005\text{ s}} = 580\text{ N}$$

Se ancora non avete studiato la grandezza fisica chiamata "quantità di moto" allora potete seguire questi calcoli del tutto equivalenti ai precedenti

$$F = m \cdot a = m \frac{\Delta U}{\Delta t} = 0,058\text{ kg} \cdot \frac{50 \frac{m}{s}}{0,005\text{ s}} = 580\text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0075**Testo** [D0075] [2★ 1🕒 1a📖]

Le velocità della Terra ($M_T = 5,972 \cdot 10^{24}\text{ kg}$) nei punti più vicino e lontano dal sole sono $U_{min} = 29,3 \frac{km}{s}$ e $U_{max} = 30,3 \frac{km}{s}$, e sono opposte. Quanto vale la forza vettoriale media esercitata dal Sole sulla Terra tra i punti più vicino e più lontano dal Sole?

Spiegazione Conosciamo la velocità della Terra, in modulo direzione e verso, negli istanti finale ed iniziale; conosciamo la massa della terra; conosciamo l'intervallo di tempo che passa tra l'istante iniziale e quello finale. Appliciamo il secondo principio della dinamica. La seconda legge della dinamica $F = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$ ci permette infatti di calcolare direttamente questo valore conoscendo la variazione di quantità di moto della Terra e l'intervallo di tempo impiegato nel tragitto

Svolgimento Utilizzando la seconda legge della dinamica, tenendo conto che le velocità finale ed iniziale della Terra sono opposte, avremo

$$|\vec{F}_{med}| = \frac{|\Delta \vec{P}|}{\Delta t}$$

$$|\vec{F}_{med}| = \frac{|\vec{P}_f - \vec{P}_i|}{\Delta t}$$

$$|\vec{F}_{med}| = \frac{M_{Terra} \cdot (U_f + U_i)}{\Delta t}$$

$$|\vec{F}_{med}| = \frac{5,972 \cdot 10^{24}\text{ kg} \cdot \left(59,6 \frac{km}{s}\right)}{0,5\text{ anni}} = 22,6 \cdot 10^{21}\text{ N}$$

Allo stesso risultato arriveremmo scrivendo il secondo principio della dinamica come

$$|\vec{F}_{med}| = M_{terra} \cdot \vec{a}_{media} = M_{terra} \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$|\vec{F}_{med}| = M_{Terra} \cdot \frac{|\vec{v}_f - \vec{v}_i|}{\Delta t} = \frac{M_{Terra} \cdot (U_f + U_i)}{\Delta t}$$

Problema di: Dinamica - D0076**Testo** [D0076] [2★ 1⌚ 1a📖]

Un pendolo di massa $m = 9\text{ kg}$ oscilla con un periodo $T = 6\text{ s}$, in modo tale da avere una velocità nel punto più basso pari a $v = 2\frac{m}{s}$. Dopo metà periodo ha una velocità in modulo uguale ma opposta. Quanto vale, in modulo direzione e verso, la forza media che ha subito durante quella mezza oscillazione?

Spiegazione In questo esercizio semplicemente si chiede di applicare il secondo principio della dinamica nella sua formulazione

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

Svolgimento Applicando il secondo principio della dinamica avremo

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m v_f - m v_i}{\Delta t}$$

$$F = \frac{9\text{ kg} \cdot 2\frac{m}{s} - 9\text{ kg} \cdot \left(-2\frac{m}{s}\right)}{3\text{ s}} = 12\text{ N}$$

La direzione di tale forza è orizzontale ed il verso è opposto alla velocità iniziale del corpo.

Problema di: Dinamica - D0058**Testo** [D0058] [3★ 3🕒 1a📖]

Una navicella spaziale di massa $m_1 = 4000 \text{ kg}$ deve recuperare un satellite artificiale di massa $m_2 = 2000 \text{ kg}$. Per farlo lo aggancia con una fune di lunghezza $L = 60 \text{ m}$ e tira la fune con una forza $F = 4 \text{ N}$. Il satellite è fermo rispetto alla navicella. Dopo quanto tempo la navicella recupera il satellite?

Spiegazione Quando la navicella tira il satellite, per il terzo principio il satellite tira la navicella. Entrambi gli oggetti si muovono di moto uniformemente accelerato e la somma dei loro spostamenti deve essere pari alla loro distanza iniziale.

Svolgimento Le accelerazioni con cui si muovono i due oggetti sono

$$\begin{cases} a_1 = \frac{F}{m_1} = 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a_2 = \frac{F}{m_2} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

utilizzando le equazioni del moto avremo

$$L = \frac{1}{2} a_1 \Delta t^2 + \frac{1}{2} a_2 \Delta t^2$$

$$L = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) \Delta t^2$$

$$\frac{2L}{(a_1 + a_2)} = \Delta t^2$$

$$\Delta t^2 = \frac{2L}{(a_1 + a_2)} = \frac{120 \text{ m}}{3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 40000 \text{ s}^2$$

$$\Delta t = 200 \text{ s}$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - CD0001**Testo** [CD0001] [3★ 5🕒 1a📖]

Per un tempo $\Delta t = 4 \text{ s}$, un oggetto di massa $m = 20 \text{ kg}$ viene spinto partendo da fermo da una forza $F = 100 \text{ N}$ strisciando su di un piano con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,1$. Successivamente $\vec{F}$ si annulla. Quanta strada avrà percorso prima di fermarsi?

Spiegazione Un oggetto sta strisciando spinto da una certa forza; l'attrito lo frena. In questo primo momento l'oggetto si muove di moto uniformemente accelerato, aumentando progressivamente la sua velocità. Nel momento che la forza che lo spinge sparisce, rimane soltanto l'attrito che frena l'oggetto fino a farlo fermare.

Svolgimento

Traccia di lavoro: prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.

1. Quanto valgono la forza di gravità e di attrito che agiscono sull'oggetto?
2. Quanto valgono la forza totale che spinge l'oggetto e la sua accelerazione?
3. Quanto spazio avrà percorso e a quale velocità sta viaggiando alla fine dell'intervallo di tempo?
4. Con quale accelerazione si muove quando $\vec{F}$ si annulla, e dopo quanto tempo si ferma?
5. Quanta strada fa l'oggetto prima di fermarsi?

1. La forza di gravità che agisce sull'oggetto è

$$F_g = mg = 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 196 \text{ N}$$

2. La forza d'attrito che subisce l'oggetto è

$$F_a = \mu F_g = 0,1 \cdot 196 \text{ N} = 19,6 \text{ N}$$

3. La forza totale che spinge l'oggetto è

$$F_{tot1} = 100 \text{ N} - 19,6 \text{ N} = 80,4 \text{ N}$$

4. L'accelerazione dell'oggetto è

$$a_{tot} = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{80,4 \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 4,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5. Alla fine del primo intervallo di tempo avrà percorso

$$\Delta S_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \Delta t^2 + U_{i1} \Delta t = 32,2 \text{ m}$$

6. Alla fine del primo intervallo di tempo viaggia alla velocità

$$U_{f1} = a_1 \cdot \Delta t + U_{i1} = 16,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

7. La velocità finale nel primo tratto di strada corrisponde alla velocità iniziale nel secondo tratto di strada

$$U_{f1} = U_{i2}$$

8. Quando la forza F si annulla la forza totale è quella di attrito, quindi

$$a_2 = \frac{F_a}{m} = -0,98 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

9. Si ferma dopo

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta U_2}{a} = \frac{0 - U_{i2}}{a_2} = 65,6 \text{ s}$$

10. L'oggetto avrà percorso

$$\Delta S_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot \Delta t_2^2 + U_{i2} \Delta t_2 = 131,9 \text{ m}$$

11. La distanza complessiva percorsa è quindi

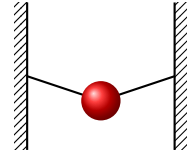
$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 32,2 \text{ m} + 131,9 \text{ m} = 164,1 \text{ m}$$

6.3 Schema di forze in equilibrio

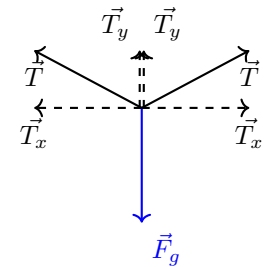
Problema di: generalità - dinamica - ID0001

Testo [ID0001] [2★ 2🕒 1a📖]

A due chiodi messi alla stessa altezza viene legata una corda. Al centro della corda viene appeso un oggetto. La corda assume quindi una forma a V. Sulla corda c'è una tensione $T = 1700 \text{ N}$; La componente orizzontale di tale forza vale $T_x = 1500 \text{ N}$. Quanto vale la massa dell'oggetto?



Spiegazione Abbiamo una corda che sostiene un peso. La forza di gravità spinge verso il basso; la corda deve spingere verso l'alto con una forza uguale in modulo. La corda spinge in diagonale; spinge cioè dal punto dove è attaccato il peso, verso il punto dove è attaccato il chiodo. Abbiamo quindi due forze, chiamate *Tensione*, che hanno una componente verticale ed una orizzontale. Le due componenti orizzontali si annullano tra loro perché sono opposte; le due componenti verticali si sommano e rappresentano la forza che sostiene il peso.



Svolgimento Utilizziamo il teorema di Pitagora per calcolare la componente verticale della tensione del filo.

$$T_y = \sqrt{T^2 - T_x^2} = \sqrt{1700^2 \text{ N}^2 - 1500^2 \text{ N}^2} = 800 \text{ N}$$

Imponendo la condizione di equilibrio traslazionale

$$F_g = 2 \cdot T_y$$

$$m \cdot g = 2 \cdot T_y$$

$$m = \frac{2 \cdot T_y}{g} = \frac{1600 \text{ N}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 163,3 \text{ kg}$$

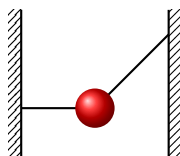
Problema di: Dinamica - D0124**Testo** [D0124] [1★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 250 \text{ kg}$ e densità $\rho_{ogg} = 0,6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ è immerso in acqua con densità $\rho_{acqua} = 1,01 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Motivando la risposta, indica se galleggia.

Spiegazione [...]**Svolgimento** [...]

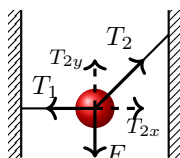
Problema di: Dinamica - D0094**Testo** [D0094] [2★ 3🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 2 \text{ kg}$ è sostenuto da due cavi attaccati a due pareti verticali. Il primo cavo è orizzontale ed il secondo cavo è inclinato verso l'alto con un angolo di $\alpha = 45^\circ C$. Quanto valgono le due tensioni dei cavi?



Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico traslazionale in due dimensioni. La somma di tutte le forze deve essere nulla.

Svolgimento Le forze del problema sono tre: la forza di gravità in basso e le due tensioni dei fili. La tensione del filo obliquo deve essere scomposta lungo le due direzioni orizzontale e verticale nelle due componenti T_{2x} e T_{2y} . Essendo il cavo inclinato di 45° , le due componenti saranno uguali. Quindi



$$\begin{cases} mg = T_{2y} \\ T_1 = T_{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{2y} = 19,6 \text{ N} \\ T_1 = 19,6 \text{ N} \end{cases}$$

Avremo infine

$$T_2 = \sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2} = 27,7 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0008**Testo** [D0008] [2★ 2🕒 1a📖]

Un vaso di massa trascurabile contiene $V = 15 \text{ dm}^3$ di acqua salata ($\rho = 1,03 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) ed è appeso ad una molla di costante elastica $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Di quanto si allunga la molla?

Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira il vaso verso il basso mentre la molla si allunga e so spinge verso l'alto. Consideriamo trascurabile la massa del vaso. Per risolvere il problema i servirà conoscere il valore della densità dell'acqua salata $\rho_{H_2O} = 1,03 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

Svolgimento Consideriamo con indicare la massa di acqua presente nel vaso con

$$m_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot V$$

La forza di gravità verso il basso vale

$$F_g = \rho_{H_2O} \cdot V \cdot g$$

la forza elastica che tira verso l'alto vale

$$F_{el} = k \cdot \Delta l$$

Per cui, eguagliando le due forze

$$k \cdot \Delta l = \rho_{H_2O} \cdot V \cdot g$$

$$\Delta l = \frac{\rho_{H_2O} \cdot V \cdot g}{k} = \frac{1,03 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 15 \text{ dm}^3 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{100 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 1,5 \text{ m}$$

Esercizi concettualmente identici

- Una molla di costante elastica $k = 5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ viene schiacciata verso il basso da un oggetto di massa $m = 12 \text{ kg}$. Di quanto si accorcia la molla? [$\Delta l = 23,52 \text{ cm}$]

2. Un oggetto di massa $m = 20 \text{ kg}$ viene messo sopra una molla facendola accorciare di $\Delta l = 2 \text{ cm}$. Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza fatta dalla molla per sorreggere l'oggetto? Quanto vale la costante elastica della molla? [$F_g = 196 \text{ N}$; $F_e = 196 \text{ N}$; $k = 98 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$]
3. Un oggetto di massa $m = 5 \text{ kg}$ viene appeso ad una molla di costante elastica $k = 16 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ attaccata al soffitto. Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Di quanto si allunga la molla? [$F_g = 49 \text{ N}$; $\Delta l = 306,25 \text{ cm}$]
4. Un'automobile di massa $m = 800 \text{ kg}$ si appoggia su quattro ammortizzatori di costante elastica $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Di quanto vengono compressi tali ammortizzatori a causa del peso dell'automobile? [$\Delta l = 19,6 \text{ cm}$]
5. Un edificio costruito con $m = 200000 \text{ kg}$ di materiale edile si appoggia su 16 molle di costante elastica $k = 10000 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Di quanto si comprimono tali molle a causa del peso dell'edificio?

Problema di: Dinamica - D0023

Testo [D0023] [1★ 1🕒 1a📖]

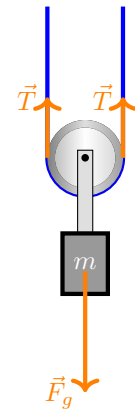
Una carrucola sta sorreggendo un oggetto di massa $m = 6 \text{ kg}$. L'oggetto è attaccato all'asse centrale della carrucola ed entrambi i capi della corda intorno alla carrucola vengono tirati verso l'alto. Quanto vale la tensione sul filo che tiene la carrucola?

Spiegazione Il cavo che tiene la carrucola tira verso l'alto sia sul lato destro che sul lato sinistro della carrucola. Il doppio della tensione del filo sarà quindi pari alla forza con cui la carrucola viene tirata verso il basso

Svolgimento Imponendo l'equilibrio statico avremo

$$2T = F_g$$

$$T = \frac{mg}{2} = \frac{6 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} = 29,4 \text{ N}$$



Problema di: Dinamica - D0036**Testo** [D0036] [2★ 2🕒 1a📖]

Ad una molla di costante elastica $k = 50 \frac{N}{m}$ viene appeso un oggetto di massa $m = 4 kg$. Di quanto si allunga la molla?

Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira l'oggetto verso il basso mentre la molla si allunga e lo spinge verso l'alto. Essendo l'oggetto fermo, allora la forza totale che agisce sull'oggetto è nulla.

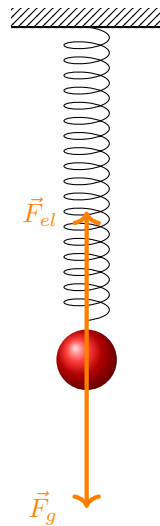
Svolgimento L'oggetto è fermo, quindi la forza totale che agisce è nulla.

$$F_{el} - F_g = 0$$

per cui

$$k \cdot \Delta l = m \cdot g$$

$$\Delta l = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{4 kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2}}{50 \frac{N}{m}} = 0,784 m$$

**Problema di: Dinamica - D0036a****Testo** [D0036a] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 2 kg$, appeso ad una molla, la allunga di $\Delta l = 0,784 cm$. Calcola la costante elastica della molla.

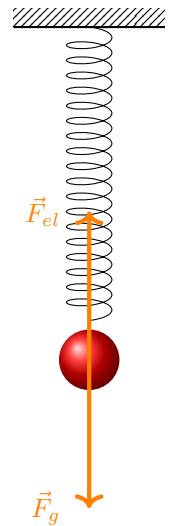
Spiegazione Appendendo l'oggetto alla molla, la molla si allunga. Non focalizziamoci sul fatto che per un certo tempo l'oggetto appeso oscillerà, ma concentriamoci sulla posizione finale che l'oggetto assume, cioè quando l'oggetto si ferma. Quando l'oggetto è fermo è in equilibrio.

Svolgimento Quando l'oggetto appeso alla molla è fermo, allora è in equilibrio e quindi la somma delle forze su di esso deve valere zero. La forza elastica è quindi uguale alla forza di gravità.

$$F_{el} = F_g$$

$$k \cdot \Delta l = mg$$

$$k = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{2 kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2}}{0,784 cm} = 25 \frac{N}{cm}$$



Problema di: Dinamica - D0036b**Testo** [D0036b] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto è appeso ad una molla di costante elastica $k = 2 \frac{N}{cm}$, la allunga di $\Delta l = 4 \text{ cm}$. Calcola la massa dell'oggetto.

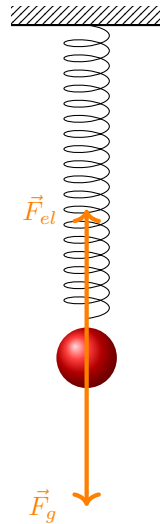
Spiegazione Appendendo l'oggetto alla molla, la molla si allunga. Non focalizziamoci sul fatto che per un certo tempo l'oggetto appeso oscillerà, ma concentriamoci sulla posizione finale che l'oggetto assume, cioè quando l'oggetto si ferma. Quando l'oggetto è fermo è in equilibrio.

Svolgimento Quando l'oggetto appeso alla molla è fermo, allora è in equilibrio e quindi la somma delle forze su di esso deve valere zero. La forza elastica è quindi uguale alla forza di gravità.

$$F_{el} = F_g$$

$$k \cdot \Delta l = mg$$

$$m = \frac{k \Delta l}{g} = 2 \frac{N}{cm} \cdot 4 \text{ cm} \frac{9,8 \frac{m}{s^2}}{= } 0,82 \text{ kg}$$

**Problema di: Dinamica - D0037****Testo** [D0037] [2★ 2🕒 1a📖]

Su di una macchina sale una persona di massa $m = 80 \text{ kg}$. Di quanto si abbassa la macchina se le quattro molle su cui poggia hanno costante elastica $k = 100 \frac{N}{cm}$?

Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira la persona verso il basso mentre le quattro molle si schiacciano e spingono verso l'alto. Essendo il sistema fermo, allora la forza totale che agisce su di esso è nulla. Le quattro molle insieme, schiacciandosi, aumentano la forza che fanno per compensare l'aumento del peso dovuto alla presenza della persona.

Svolgimento Il sistema è fermo, quindi la forza totale che agisce è nulla.

$$4F_{el} - F_g = 0$$

per cui

$$4k \cdot \Delta l = m \cdot g$$

$$\Delta l = \frac{m \cdot g}{4k} = \frac{80 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2}}{4 \cdot 100 \frac{N}{cm}} = 1,96 \text{ cm}$$

Problema di: Dinamica - D0045**Testo** [D0045] [2★ 2🕒 1a📖]

Un'automobile di massa $m = 800 \text{ kg}$ si appoggia su quattro ammortizzatori di costante elastica $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Di quanto vengono compressi tali ammortizzatori a causa del peso dell'automobile?

Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira il vaso verso il basso l'automobile, mentre le quattro molle attaccate alle ruote spingono verso l'alto. Visto che l'automobile è ferma, vuol dire che la somma delle forze su di lei è nulla.

Svolgimento La somma delle forze sulla macchina è nulla, quindi

$$F_g = 4 \cdot F_{el}$$

$$M \cdot g = 4 \cdot k \cdot \Delta l$$

$$\Delta l = \frac{m \cdot g}{4k}$$

$$\Delta l = \frac{800 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4 \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 19,6 \text{ cm}$$

Problema di: Dinamica - D0108**Testo** [D0108] [2★ 2🕒 2a📖]

La scala graduata di un dinamometro ha una portata massima $P = 1 \text{ N}$ ed è lunga $h = 20 \text{ cm}$. Attaccando al dinamometro un oggetto di massa $m = 50 \text{ g}$ e lasciandolo libero, calcola la frequenza dell'oscillazione che ne consegue.

Spiegazione Un problema sul moto armonico e sull'equilibrio. Le informazioni sullo strumento permettono di conoscere le caratteristiche della sua molla interna. Il resto ne è diretta conseguenza.

Svolgimento Un dinamometro è sostanzialmente una molla. Appendendo ad esso un oggetto esso oscilla di moto armonico con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

dove k è la costante elastica della molla. Le caratteristiche tecniche dello strumento ci permettono di risalire a tale costante in quanto sappiamo che se appendiamo un oggetto dal peso $P = 1 \text{ N}$ esso si allunga di $\Delta l = 20 \text{ cm}$ e quindi

$$k = \frac{P}{\Delta l}$$

Quindi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \Delta l}{P}}$$

Problema di: Dinamica - D0046**Testo** [D0046] [2½★ 3🕒 1a📖]

A due molle identiche, montate in serie, di massa $m = 0,2\text{ kg}$ e costante elastica $K = 2 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ è appeso un oggetto di massa $M = 1\text{ kg}$. Di quanto si allungano complessivamente le due molle?

Spiegazione In questo problema la forza di gravità tira le due molle verso il basso. La seconda molla deve solo sostenere il peso dell'oggetto, mentre la prima molla deve sostenere anche il peso della seconda molla. La prima molla quindi si allungherà più della seconda.

Svolgimento Per la seconda molla vale la condizione di equilibrio:

$$K \cdot \Delta l_2 = M \cdot g \quad \Rightarrow \quad \Delta l_2 = \frac{M \cdot g}{K}$$

Per la prima molla vale la condizione di equilibrio:

$$K \cdot \Delta l_1 = (M + m) \cdot g \quad \Rightarrow \quad \Delta l_1 = \frac{(M + m) \cdot g}{K}$$

L'allungamento totale ottenuto sarà quindi

$$\Delta l_{tot} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{M \cdot g}{K} + \frac{(M + m) \cdot g}{K}$$

$$\Delta l_{tot} = \frac{(2M + m) \cdot g}{K} = \frac{2,2\text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 10,8\text{ cm}$$

Problema di: Dinamica - D0035**Testo** [D0035] [1★ 1🕒 1a📖]

Se vuoi mantenere un sasso fermo sott'acqua senza che tocchi il fondo, devi fare una forza verso l'alto o verso il basso? Disegna le forze sull'oggetto e motiva la tua risposta. Immagina adesso di fare la stessa cosa con un pallone di plastica, devi fare una forza verso l'alto o verso il basso? Disegna le forze sull'oggetto e motiva la tua risposta.

Spiegazione In questo esercizio si richiede di analizzare la condizione di equilibrio per un corpo immerso in un liquido. Per rispondere alle domande devi disegnare le forze che agiscono sui corpi e poi disegnare la forza che devi fare tu al fine di creare una condizione di equilibrio traslazionale.

Svolgimento Nel caso del sasso, abbiamo una forza di gravità verso il basso maggiore della forza di Archimede verso l'alto. Per avere equilibrio $\vec{F}_{tot} = 0$ tu dovrai fare una forza verso l'alto.

Nel caso del pallone, abbiamo una forza di gravità verso il basso minore della forza di Archimede verso l'alto. Per avere equilibrio $\vec{F}_{tot} = 0$ tu dovrai fare una forza verso il basso.

Problema di: Dinamica - D0085**Testo** [D0085] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 5 \text{ kg}$ e volume $V = 0,7 \text{ m}^3$ è appoggiato su di un tavolo. La densità dell'aria è $\rho_{aria} = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Disegna le forze che agiscono sull'oggetto, compresa la forza che esercita l'aria. Quanta forza sta facendo il tavolo per sorreggere l'oggetto se non trascuriamo l'effetto dell'aria?

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Abbiamo la forza di gravità verso il basso; la forza di Archimede verso l'alto e la reazione vincolare del tavolo verso l'alto. Quindi

$$R_v + F_A = F_g$$

$$R_v = mg - \rho V g = 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,7 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 40,08 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0085a**Testo** [D0085a] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di volume $V = 10^5 \text{ cm}^3$ è appoggiato sul fondo di un contenitore pieno di olio (la densità dell'olio è $\rho_{olio} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$). Il fondo del contenitore fa una reazione vincolare $R_v = 200 \text{ N}$. Disegna le forze che agiscono sull'oggetto. Calcola la forza di gravità sull'oggetto e la sua massa.

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Abbiamo la forza di gravità verso il basso; la forza di Archimede verso l'alto e la reazione vincolare del tavolo verso l'alto. Quindi

$$R_v + F_A = F_g$$

$$F_g = 200 \text{ N} + 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,1 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 984 \text{ N}$$

$$m = \frac{F_g}{g} = 100,4 \text{ kg}$$

Problema di: Dinamica - D0085b**Testo** [D0085b] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto si trova immerso in un contenitore pieno di olio, appeso ad una catena in modo che non tocchi il fondo. L'oggetto ha un volume $V = 150000 \text{ cm}^3$ e la densità dell'olio vale $\rho_{olio} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. La catena fa una reazione vincolare $R_v = 400 \text{ N}$. Disegna tutte le forze che agiscono sull'oggetto. Calcola la forza di gravità sull'oggetto e la sua massa.

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Abbiamo la forza di gravità verso il basso; la forza di Archimede verso l'alto e la reazione vincolare della catena verso l'alto. Quindi

$$R_v + F_A = F_g$$

$$F_g = 400 \text{ N} + 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,15 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1576 \text{ N}$$

$$m = \frac{F_g}{g} = 160,8 \text{ kg}$$

Problema di: Dinamica - D0085c**Testo** [D0085c] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto si trova fermo, immerso in un contenitore pieno di liquido, appeso ad una catena in modo che non tocchi il fondo. L'oggetto ha una massa $m = 2 \text{ kg}$ e un volume $V = 1 \text{ dm}^3$. La catena fa una reazione vincolare verso l'alto $R_v = 10 \text{ N}$. Disegna tutte le forze che agiscono sull'oggetto. Calcola la forza di Archimede che agisce sull'oggetto. L'oggetto è completamente immerso?

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Abbiamo la forza di gravità verso il basso; la forza di Archimede verso l'alto e la reazione vincolare della catena verso l'alto. Quindi

$$R_v + F_A = F_g$$

$$F_A = F_g - R_v = 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 10 \text{ N} = 9,6 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0085d**Testo** [D0085d] [2★ 2⌚ 1a📖]

Un oggetto della forma di un cubo si trova fermo, appeso ad una molla di costante elastica $k = 3 \frac{N}{cm}$, la quale non riuscendo a sorreggerlo si è allungata fino a fargli toccare il pavimento. L'oggetto ha una massa $m = 2 kg$. Il fondo fa una reazione vincolare verso l'alto $R_v = 10 N$. Disegna tutte le forze che agiscono sull'oggetto. Calcola la forza elastica che agisce sull'oggetto.

Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico in cui la somma delle forze sull'oggetto è nulla.

Svolgimento Sul cubo agiscono tre forze: la reazione vincolare verso l'alto, la forza di gravità verso il basso e la forza elastica verso l'alto.

$$R_v + F_{el} = F_g$$

$$F_{el} = mg - R_v = 2 kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} - 10 N = 9,6 N$$

Problema di: Dinamica - D0086**Testo** [D0086] [2★ 2⌚ 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 3 kg$ è appeso ad una molla di costante elastica $K = 4 \frac{N}{cm}$. Sapendo che la forza di Archimede dovuta all'aria sull'oggetto vale $F_A = 5 N$, calcolate di quanto si allunga la molla.

Spiegazione Sull'oggetto agiscono tre forze. Se l'oggetto è fermo la somma delle forze è nulla.

Svolgimento Sull'oggetto agisce la forza di gravità che sappiamo essere sempre verso il basso, la forza di Archimede che sappiamo essere sempre verso l'alto e la forza elastica. Dal momento che la somma tra la forza di gravità e la forza elastica da un vettore verso il basso, per avere equilibrio è necessario che la forza elastica sia verso l'alto. Quindi

$$F_g = F_A + F_{el}$$

$$mg - F_A = k\Delta l$$

$$\Delta l = \frac{mg - F_A}{K} = \frac{3 kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} - 5 N}{4 \frac{N}{cm}} = 6,1 cm$$

Problema di: Dinamica - D0114**Testo** [D0114] [2½★ 3🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 500\text{ g}$ galleggia in un contenitore riempito con $V_1 = 5\ell$ di acqua $\left(\rho_{\text{acqua}} = \frac{1020\text{ g}}{\ell}\right)$ e $V_2 = 3\ell$ di alcohol $\left(\rho_{\text{alcohol}} = \frac{0,8\text{ kg}}{\ell}\right)$. Quanto volume dell'oggetto rimane sommerso nel liquido?

Spiegazione Sapendo che galleggia, sappiamo che è in equilibrio statico. Per calcolare le forze in gioco sarà necessario capire la densità del liquido nel contenitore.

Svolgimento Sappiamo che nel contenitore sono presenti $V = 8\ell$ di liquido.

La massa di acqua è

$$m_{\text{acqua}} = \rho_{\text{acqua}} \cdot V_{\text{acqua}} = \frac{1020\text{ g}}{\ell} \cdot 5\ell = 5,1\text{ kg}$$

La massa di alcohol è

$$m_{\text{alcohol}} = \rho_{\text{alcohol}} \cdot V_{\text{alcohol}} = \frac{0,8\text{ kg}}{\ell} \cdot 3\ell = 2,4\text{ kg}$$

La densità del liquido è

$$\rho_{\text{liquido}} = \frac{m_{\text{acqua}} + m_{\text{alcohol}}}{V_{\text{acqua}} + V_{\text{alcohol}}} = \frac{7,5\text{ kg}}{8\ell} = 0,9375 \frac{\text{kg}}{\ell}$$

Il volume immerso lo troviamo imponendo la condizione di equilibrio.

$$\rho_{\text{liquido}} \mathcal{V}_{\text{imm}} g = m_{\text{oggetto}} g$$

$$\mathcal{V}_{\text{imm}} = \frac{m_{\text{oggetto}}}{\rho_{\text{liquido}}} = \frac{0,5\text{ kg}}{0,9375 \frac{\text{kg}}{\ell}} = 0,53\ell$$

Problema di: Dinamica - D0115**Testo** [D0115] [2½★ 4🕒 1a📖]

Una zattera di legno di densità $\rho = 0,75 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ è formata da 6 tronchi cilindrici di volume $V = 1,5\text{ m}^3$. La persona sulla zattera ha una massa $m = 60\text{ kg}$. Quale volume della zattera è immerso in acqua? Quale massa farebbe affondare la zattera?

Spiegazione [...]

Svolgimento [...]

Problema di: Dinamica - D0004**Testo** [D0004] [2★ 2🔑 1a📖]

Un oggetto di ferro di massa $m = 2\text{ kg}$ è fermo, appeso ad una molla di costante elastica $k = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$ e contemporaneamente tirato verso il basso da una calamita che esercita una forza magnetica $F_m = 50\text{ N}$. Di quanto si è allungata la molla?

Spiegazione Visto che l'oggetto in questione è fermo, allora la somma delle forze che agiscono su di lui è zero. Sull'oggetto agiscono la forza di gravità verso il basso, la forza elastica verso l'alto e la forza magnetica verso il basso.

Svolgimento Visto che la somma delle forze che agiscono sull'oggetto è zero

$$F_{el} = F_g + F_m$$

$$k \cdot \Delta l = mg + F$$

$$\Delta l = \frac{mg + F}{k} = \frac{2\text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 50\text{ N}}{10 \frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 6,96\text{ cm}$$

Esercizi concettualmente identici

1. Una mongolfiera di massa $m_m = 120\text{ kg}$ e volume $V = 3000\text{ m}^3$, trattenuta da una corda fissata a terra, si trova ad un'altezza $h = 100\text{ m}$ da terra. Su di essa ci sono 2 persone ognuna aventi massa $m_p = 70\text{ kg}$. In questo momento la mongolfiera è ferma. La densità dell'aria vale $\rho_{aria} = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ e la densità dell'aria calda vale $\rho_{aria-calda} = 1,08 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Quanto vale la massa complessiva della mongolfiera (massa della mongolfiera + massa delle persone + massa dell'aria calda)? Quanto vale e verso dove è diretta la forza di gravità complessiva che agisce sulla mongolfiera? Quanto vale e verso dove è diretta la forza di Archimede che agisce sulla mongolfiera? Quanto vale la tensione sul filo?
[$m = 3500\text{ kg}$; $F_g = 34300\text{ N}$; $F_A = 38220\text{ N}$; $T = 3920\text{ N}$;]

2. Un oggetto di massa $m = 500\text{ kg}$ e volume $V = 100\text{ dm}^3$ schiaccia una molla con costante elastica $k = 800 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Quanto vale la forza di gravità che agisce

sull'oggetto? Di quanto si accorcia la molla? Se immergo l'oggetto e la molla in un liquido la molla si accorcia di più o di meno? Perché? La densità dell'acqua è $\rho_{H_2O} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. Di quanto si accorcia la molla se l'oggetto è immerso in acqua?
[$F_g = 4900\text{ N}$; $\Delta l = 6,125\text{ cm}$; La molla si accorcia di meno, visto che si aggiunge la forza di Archimede che spinge l'oggettino alto; $\Delta l = 4,9\text{ cm}$]

3. Un oggetto di densità $\rho = 0,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ è completamente immerso in un liquido di densità $\rho = 0,9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. Il suo volume totale è $V_{tot} = 30\text{ dm}^3$. Quanto vale la massa dell'oggetto? Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza di Archimede che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza totale che lo spinge verso l'alto? Una volta che l'oggetto è arrivato in superficie (e quindi si ferma) quanto vale la forza di Archimede che agisce su di esso? Quanto vale il volume della parte immersa dell'oggetto?
[$m = 21\text{ kg}$; $F_g = 205,8\text{ N}$; $F_A = 264,6\text{ N}$; $F_{tot} = 58,8\text{ N}$; $F_{A_2} = 205,8\text{ N}$; $V = 23,33\text{ dm}^3$]

Problema di: Dinamica - D0013**Testo** [D0013] [2★ 3🕒 1a📖]

Un cubo di ferro di densità $\rho_{Fe} = 7874 \frac{kg}{m^3}$, e di lato $l = 20 \text{ cm}$ si trova sul fondo di una piscina piena di acqua di densità $\rho_{H_2O} = 1000 \frac{kg}{m^3}$. Qual è la minima forza necessaria per sollevarlo dal fondo della piscina?

Spiegazione Sul cubo di ferro agiscono la forza di gravità verso il basso e la forza di Archimede verso l'alto. Visto che la forza di gravità è maggiore della forza di archimede, per sollevare l'oggetto dobbiamo fare una forza maggiore o al minimo uguale a quella necessaria per sorreggerlo e tenerlo in equilibrio.

Svolgimento Il volume e la massa dell'oggetto valgono

$$V_{Fe} = l^3 = 8000 \text{ cm}^3 = 0,008 \text{ m}^3$$

$$m_{Fe} = \rho_{Fe} V_{Fe} = 7874 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,008 \text{ m}^3 = 63 \text{ kg}$$

La forza di gravità vale

$$F_g = mg = 63 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 617,3 \text{ N}$$

Essendo l'oggetto completamente immerso nell'acqua

$$F_{Arc} = \rho_{H_2O} V_{Fe} g = 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 0,008 \text{ m}^3 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 78,4 \text{ N}$$

Infine la forza che devo fare per sorreggere il blocco e tenerlo in equilibrio vale

$$T = F_g - F_{Arc} = 617,3 \text{ N} - 78,4 \text{ N} = 538,9 \text{ N}$$

Esercizi concettualmente identici

1. Sul fondo di una piscina piena d'acqua è legato con un filo elastico un palloncino del volume $V = 10 \text{ dm}^3$ e di massa $m = 500 \text{ g}$. Si nota che il palloncino tira l'elastico verso l'alto e l'elastico si è allungato di $\Delta l = 20 \text{ cm}$. Quanto vale e

verso dove è diretta la forza di gravità che agisce sul palloncino? Quanto vale e verso dove è diretta la forza di Archimede che agisce sul palloncino? Quale forza deve fare l'elastico per tenere fermo il palloncino? Quanto vale la costante elastica dell'elastico?

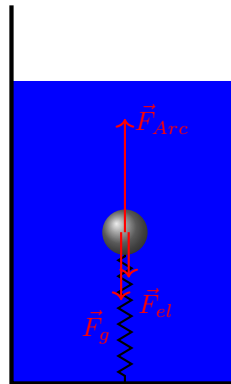
[$F_g = 4,9 \text{ N}$ diretta verso il basso; $F_{arch} = 98 \text{ N}$ diretta verso l'alto; $F_{el} = 93,1 \text{ N}$ diretta verso il basso; $k = 4,6505 \frac{N}{cm}$.]

2. Con una fionda voglio lanciare un sasso di massa $m = 150 \text{ g}$ verticalmente verso l'alto. La costante elastica dell'elastico della fionda è $k = 6 \frac{N}{cm}$ e il mio braccio sta allungando l'elastico di $\Delta l = 15 \text{ cm}$. Quanta forza sta facendo l'elastico della fionda? Quanto vale la forza di gravità che agisce sul sasso? Quanta forza sta facendo il mio braccio per riuscire ad allungare quell'elastico? [$F_e = 90 \text{ N}$; $F_g = 1,47 \text{ N}$; $F = 88,53 \text{ N}$]
3. Un oggetto di densità $\rho = 0,7 \frac{kg}{dm^3}$, volume $V = 10 \text{ dm}^3$ sta galleggiando in un contenitore pieno d'acqua. La densità dell'acqua vale $\rho_{H_2O} = 1000 \frac{kg}{m^3}$. Quanto vale la massa dell'oggetto? Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto deve valere la forza di archimede che agisce sull'oggetto visto che l'oggetto galleggia? Quanto vale il volume della parte immersa dell'oggetto? [$m = 7 \text{ kg}$; $F_g = 68,6 \text{ N}$; $F_a = 68,6 \text{ N}$; $V = 7 \text{ dm}^3$]

Problema di: Dinamica - D0025**Testo** [D0025] [2★ 2🕒 1a📖]

Un palloncino è tenuto fermo sott'acqua da una molla di costante elastica $k = 5 \frac{N}{cm}$. Il suo volume è $V = 1 \text{ dm}^3$ e la sua massa è $m = 400 \text{ g}$. Di quanto si allunga la molla?

Spiegazione In questo problema il palloncino è fermo, quindi la somma di tutte le forze che agiscono su di esso è nulla. Le forze in gioco sono tre: la forza elastica della molla, la forza di gravità e la forza di Archimede. La forza di gravità è verso il basso; quella di Archimede verso l'alto. La forza elastica deve adattarsi allo scopo di rendere nulla la somma delle forze. Considerando che parliamo di un palloncino ci aspettiamo (ma dobbiamo poi confermarlo con i conti) che la forza elastica sia rivolta verso il basso, in quanto, se lasciato libero, ci aspettiamo che quel palloncino si muova verso l'alto per andare a galleggiare.



Svolgimento La condizione di equilibrio traslazionale è:

$$F_g + F_{el} = F_{Arc}$$

tenendo conto che il palloncino è tutto immerso, e quindi il volume di fluido spostato è pari al volume dell'oggetto

$$m \cdot g + K \cdot \Delta l = \rho_{H_2O} \cdot V_{ogg} \cdot g$$

da cui, con la formula inversa

$$K \cdot \Delta l = \rho_{H_2O} \cdot V_{ogg} \cdot g - m \cdot g$$

$$\Delta l = \frac{\rho_{H_2O} \cdot V_{ogg} \cdot g - m \cdot g}{K}$$

$$\Delta l = \frac{1 \frac{kg}{dm^3} \cdot 1 \text{ dm}^3 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} - 0,4 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2}}{5 \frac{N}{cm}} = 1,176 \text{ cm}$$

Problema di: Dinamica - D0025a**Testo** [D0025a] [2★ 2⌚ 1a📖]

Un oggetto è appeso ad una molla di costante elastica $k = 5 \frac{N}{cm}$ ed immerso nell'acqua. Il suo volume è $V = 0,1 dm^3$ e la sua massa è $m = 500 g$. Di quanto si allunga la molla?

Spiegazione [...]

Svolgimento Considerando che la forza di gravità è rivolta verso il basso e che le forze elastica e di Archimede sono rivolte verso l'alto, la condizione di equilibrio traslazionale è:

$$F_g = F_{Arc} + F_{el}$$

tenendo conto che l'oggetto è tutto immerso, e quindi il volume di fluido spostato è pari al volume dell'oggetto

$$m \cdot g = K \cdot \Delta l + \rho_{H_2O} \cdot V_{ogg} \cdot g$$

da cui, con la formula inversa

$$K \cdot \Delta l = -\rho_{H_2O} \cdot V_{ogg} \cdot g + m \cdot g$$

$$\Delta l = \frac{-\rho_{H_2O} \cdot V_{ogg} \cdot g + m \cdot g}{K}$$

$$\Delta l = \frac{1 \frac{kg}{dm^3} \cdot 0,1 dm^3 \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} - 0,5 kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2}}{5 \frac{N}{cm}} = [...]$$

Problema di: Dinamica - D0082**Testo** [D0082] [2★ 2⌚ 1a📖]

A due molle identiche, montate in parallelo, di costante elastica $K_1 = 2 \frac{N}{cm}$ e $K_2 = 3 \frac{N}{cm}$ è attaccato un oggetto di massa $M = 1 kg$. Di quanto si allungano le due molle? [Considera che le due molle hanno lo stesso allungamento]

Spiegazione Le due molle spingono verso l'alto, mentre la forza di gravità in basso. L'oggetto è in equilibrio, quindi la somma delle forze è nulla

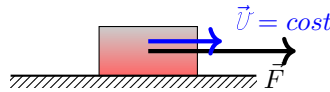
Svolgimento

$$K_1 \Delta l + K_2 \Delta l = Mg$$

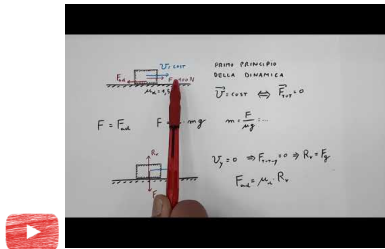
$$\Delta l = \frac{Mg}{K_1 + K_2} = 1,96 cm$$

Problema di: Dinamica - D0003**Testo** [D0003] [2½★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto si muove su di un piano orizzontale con velocità costante, sotto l'azione di una forza $F = 100 \text{ N}$. Se il coefficiente di attrito tra il piano e l'oggetto vale $\mu_d = 1,5$ quanto vale la massa dell'oggetto?



Spiegazione Abbiamo un oggetto che si muove spinto da una forza e che viaggia con velocità costante, mentre la forza di attrito radente con il piano orizzontale lo sta frenando. La forza che schiaccia l'oggetto contro la superficie è in questo caso la forza di gravità sull'oggetto.

Fig. 6.1: Guarda il video youtu.be/1N9pL-1i9rw**Svolgimento**

3. In fine trovo la massa dell'oggetto

$$m = \frac{F}{\mu_d g} = \frac{100 \text{ N}}{1,5 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 6,8 \text{ kg}$$

1. Il primo principio della dinamica mi dice che la forza F deve essere uguale alla forza di attrito:

$$F_a = F$$

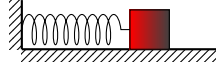
2. Da qui, sapendo che in questo esercizio la forza di attrito è generata dalla forza di gravità:

$$\mu_d F_{\text{schiaccia}} = F$$

$$\mu_d mg = F$$

Problema di: Dinamica - D0080**Testo** [D0080] [3★ 3🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $M = 10 \text{ kg}$ è fermo su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito $\mu_s = 4$ e $\mu_d = 2$, e si trova accanto ad una molla inizialmente scarica, di costante elastica $K = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Spostiamo l'oggetto appoggiandolo nuovamente sul piano, in modo che rimanga fermo schiacciando la molla. Calcola il massimo schiacciamento possibile per la molla.



Spiegazione Quando l'oggetto è fermo a comprimere la molla vuol dire che la somma delle forze che agiscono su di esso è nulla. Le due forze in questione sono la forza della molla e la forza di attrito statico.

Svolgimento Lungo il piano orizzontale le due forze che agiscono sono la forza della molla e la forza di attrito statico causata dalla forza di gravità che schiaccia l'oggetto contro il piano

$$F_{el} = F_{as}$$

$$K \cdot \Delta l = F_{as} \leq F_{as-max} = \mu_s mg$$

$$\Delta l \leq \frac{\mu_s mg}{k}$$

Problema di: Dinamica - D0113**Testo** [D0113] [2★ 2🕒 1a📖]

Abbiamo un contenitore cilindrico ($S_{base} = 400 \text{ cm}^2$) riempito con acqua ($\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$). Ci immergiamo un corpo di massa $m = 2 \text{ kg}$ e lo vediamo galleggiare. Di quanto si solleva il livello dell'acqua?

Spiegazione Sapendo che galleggia, possiamo calcolare il volume della parte immersa in acqua e di conseguenza calcolare l'innalzamento del livello dell'acqua.

Svolgimento Il volume immerso lo troviamo imponendo la condizione di equilibrio.

$$\rho_{acqua} V_{imm} g = mg$$

$$V_{imm} = \frac{m}{\rho_{acqua}}$$

L'innalzamento del livello di acqua è dato da

$$\Delta h = \frac{V_{imm}}{S}$$

Problema di: Dinamica - D0070**Testo** [D0070] [3★ 3🕒 3a📖]

L'attrito con l'aria è una forza viscosa che in prima approssimazione descriveremo con la formula $F_a = \alpha U$. Un aeromodello di massa $m = 2 \text{ kg}$ viaggia a velocità costante $U_i = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. In un certo istante esso triplica la forza che sviluppa ottenendo un'accelerazione in avanti $a = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Quale velocità massima raggiungerà? Quanto vale il coefficiente α ?

Spiegazione L'aeromodello viaggia a velocità costante in quanto la spinta del motore in avanti è bilanciata dalla forza di attrito con l'aria. Nell'istante in cui la forza aumenta, l'aeromodello subisce un'accelerazione in quanto l'equilibrio delle forze viene a mancare. La velocità aumenta e di conseguenza aumenta la forza di attrito, fino a riottenere una condizione di equilibrio e quindi una velocità costante.

Svolgimento Visto che la forza di attrito è direttamente proporzionale alla velocità, triplicando la forza del motore verrà triplicata la forza di attrito e quindi la velocità dell'aeromodello.

$$\alpha U_f = F_f = 3F_i = 3\alpha U_i$$

$$U_f = 3 \cdot U_i$$

Con i dati in possesso possiamo inoltre scrivere

$$\begin{cases} F_i = \alpha U_i \\ 3F_i - \alpha U_i = ma \end{cases}$$

$$2\alpha U_i = ma$$

$$\alpha = \frac{ma}{2U_i}$$

Problema di: Dinamica - D0022**Testo** [D0022] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 500 \text{ g}$ si muove di moto circolare uniforme di raggio $r = 20 \text{ cm}$ ad una velocità $U = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ attaccato ad una molla di costante elastica $k = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Quanto vale la forza centrifuga che tira la molla? Di conseguenza, di quanto si è allungata la molla?

Spiegazione In questo esercizio un oggetto si muove di moto circolare uniforme. Per muoversi in tale modo, serve una forza centripeta, e tale forza è data da una molla.

Svolgimento La forza centrifuga che tira la molla vale

$$F_c = m \frac{U^2}{r} = 0,5 \text{ kg} \cdot \frac{16 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{0,2 \text{ m}} = 40 \text{ N}$$

Eguagliano poi la forza centripeta con la forza elastica avremo:

$$F_e = F_c$$

$$k \cdot \Delta l = m \frac{U^2}{r}$$

$$\Delta l = \frac{m U^2}{kr} = \frac{0,5 \text{ kg} \cdot 16 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,2 \text{ m}} = 0,04 \text{ m}$$

Problema di: Dinamica - D0120**Testo** [D0120] [3½★ 3⌚ 2a📖]

Un oggetto, appoggiato sul fondo di un contenitore, immerso in olio pesa $F_1 = 30\text{ N}$, mentre se immerso in acqua pesa $F_2 = 25\text{ N}$. Questi sono quindi i valori della reazione vincolare del fondo del contenitore. Determina la densità dell'oggetto.

Spiegazione E' un problema di dinamica, quindi per prima cosa disegna tutte le forze ed imponi la condizione di equilibrio. Successivamente risolvi il sistema per trovare massa e volume del corpo.

Svolgimento [...]**Problema di: Dinamica - D0117****Testo** [D0117] [1½★ 2⌚ 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 10\text{ kg}$ è fermo su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0,8$. Determina la reazione vincolare del piano e la minima forza che serve per spostare orizzontalmente l'oggetto.

Spiegazione [...]**Svolgimento** [...]

Problema di: Dinamica - D0117a**Testo** [D0117a] [1½★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 10\text{ kg}$ è fermo su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico μ_s . Determina la reazione vincolare del piano e, sapendo che la minima forza che serve per spostare orizzontalmente l'oggetto è $F = 50\text{ N}$, determina il coefficiente di attrito statico.

Spiegazione [...]**Svolgimento** [...]**Problema di: Dinamica - D0118****Testo** [D0118] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 10\text{ kg}$ è fermo su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0,8$. Contemporaneamente lo stai schiacciando con una mano facendo su di lui una forza verticale verso il basso $F = 30\text{ N}$. Determina la reazione vincolare del piano e la minima forza che serve per spostare orizzontalmente l'oggetto.

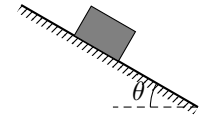
Spiegazione [...]**Svolgimento** [...]

Problema di: Dinamica - D0123**Testo** [D0123] [1½★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 10\text{ kg}$ è appoggiato su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0,5$. Se lo spingiamo orizzontalmente verso destra con una forza $F = 30\text{ N}$ si muoverà?

Spiegazione [...]**Svolgimento** [...]**Problema di: Dinamica - D0119****Testo** [D0119] [2★ 3🕒 1a📖]

Un corpo di massa $m = 20\text{ kg}$ è fermo su di un piano inclinato lungo $\ell = 2,7\text{ m}$ ed alto $h = 0,9\text{ m}$. Disegna il diagramma delle forze e calcola la reazione vincolare del piano. Calcola infine la forza di attrito. Un piano con coefficiente di attrito $\mu_s = 0.3$ riesce a generare tanto attrito?

**Spiegazione** [...]**Svolgimento** [...]

6.4 Schema di forze in equilibrio in 2 dimensioni

Problema di: Dinamica - D0094a

Testo [D0094] [2★ 3🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 2 \text{ kg}$ è sostenuto da due cavi attaccati a due pareti verticali. Tra i due cavi si forma un angolo di $\alpha = 90^\circ$. Sapendo che una delle due tensioni è doppia dell'altra, determina i loro valori.

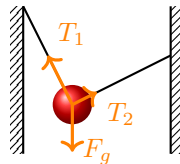
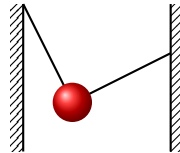
Spiegazione Questo è un problema di equilibrio statico traslazionale in due dimensioni. La somma di tutte le forze deve essere nulla.

Svolgimento Le forze del problema sono tre: la forza di gravità in basso e le due tensioni dei fili. Chiamiamo T_1 la tensione del filo attaccato più in alto sulla parete. Sapendo che le due tensioni sono perpendicolari tra loro, possiamo scrivere:

$$mg = \sqrt{T_1 + T_2} = \sqrt{3}T_2$$

$$T_2 = \frac{19,6 \text{ N}}{\sqrt{3}} = 11,3 \text{ N}$$

$$T_1 = \frac{T_2}{2} = 5,66 \text{ N}$$

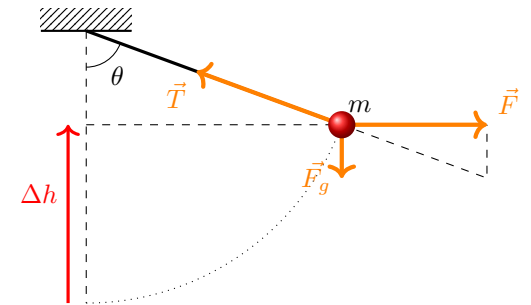


Problema di: Dinamica - D0040

Testo [D0040] [2★ 2🕒 1a📖]

Un pendolo di massa $m = 300 \text{ g}$ è fermo, tirato in orizzontale da una forza $F = 6 \text{ N}$. Calcola la tensione del filo.

Spiegazione In questo problema abbiamo tre forze disposte su di un piano: la forza di gravità verso il basso, la forza esterna in orizzontale (immaginiamo verso destra) e la tensione del filo in diagonale lungo il filo. In una condizione di equilibrio la somma delle tre forze è nulla. La forza di gravità è compensata dalla componente verticale della tensione del filo; la forza esterna è compensata dalla componente orizzontale della tensione del filo. È inoltre importante notare che il triangolo rettangolo formato dalle tre forze è simile al triangolo rettangolo formato dal filo (ipotenusa) e dalle sue due proiezioni verticale ed orizzontale (i due cateti).



Svolgimento La tensione del filo è in modulo pari alla somma della forza di gravità e della forza esterna

$$T = \sqrt{F_g^2 + F^2} = \sqrt{m^2 g^2 + F^2} = \sqrt{0,09 \text{ kg}^2 \cdot 96,04 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4} + 36 \text{ N}^2}$$

$$T = 6,68 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0041**Testo** [D0041] [3★ 4🕒 2a📖]

Un pendolo è realizzato con un peso di massa $m = 700\text{ g}$ ed un filo di lunghezza $L = 2\text{ m}$. Esso viene tirato in orizzontale da una forza $F = 8\text{ N}$ fino a raggiungere l'equilibrio. Quanto vale la tensione del filo che sorregge il peso? Di quanto si è sollevato il peso rispetto alla posizione di minima altezza?

Spiegazione In questo problema abbiamo tre forze disposte su di un piano: la forza di gravità verso il basso, la forza esterna in orizzontale (immaginiamo verso destra) e la tensione del filo in diagonale lungo il filo. In una condizione di equilibrio la somma delle tre forze è nulla. La forza di gravità è compensata dalla componente verticale della tensione del filo; la forza esterna è compensata dalla componente orizzontale della tensione del filo. È inoltre importante notare che il triangolo rettangolo formato dalle tre forze è simile al triangolo rettangolo formato dal filo (ipotenusa) e dalle sue due proiezioni verticale ed orizzontale (i due cateti).

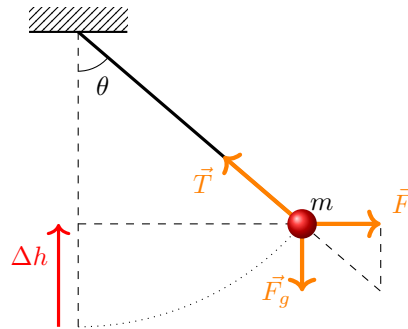
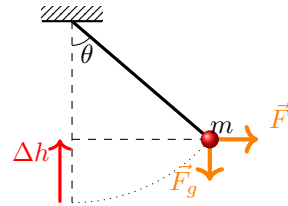
Svolgimento La tensione del filo è in modulo pari alla somma della forza di gravità e della forza esterna

$$T = \sqrt{F_g^2 + F^2}$$

$$T = \sqrt{m^2 g^2 + F^2}$$

$$T = \sqrt{0,49\text{ kg}^2 \cdot 96,04 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4} + 64\text{ N}^2}$$

$$T = 10,54\text{ N}$$



Consideriamo adesso il triangolo rettangolo formato dal filo (ipotenusa) e dalle sue due proiezioni verticale ed orizzontale (i due cateti). Il cateto verticale lo si trova sfruttando la similitudine tra triangoli e la conseguente proporzionalità tra i lati.

$$y : F_g = L : T$$

per cui

$$y = L \cdot \frac{F_g}{T} = L \cdot \frac{F_g}{\sqrt{F_g^2 + F^2}}$$

La massa attaccata al pendolo si è quindi sollevata di una quantità

$$\Delta h = L - y = L \cdot \left(1 - \frac{F_g}{\sqrt{F_g^2 + F^2}} \right) = 0,70\text{ m}$$

Problema di: Dinamica - D0043**Testo** [D0043] [2½★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto striscia con velocità costante su di un piano inclinato. Sapendo che la reazione vincolare del piano vale $R_v = 17\text{ N}$ e che le forze di attrito valgono $F_a = 9,8\text{ N}$, calcolate la massa dell'oggetto ed il coefficiente di attrito dinamico del piano.

Spiegazione L'oggetto si muove con velocità costante, quindi per il primo principio della dinamica la somma delle forze su di esso è nulla. Lo schema delle forze è rappresentato qui a lato. La reazione vincolare e la forza di attrito sono tra loro perpendicolari.

Svolgimento Visto lo schema delle forze avremo:

$$-\vec{F}_g = \vec{R}_v + \vec{F}_a$$

e di conseguenza

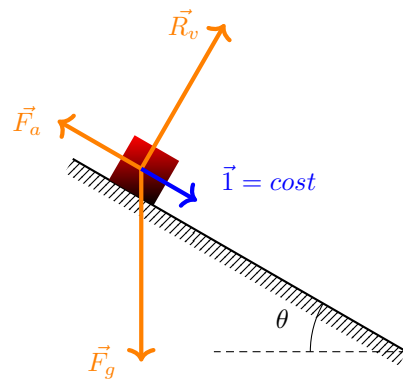
$$F_g = \sqrt{R_v^2 + F_a^2} = \sqrt{385\text{ N}^2} = 19,6\text{ N}$$

La massa del corpo sarà quindi

$$m = \frac{F_g}{g} = \frac{19,6\text{ N}}{9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2\text{ kg}$$

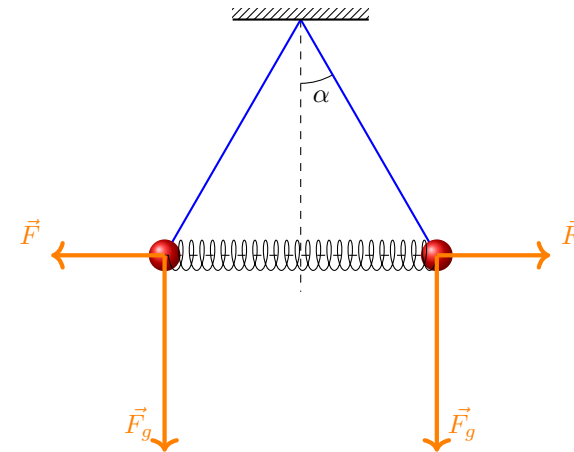
La forza che schiaccia il corpo contro il piano inclinato è pari alla reazione vincolare del piano, quindi il coefficiente di attrito dinamico sarà

$$\mu_d = \frac{F_a}{R_v} = 0,58$$

**Problema di: Dinamica - D0071****Testo** [D0071] [4★ 3🕒 3a📖]

Due sfere di massa $m = 15\text{ g}$, sono appese con due fili inestensibili entrambi lunghi $l = 20\text{ cm}$ e sono separate tra loro da una molla anch'essa di lunghezza $l = 20\text{ cm}$, di massa trascurabile e di costante elastica $k = 1\frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Quale angolo formano i due fili nella condizione di equilibrio? [È sufficiente scrivere l'equazione risolutiva e trovarne il risultato con la calcolatrice programmabile]

Spiegazione Le due sfere si respingono a causa della presenza della molla. Nella posizione di equilibrio ogni sfera è soggetta ad una forza elastica che genera un momento in un certo verso ed la forza di gravità che genera un momento opposto. Nella condizione di equilibrio i due momenti si equivalgono.

**Svolgimento**

Consideriamo il filo sulla destra nel disegno. Il momento della forza di gravità rispetto al punto in cui i due fili sono attaccati è orario e vale

$$M_g = F_g \cdot l \cdot \sin \alpha$$

Il momento della forza elastica rispetto al punto in cui i due fili sono attaccati è antiorario e vale

$$M_{el} = F_{el} \cdot l \cdot \sin(90 - \alpha) = F_{el} \cdot l \cdot \cos \alpha$$

Quindi la condizione di equilibrio è

$$F_{el} \cdot l \cdot \cos \alpha = F_g \cdot l \cdot \sin \alpha$$

Ragioniamo adesso sulla forza elastica. Essa dipende dalla variazione di lunghezza della molla. Quando la molla è a riposo e non fa forza, allora l'angolo tra i due fili è $\theta = 60^\circ$ infatti, essendo la molla lunga a riposo esattamente quanto la lunghezza dei due pendoli, in quella condizione si forma un triangolo equilatero.

Nella condizione di equilibrio, con la molla schiacciata, la variazione di lunghezza della molla sarà

$$\Delta l = l - l \sin \alpha$$

Quindi la condizione di equilibrio diventa

$$kl \cdot 2 \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha \right) \cdot \cos \alpha = mg \cdot \sin \alpha$$

Questa è l'equazione risoltrice tramite la quale è possibile valutare la soluzione per α

Problema di: Dinamica - D0031

Testo [D0031] [2★ 2🕒 1a📖]

In una giostra dei seggiolini tenuti da una catena si muovono di moto circolare uniforme in orizzontale con frequenza $\nu = 0,25 \text{ Hz}$ descrivendo un cerchio di raggio $r = 3 \text{ m}$. Una persona seduta nel seggiolino ha una massa $m = 70 \text{ kg}$. Quanta forza deve fare la catena per sorreggere il seggiolino?

Spiegazione L'oggetto si muove di moto circolare uniforme, quindi la forza di gravità sommata alla forza esercitata dalla catena danno la forza centripeta che fa muovere il seggiolino di moto circolare. Nel sistema di riferimento della persona sul seggiolino, egli sente la forza di gravità, la forza esercitata dalla catena e la forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il problema si risolverà imponendo un'equilibrio tra queste tre forze. Il risultato dell'esercizio rappresenta di fatto il peso della persona.

Svolgimento Imponendo l'equilibrio tra forza centrifuga, forza di gravità e reazione vincolare della catena avremo

$$\vec{R}_v = \vec{F}_g + \vec{F}_c$$

La forza di gravità è verticale verso il basso; la forza centripeta è orizzontale verso l'esterno della curva. La reazione vincolare è sulla stessa direzione della somma delle due precedenti forze, ma ha verso opposto. Per passare dall'equazione vettoriale a quella scalare dovremo utilizzare il teorema di pitagora dove il modulo di $\vec{R}_v$ è l'ipotenusa di un triangolo i cui cateti sono uguali ai moduli di $\vec{F}_g$ e $\vec{F}_c$; per cui

$$R_v = \sqrt{F_g^2 + F_c^2} = \sqrt{m^2 g^2 + m^2 \cdot \omega^4 r^2}$$

sapendo che nel moto circolare uniforme

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu = 1.57 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

possiamo quindi calcolare la reazione vincolare della catena

$$R_v = m \cdot \sqrt{g^2 + \omega^4 r^2} = 70 \text{ kg} \cdot \sqrt{96,04 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4} + 54,68 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^4}} = 859,4 \text{ N}$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - CD0004**Testo** [CD0004] [2★ 3🕒 1a📖]

Faccio roteare un mazzo di chiavi attaccato ad un cordino, con una frequenza $\nu = 4 \text{ Hz}$, in modo che il cordino descriva la superficie di un cilindro. Il raggio del cerchio percorso dalle chiavi, su un piano orizzontale, è $r = 0,2 \text{ m}$; a quale velocità angolare ruotano le chiavi? Se le chiavi hanno una massa $m = 0,1 \text{ kg}$, quanto vale la tensione il cordino?

Spiegazione Il mazzo di chiavi è sottoposto a due accelerazioni, quella centrifuga e quella di gravità, perpendicolari tra loro.

Svolgimento La velocità angolare del mazzo di chiavi è

$$\omega = 2\pi\nu = 2 \cdot 3,14 \cdot 4 \text{ Hz} = 25,13 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La forza centrifuga vale

$$F_c = m\omega^2 r = 0,1 \text{ kg} \cdot (25,13)^2 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \text{ m} = 12,63 \text{ N}$$

La forza di gravità vale

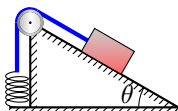
$$F_g = mg = 0,1 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,98 \text{ N}$$

La forza totale, pari alla tensione del cordino, sarà quindi

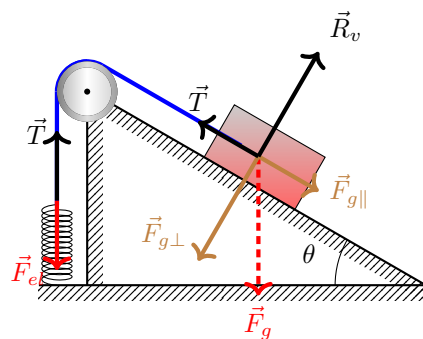
$$F_{tot} = T = \sqrt{F_c^2 + F_g^2} = \sqrt{(12,63 \text{ N})^2 + (0,98 \text{ N})^2} = 12,67 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0048**Testo** [D0048] [2★ 3🕒 2a📖]

Un oggetto di massa $m = 2 \text{ kg}$ è posizionato fermo su di un piano inclinato di $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale, senza attrito, attaccato con un cavo inestensibile ad una molla di costante elastica $k = 5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Di quanto si è allungata la molla?



Spiegazione Il peso è soggetto alla forza di gravità verticale verso il basso. Per analizzare lo schema delle forze è utile scomporre tale forza lungo le linee parallela e perpendicolare al piano inclinato. Il piano inclinato esercita sul peso una reazione vincolare uguale alla forza premente $\vec{F}_{g\perp}$. A spingere lungo il piano rimane la relativa componente della forza di gravità $\vec{F}_{g\parallel}$. La molla viene tirata verso l'alto dal filo, e quindi lei tira verso il basso.



significativi: il baricentro dell'oggetto e la punta della molla. Avremo quindi che:

$$\begin{cases} F_{g\parallel} - T = 0 \\ R_v - F_{g\perp} = 0 \\ F_{el} - T = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_g \cdot \sin \theta - T = 0 \\ R_v - F_g \cdot \cos \theta = 0 \\ F_{el} - T = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene che

$$F_{el} = m \cdot g \cdot \sin \theta$$

$$\Delta l = \frac{m \cdot g \cdot \sin \theta}{k} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin(30^\circ)}{5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 1,96 \text{ cm}$$

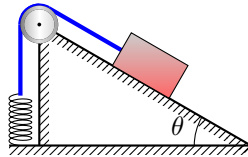
Traccia di lavoro: prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.

Per ogni oggetto presente nel problema: disegna tutte le forze che agiscono su di esso, disegna l'accelerazione che subisce, infine applica ad ognuno di essi il secondo principio della dinamica. Otterrai il sistema di equazioni che risolve il problema.

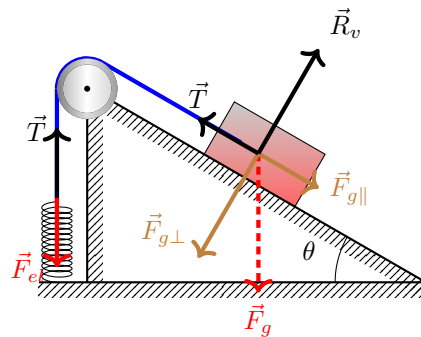
Svolgimento Dal momento che il sistema è fermo, allora la somma delle forze deve essere nulla. L'equazione dell'equilibrio deve essere applicata ad entrambi i punti

Problema di: Dinamica - D0049**Testo** [D0049] [4★ 5🕒 3a📖]

Un oggetto di massa $m = 2\text{ kg}$ è fermo su un piano inclinato, con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0,1$, inclinato di un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. L'oggetto è bloccato tramite un cavo inestensibile ad una molla di costante elastica $k = 5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Di quanto si allunga la molla?



Spiegazione Il peso è soggetto alla forza di gravità verticale verso il basso. Per analizzare lo schema delle forze è utile scomporre tale forza lungo le linee parallela e perpendicolare al piano inclinato. Il piano inclinato esercita sul peso una reazione vincolare uguale alla forza premente $\vec{F}_{g\perp}$. A spingere lungo il piano rimane la relativa componente della forza di gravità $\vec{F}_{g\parallel}$. La molla viene tirata verso l'alto dal filo, e quindi lei tira verso il basso. La presenza della forza di attrito statico complica le cose. L'attrito statico è una reazione vincolare che si adatta alla forza che tende a spostare l'oggetto, cercando di annullarla. **Nello schema in figura non è stata rappresentata la forza di attrito statico.** In questo esercizio, se la forza che spinge l'oggetto supera il valore della forza di attrito statico $F_{attr} = \mu_s \cdot \vec{F}_{g\perp}$ allora l'oggetto comincerà a muoversi.



significativi: il baricentro dell'oggetto e la punta della molla. Avremo quindi che:

$$\begin{cases} -\mu_s \cdot F_{g\perp} \leq F_{g\parallel} - T \leq \mu_s \cdot F_{g\perp} \\ R_v - F_{g\perp} = 0 \\ F_{el} - T = 0 \end{cases}$$

Risolvendo ora il sistema si ottiene che

$$\mu_s \cdot F_{g\perp} + F_{g\parallel} \geq F_{el} \geq -\mu_s \cdot F_{g\perp} + F_{g\parallel}$$

$$mg [\mu_s \cos(\theta) + \sin(\theta)] \geq F_{el} \geq mg [-\mu_s \cos(\theta) + \sin(\theta)]$$

$$11,5\text{ N} \geq F_{el} \geq 8,1\text{ N}$$

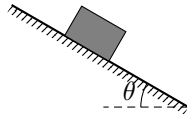
Si ottiene quindi una condizione di equilibrio per un intervallo di posizioni dell'oggetto, corrispondenti ad un allungamento della molla

$$2,3\text{ cm} \geq \Delta l \geq 1,2\text{ cm}$$

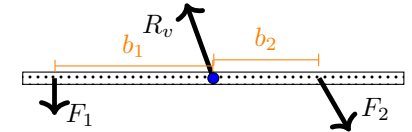
Svolgimento Dal momento che il sistema è fermo, allora la somma delle forze deve essere nulla. L'equazione dell'equilibrio deve essere applicata ad entrambi i punti

Problema di: Dinamica - D0119**Testo** [D0119] [2★ 3🕒 1a📖]

Un corpo di massa $m = 20\text{ kg}$ è fermo su di un piano inclinato lungo $\ell = 2,7\text{ m}$ ed alto $h = 0,9\text{ m}$. Disegna il diagramma delle forze e calcola la reazione vincolare del piano. Calcola infine la forza di attrito. Un piano con coefficiente di attrito $\mu_s = 0.3$ riesce a generare tanto attrito?

**Spiegazione** [...]**Svolgimento** [...]**6.5 Equilibrio rotazionale e traslazionale****Problema di: Dinamica - D0010****Testo** [D0010] [2¾★ 3🕒 1a📖]

Una sbarra orizzontale è tenuta ferma da un chiodo nel suo centro. Sul lato sinistro, ad una distanza $b_1 = 18\text{ cm}$ viene applicata una forza F_1 verso il basso. Sul lato destro, ad una distanza $b_2 = 12\text{ cm}$ viene applicata una forza $F_2 = 100\text{ N}$ verso il basso ma inclinata di $\alpha = 30^\circ$ rispetto alla verticale. Quanto vale la forza F_1 per tenere ferma la sbarra? Quanto le due componenti della reazione vincolare del chiodo? Quanto vale la reazione vincolare del chiodo?

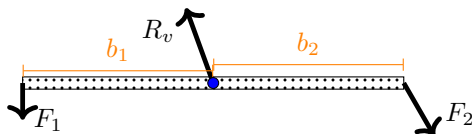


Spiegazione Questo problema è un problema di equilibrio rotazionale, in quanto le forze in questione non sono posizionate nel punto di rotazione della sbarra. La sbarra è ferma e quindi non ruota. Il problema si risolve imponendo l'equilibrio rotazionale e traslazionale. Visto che una delle forze è in diagonale, dovrà prima essere scomposta nelle sue due componenti. L'equilibrio traslazionale sarà quindi da impostare due volte: una prima volta per la verticale ed una seconda volta per l'orizzontale.

Svolgimento [...]

Problema di: Dinamica - D0010a**Testo** [D0010a] [2¼★ 3🕒 1a📖]

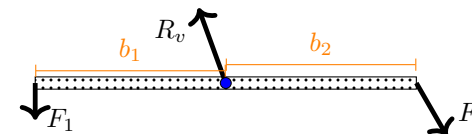
Una sbarra orizzontale è tenuta ferma da un chiodo nel suo centro. All'estremo sinistro viene applicata una forza F_1 verso il basso. All'estremo destro viene applicata una forza $F_2 = 100\text{ N}$ verso il basso ma inclinata di $\alpha = 30^\circ$ rispetto alla verticale. Quanto vale la forza F_1 per tenere ferma la sbarra? Quanto le due componenti della reazione vincolare del chiodo? Quanto vale la reazione vincolare del chiodo?



Spiegazione Questo problema è un problema di equilibrio rotazionale, in quanto le forze in questione non sono posizionate nel punto di rotazione della sbarra. La sbarra è ferma e quindi non ruota. Il problema si risolve imponendo l'equilibrio rotazionale e traslazionale. Visto che una delle forze è in diagonale, dovrà prima essere scomposta nelle sue due componenti. L'equilibrio traslazionale sarà quindi da impostare due volte: una prima volta per la verticale ed una seconda volta per l'orizzontale.

Svolgimento [...]**Problema di: Dinamica - D0010a****Testo** [D0010a] [2¼★ 3🕒 1a📖]

Una sbarra orizzontale è tenuta ferma da un chiodo nel suo centro. All'estremo sinistro viene applicata una forza F_1 verso il basso. All'estremo destro viene applicata una forza $F_2 = 100\text{ N}$ verso il basso ma inclinata di $\alpha = 30^\circ$ rispetto alla verticale. Quanto vale la forza F_1 per tenere ferma la sbarra? Quanto le due componenti della reazione vincolare del chiodo? Quanto vale la reazione vincolare del chiodo?



Spiegazione Questo problema è un problema di equilibrio rotazionale, in quanto le forze in questione non sono posizionate nel punto di rotazione della sbarra. La sbarra è ferma e quindi non ruota. Il problema si risolve imponendo l'equilibrio rotazionale e traslazionale. Visto che una delle forze è in diagonale, dovrà prima essere scomposta nelle sue due componenti. L'equilibrio traslazionale sarà quindi da impostare due volte: una prima volta per la verticale ed una seconda volta per l'orizzontale.

Svolgimento [...]

Problema di: Dinamica - D0084**Testo** [D0084] [1★ 2🕒 1a📖]

Su di una sbarra verticale, che come punto fisso la sua estremità inferiore, viene applicata orizzontalmente una forza $F_1 = 10\text{ N}$ verso destra ad un'altezza $h_1 = 2\text{ m}$. Una seconda forza orizzontale $F_2 = 30\text{ N}$ viene applicata verso sinistra ad un'altezza $h_2 = 70\text{ cm}$. Quanto vale il momento della prima forza? Quanto vale il momento della seconda forza? Quanto vale il momento totale applicato alla sbarra?

Spiegazione In questo esercizio si chiede semplicemente di indicare modulo e verso dei due momenti della forza che agiscono sulla sbarra verticale. I due momenti sono opposti e quindi tendono a cancellarsi; nel momento in cui ne calcoliamo la somma ne dobbiamo tenere conto.

Svolgimento La prima forza genera un momento orario

$$M_{1o} = F_1 \cdot h_1 = 20\text{ Nm}$$

La seconda forza genera un momento antiorario

$$M_{1a} = F_2 \cdot h_2 = 21\text{ Nm}$$

La somma dei due momenti sarà quindi un momento antiorario

$$M_{tot-a} = M_{1a} - M_{1o} = 1\text{ Nm}$$

Problema di: Dinamica - D0087**Testo** [D0087] [2★ 3🕒 1a📖]

Una sbarra orizzontale lunga $L = 2\text{ m}$ è schiacciata da due forze verticali verso il basso $F_1 = F_2 = 100\text{ N}$ poste ai suoi estremi ed è sorretta da una forza verticale verso l'alto F_3 posta a $d = 40\text{ cm}$ dal centro della sbarra. Quanto deve valere F_3 per avere equilibrio traslazionale? Visto che la sbarra non è in equilibrio rotazionale, quanto vale il momento totale delle tre forze rispetto al centro della sbarra?

Spiegazione Un problema di dinamica nel quale dobbiamo imporre la condizione di equilibrio traslazionale. Fatto questo le forze sono fissate, e i momenti delle forze pure. Quello che capiterà è che la somma di tutti i momenti non sarà zero.

Svolgimento Per avere equilibrio traslazionale si impone che la somma delle forze sia nulla:

$$F_3 = F_1 + F_2 = 200\text{ N}$$

Ogni forza genera un momento torcente. Consideriamo il centro della sbarra come punto di rotazione. I momenti delle tre forze sono:

$$M_1 = F_1 \cdot \frac{L}{2} = 100\text{ Nm} \quad \text{orario}$$

$$M_2 = F_2 \cdot \frac{L}{2} = 100\text{ Nm} \quad \text{antiorario}$$

Ipotizziamo, visto che il testo non lo specifica, che la forza F_3 sia sulla sinistra rispetto al centro della sbarra

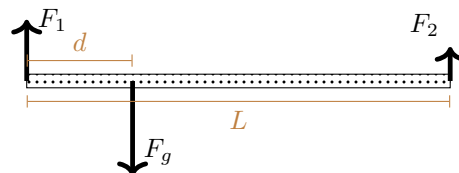
$$M_3 = F_3 \cdot d = 80\text{ Nm} \quad \text{orario}$$

e quindi

$$M_{tot} = 100\text{ Nm} + 80\text{ Nm} - 100\text{ Nm} = +80\text{ Nm}$$

Problema di: Dinamica - D0009**Testo** [D0009] [3★ 3🕒 1a📖]

Due persone stanno sollevando una trave di forma irregolare, di massa $m = 50 \text{ kg}$ e lunga $L = 2 \text{ m}$ tenendola per i suoi estremi. Il baricentro della trave si trova a $d = 70 \text{ cm}$ da uno degli estremi della trave stessa. Quanto valgono le forze fatte dalle due persone?



Spiegazione Le forze che le due persone devono fare servono per tenere la sbarra in equilibrio rotazionale e traslazionale. Eseguito uno schema della situazione, la soluzione del problema si ottiene imponendo due condizioni: la somma di tutte le forze è zero, e la somma di tutti i momenti è zero. In particolare per la seconda equazione, visto che la sbarra è ferma, possiamo scegliere come punto di rotazione quello che preferiamo; la scelta più comoda sarà di considerare come punto di rotazione uno degli estremi della sbarra.

Svolgimento Impostiamo la condizione di equilibrio rotazionale, scegliendo come punto di rotazione il punto di applicazione della forza F_1 , quella più vicina al baricentro della trave

$$M_2 = M_g$$

$$F_2 L = mgd$$

$$F_2 = \frac{mgd}{L} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,7 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 171,5 \text{ N}$$

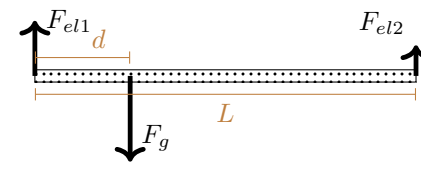
Impostiamo la condizione di equilibrio traslazionale

$$F_1 + F_2 = mg$$

$$F_1 = mg - F_2 = 50 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 171,5 \text{ N} = 318,5 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0012**Testo** [D0012] [3★ 3🕒 1a📖]

Una sbarra lunga $L = 2 \text{ m}$, il cui baricentro è a $d = 50 \text{ cm}$ da uno degli estremi, è appesa ai due estremi a due molle, allungatesi entrambe di $\Delta l = 6 \text{ cm}$. La prima molla ha costante elastica $k_1 = 1000 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. Calcola la costante elastica dell'altra molla e la massa della sbarra.



Spiegazione Questo è un problema di equilibrio. Visto che la sbarra è ferma, la somma delle forze è zero e la somma dei momenti è zero; queste due condizioni permetteranno di risolvere il problema.

Svolgimento Cominciamo con l'imporre la condizione di equilibrio rotazionale; consideriamo il baricentro della sbarra come punto di rotazione.

$$F_2 b_2 = F_1 b_1$$

Dove F_1 e F_2 sono le forze esercitate dalle due molle e b_1 e b_2 sono i rispettivi bracci relativi al baricentro della sbarra.

$$F_2 = \frac{F_1 b_1}{b_2} = \frac{k_1 \Delta l \cdot d}{L - d} = \frac{1000 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 0,5 \text{ m}}{1,5 \text{ m}} = 2000 \text{ N}$$

$$k_2 = \frac{F_2}{\Delta l} = \frac{2000 \text{ N}}{6 \text{ cm}} = 333,3 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

Adesso imponiamo la condizione di equilibrio traslazionale (somma delle forze uguale a zero)

$$F_g = F_1 + F_2$$

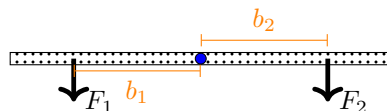
$$mg = F_1 + F_2$$

$$mg = k_1 \Delta l + k_2 \Delta l$$

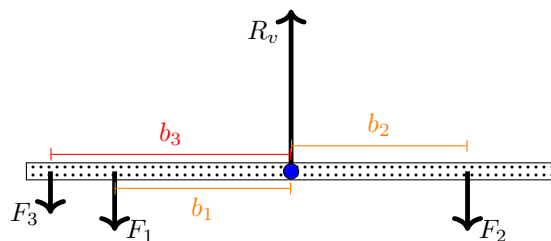
$$m = \frac{k_1 \Delta l + k_2 \Delta l}{g} = \frac{6000 \text{ N} + 2000 \text{ N}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 816,3 \text{ kg}$$

Problema di: Dinamica - D0016**Testo** [D0016] [2½★ 5🔧 1a📖]

Una sbarra orizzontale di massa trascurabile è inchiodata nel suo centro. Due forze $F_1 = F_2 = 20\text{ N}$ vengono applicate alla sbarra verso il basso rispettivamente alla distanza $b_1 = 20\text{ cm}$ a sinistra e $b_2 = 30\text{ cm}$ a destra del centro. Dove devo applicare una forza $F_3 = 2\text{ N}$ verso il basso per ottenere equilibrio rotazionale? Quanto vale e verso dove è diretta la reazione vincolare del chiodo?



Spiegazione In questo problema abbiamo una sbarra in equilibrio sotto l'azione di quattro forze. La Reazione vincolare del chiodo impone l'equilibrio traslazionale, per cui la somma delle forze è zero. Le altre tre forze sono tali da ottenere l'equilibrio rotazionale, per cui la somma dei momenti è zero. Imponendo queste due condizioni otteniamo le risposte alle domande del problema.



Svolgimento La reazione vincolare del chiodo deve essere rivolta verso l'alto, in quanto tutte le altre tre forze sono rivolte verso il basso.

$$R_v = F_1 + F_2 + F_3 = 42\text{ N}$$

Il momento della forza F_1 è

$$M_1 = F_1 b_1 = 20\text{ N} \cdot 20\text{ cm} = 400\text{ N cm antiorario}$$

Il momento della forza F_2 è

$$M_2 = F_2 b_2 = 20\text{ N} \cdot 30\text{ cm} = 600\text{ N cm orario}$$

Il momento della forza F_3 deve quindi essere antiorario e per questo la forza F_3 deve essere posizionata a sinistra del centro della sbarra. Dalla condizione di equilibrio rotazionale avremo

$$M_3 = M_2 - M_1$$

$$F_3 b_3 = M_2 - M_1$$

$$b_3 = \frac{M_2 - M_1}{F_3} = \frac{200\text{ N cm}}{2\text{ N}} = 100\text{ cm}$$

Esercizi concettualmente identici

1. Per sollevare un oggetto della massa $m = 150\text{ kg}$ uso una sbarra lunga $l = 2\text{ m}$. Da un lato della sbarra posiziono l'oggetto. Il fulcro della leva si trova a $r_1 = 20\text{ cm}$ da dove l'oggetto è posizionato. All'estremo opposto io applico una forza F . A quale distanza viene applicata la forza F dal fulcro? Quanto vale il momento della forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto deve valere la forza F per sollevare l'oggetto?
[$r = 180\text{ cm}$;
 $M_{F_g} = 29400\text{ N} \cdot \text{cm}$; $F = 163,3\text{ N}$]
2. Immaginate una sbarra orizzontale senza peso con un perno nel suo centro. La sbarra è libera di ruotare intorno al suo centro. Applicate sul lato destro della sbarra una forza $F_1 = 100\text{ N}$ verso il basso ad una distanza $b_1 = 20\text{ cm}$. Applicate ora una seconda forza $F_2 = 70\text{ N}$ verso il basso sul lato sinistro della sbarra ad una distanza $b_2 = 30\text{ cm}$. Quanto vale e in quale verso fa ruotare il momento della forza F_1 ? Quanto vale e in quale verso fa ruotare il momento della forza F_2 ? Quanto vale e in quale verso fa ruotare il momento totale applicato sulla sbarra?
[$M_1 = 2000\text{ N cm orario}$; $M_2 = 2100\text{ N cm antiorario}$;
 $M_t = 100\text{ N cm antiorario}$]
3. Una sbarra orizzontale senza peso con un perno nel suo centro è libera di ruotare intorno al suo centro. Rispetto al centro, sul lato destro della sbarra è applicata una forza $F_1 = 300\text{ N}$ verso il basso ad una distanza $b_1 = 10\text{ cm}$; una seconda forza $F_2 = 60\text{ N}$ è applicata verso il basso sul lato sinistro della sbarra ad una distanza $b_2 = 0,3\text{ m}$; una terza forza $F_3 = 10\text{ N}$ è applicata verso il basso sul lato destro della sbarra ad una distanza $b_3 = 4\text{ dm}$. Quanto valgono e

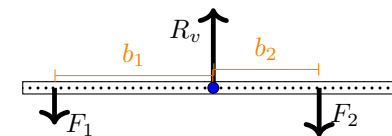
in quale verso fanno ruotare i momenti delle forze F_1 , F_2 , e F_3 ? Quanto vale e in quale verso fa ruotare il momento totale applicato sulla sbarra? Se vogliamo applicare una forza F_4 ad una distanza $b_4 = 16 \text{ cm}$ dal centro sul lato destro, per equilibrare il sistema dal punto di vista della rotazione, quanto deve valere e verso dove deve essere diretta?
 $[M_{1,or} = 3000 \text{ Ncm}; M_{2,an} = 1800 \text{ Ncm}; M_{3,or} = 400 \text{ Ncm}; M_{tot,or} = 1600 \text{ Ncm}; F_4 = 100 \text{ N verso l'alto}.]$

4. Una tavola di massa $m = 10 \text{ kg}$ e lunga $l = 180 \text{ cm}$ viene sollevata da due persone che la tengono dai bordi. Sulla tavola è appoggiato un oggetto di massa $m_1 = 5000 \text{ g}$ ad una distanza $d = 36 \text{ cm}$ dal bordo sinistro. Quale forza devono fare le due persone?
 $[F_s = 88,2 \text{ N}; F_d = 58,8 \text{ N}]$
5. un trampolino di lunghezza $l = 3 \text{ m}$ è vincolato ad un estremo da due perni distanti tra loro $d = 1 \text{ m}$. Se una persona di massa $m = 80 \text{ kg}$ si mette sulla punta del trampolino, quanto valgono le reazioni vincolari dei due perni?

Problema di: Dinamica - D0027

Testo [D0027] [2½★ 3🕒 1a📖]

Una sbarra orizzontale è tenuta ferma da un chiodo nel suo centro. Sul lato sinistro, ad una distanza $b_1 = 18 \text{ cm}$ viene applicata una forza $F_1 = 30 \text{ N}$ verso il basso. Sul lato destro, ad una distanza $b_2 = 12 \text{ cm}$ viene applicata una forza F_2 verso il basso. Quanto vale la forza F_2 per tenere ferma la sbarra? Quanto la reazione vincolare del chiodo?



Spiegazione Questo problema è un problema di equilibrio rotazionale, in quanto le forze in questione non sono posizionate nel punto di rotazione della sbarra. La sbarra è ferma e quindi non ruota. Il problema si risolve imponendo l'equilibrio rotazionale.

Svolgimento Il momento della forza $M_1 = F_1 \cdot b_1$, antiorario, deve essere uguale al momento della forza $M_2 = F_2 \cdot b_2$ che è invece orario.

$$M_2 = M_1$$

$$F_2 \cdot b_2 = F_1 \cdot b_1$$

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot b_1}{b_2} = \frac{30 \text{ N} \cdot 18 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 45 \text{ N}$$

Il chiodo impone l'equilibrio traslazionale. Quindi la somma delle forze in su equivale alla somma delle forze in giù.

$$R_v = F_1 + F_2$$

$$R_v = 75 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0106**Testo** [D0106] [2★ 4🕒 2a📖]

Un cilindro di legno ha il diametro di base lungo $d = 20\text{ cm}$ e l'altezza $h = 50\text{ cm}$. La densità del legno è $\rho = 0,6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Se lo spingo nel punto più in alto, ammesso che l'attrito con il terreno sia sufficiente a tenere fermo il bordo del cilindro, quale forza devo fare per rovesciarlo?

Spiegazione Il cilindro cadrà se non è in equilibrio rotazionale a causa delle due forze che subisce.

Svolgimento Se il cilindro cade è perché ruota intorno ad un punto della circonferenza di base. La forza di gravità genera un momento tale da tenere il cilindro in verticale. La forza da voi applicata cerca di far ruotare il cilindro nel verso opposto.

Quindi

$$F \cdot h \geq mg \frac{d}{2}$$

$$F \cdot h \geq \rho \cdot \pi r^2 h \cdot gr$$

$$F \geq \pi \rho r^3 g$$

Curiosamente, definito il materiale, la forza che devo fare non dipende dall'altezza del cilindro.

Problema di: Dinamica - D0032**Testo** [D0032] [2½★ 3🕒 1a📖]

State tenendo in mano un sasso di massa $m = 1\text{ kg}$ mentre l'avambraccio è fermo in posizione orizzontale. Il sasso si trova ad una distanza $b_1 = 30\text{ cm}$ dal gomito. Il muscolo bicipite, che esprime una forza verso l'alto, è attaccato all'avambraccio ad una distanza $b_2 = 5\text{ cm}$ dal gomito. Quanto vale la forza che deve fare il muscolo per sorreggere il sasso? Quale forza agisce sul gomito?

Spiegazione L'avambraccio del nostro problema si può modellizzare come una trave orizzontale bloccata da un perno (il gomito) su un lato, spinta verso l'alto da una forza F_2 applicata vicina al perno, e spinta verso il basso da una forza F_g applicata lontano dal perno. Visto che l'avambraccio è fermo, allora la somma delle forze e la somma dei momenti che agiscono su di esso sono nulle.

Svolgimento Indicando con R_v la forza che tiene l'avambraccio attaccato al gomito, l'equazione dell'equilibrio traslazionale è

$$F_2 = R_v + F_g$$

dove la forza di gravità sul sasso vale

$$F_g = mg = 1\text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,8\text{ N}$$

Indichiamo il gomito come punto di rotazione del sistema (nei conti che seguono ho ipotizzato di disegnare il gomito della persona sulla sinistra e la relativa mano sulla destra). La forza F_g genera un momento M_g orario; la forza F_2 genera un momento M_2 antiorario. L'equazione dell'equilibrio traslazionale è

$$M_2 = M_g$$

Quindi

$$F_2 b_2 = F_g b_1$$

$$F_2 b_2 = m g b_1$$

$$F_2 = \frac{F_g b_1}{b_2} = \frac{9,8 \text{ N} \cdot 30 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 58,8 \text{ N}$$

Riprendendo adesso la prima formula

$$R_v = F_2 - F_g = 58,8 \text{ N} - 9,8 \text{ N} = 49 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0088

Testo [D0088] [2½★ 3🕒 1a📖]

Una trave orizzontale è tenuta ferma da tre forze verticali: $F_1 = 500 \text{ N}$ posta nel vertice di sinistra verso il basso, $F_2 = 2000 \text{ N}$ posta a $r_2 = 2 \text{ m}$ dal vertice di sinistra verso il basso, ed F_3 . Determina la posizione, verso e valore di F_3 .

Spiegazione La sbarra è tenuta in equilibrio, quindi la somma delle forze è nulla ed è pure nulla la somma dei momenti delle forze. Le tre forze sono verticali; due di queste sono verso il basso, allora quella in mezzo deve essere verso l'alto.

Svolgimento La somma delle forze deve essere nulla, quindi

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2500 \text{ N}$$

La somma dei momenti deve essere nulla. Assumiamo come punto di rotazione il punto di applicazione della forza F_3 . Chiamiamo d la distanza tra la forza F_3 e la forza F_2 . Il momento di F_1 è orario e il momento di F_3 è antiorario. Quindi

$$F_1 r_2 = F_3 d$$

da cui

$$d = \frac{F_1 r_1}{F_3} = \frac{500 \text{ N} \cdot 2 \text{ m}}{2500 \text{ N}} = 40 \text{ cm}$$

Problema di: Dinamica - D0088a**Testo** [D0088a] [2½★ 3🕒 1a📖]

Una trave orizzontale di massa trascurabile, è tenuta ferma da tre forze verticali: $F_1 = 500\text{ N}$, posta nel vertice di sinistra verso l'alto; F_2 posta a $r_2 = 2\text{ m}$ dal vertice di sinistra e verso l'alto; ed $F_3 = 1500\text{ N}$. Determina la posizione di F_3 ed il valore di F_2 .

Spiegazione In questo esercizio sappiamo che la sbarra è ferma, quindi non trasla (equilibrio traslazionale) e non ruota (equilibrio rotazionale). Imponendo queste due condizioni si ottiene la soluzione dell'esercizio.

Svolgimento Consideriamo il vertice di sinistra come il punto di rotazione della sbarra. Sappiamo che F_2 genera un momento antiorario e che F_1 genera un momento nullo. Quindi F_3 deve introdurre un momento orario e deve quindi in questo caso essere rivolta verso il basso.

La somma delle forze deve essere nulla, quindi posso scrivere

$$F_1 + F_2 = F_3$$

da cui

$$F_2 = 1000\text{ N}$$

Il momento totale sulla sbarra deve essere nullo, quindi

$$M_2 = M_3$$

$$F_2 b_2 = F_3 b_3$$

da cui

$$b_3 = \frac{F_2 b_2}{F_3} = \frac{4}{3}\text{ m}$$

Problema di: Dinamica - D0088b**Testo** [D0088b] [2½★ 3🕒 1a📖]

Una trave orizzontale di massa trascurabile, lunga $d = 3\text{ m}$ è tenuta ferma da tre forze verticali: $F_1 = 500\text{ N}$, posta nel vertice di sinistra e verso l'alto, F_2 posta nel vertice di destra e verso l'alto, ed $F_3 = 1500\text{ N}$. Determina la posizione di F_3 ed il valore di F_2 .

Spiegazione In questo esercizio sappiamo che la sbarra è ferma, quindi non trasla (equilibrio traslazionale) e non ruota (equilibrio rotazionale). Imponendo queste due condizioni si ottiene la soluzione dell'esercizio.

Svolgimento La somma delle forze deve essere nulla, quindi la forza F_3 deve necessariamente essere verso il basso. Avremo che la condizione di equilibrio sarà

$$F_1 + F_2 = F_3$$

da cui

$$F_2 = F_3 - F_1 = 1000\text{ N}$$

Consideriamo come punto di rotazione il vertice di sinistra della sbarra. Chiamiamo x la distanza della forza F_3 dal punto di rotazione. Il momento della forza F_1 è nullo; quello della forza F_2 è antiorario; quello della forza F_3 è orario. Quindi

$$F_2 d = F_3 x$$

$$x = \frac{F_2 d}{F_3} = 2\text{ m}$$

Problema di: Dinamica - D0088c**Testo** [D0088c] [2½★ 3🕒 1a📖]

Una trave orizzontale lunga $L = 2\text{ m}$ è spinta da due forze verticali verso il basso: $F_1 = 1500\text{ N}$, posta nel vertice di sinistra, $F_2 = 2000\text{ N}$ posta nel vertice di destra. A che distanza dal vertice di sinistra metteresti un chiodo per tenerla ferma? Quale forza farebbe il chiodo?

Spiegazione In questo esercizio sappiamo che la sbarra è ferma, quindi non trasla (equilibrio traslazionale) e non ruota (equilibrio rotazionale). Imponendo queste due condizioni si ottiene la soluzione dell'esercizio.

Svolgimento La somma delle forze deve essere nulla, quindi la reazione vincolare del chiodo R_v deve necessariamente essere verso l'alto. Avremo che la condizione di equilibrio sarà

$$R_v = F_1 + F_2 = 3500\text{ N}$$

Consideriamo come punto di rotazione il vertice di sinistra della sbarra. Chiamiamo x la distanza del chiodo dal punto di rotazione. Il momento della forza F_1 è nullo; quello della forza F_2 è antiorario; quello della forza R_v è orario. Quindi

$$F_2 L = R_v x$$

$$x = \frac{F_2 L}{R_v} = \frac{8}{7}\text{ m}$$

Problema di: Dinamica - D0088d**Testo** [D0088d] [2½★ 3🕒 1a📖]

Una trave orizzontale lunga $L = 2\text{ m}$ è tenuta ferma da due chiodi messi alle estremità. Una forza verticale verso il basso $F = 100\text{ N}$, posta a $d = 50\text{ cm}$ dal chiodo a sinistra, la spinge verso il basso. Calcola la forza che stanno facendo i due chiodi.

Spiegazione In questo esercizio sappiamo che la sbarra è ferma, quindi non trasla (equilibrio traslazionale) e non ruota (equilibrio rotazionale). Imponendo queste due condizioni si ottiene la soluzione dell'esercizio.

Svolgimento Per imporre l'equilibrio traslazionale possiamo scrivere

$$R_{v1} + R_{v2} = F$$

Sciegliendo il chiodo di sinistra come punto di rotazione possiamo scrivere

$$F d = R_{v2} L$$

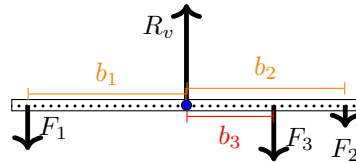
$$R_{v2} = 25\text{ N}$$

Con la prima equazione possiamo scrivere adesso

$$R_{v1} = F - R_{v2} = 75\text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0007**Testo** [D0007] [3★ 5🕒 1a📖]

Una sbarra orizzontale, libera di ruotare intorno ad un perno centrale, è tenuta ferma da tre forze come mostrato in figura: $F_1 = 30\text{ N}$, $F_2 = 10\text{ N}$ ed $F_3 = 40\text{ N}$, poste rispettivamente a distanza $b_1 = 30\text{ cm}$, $b_2 = 30\text{ cm}$ e b_3 dal perno. Calcola la distanza b_3 e la reazione vincolare R_v del perno.



Spiegazione In questo esercizio abbiamo una sbarra sottoposta complessivamente a quattro forze. Visto che la sbarra è ferma avremo che la somma di tutte le forze che agiscono sulla sbarra è nulla, e la somma di tutti i momenti che agiscono sulla sbarra è nulla.

Traccia di lavoro: *prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.*

Imponi l'equilibrio traslazionale; scegli un punto di rotazione; per ogni forza scrivi il relativo momento della forza ed infine imponi l'equilibrio rotazionale. Otterrai un sistema di due equazioni la cui soluzione è soluzione del problema.

Svolgimento Cominciamo con l'affermare che la somma di tutte le forze è zero; la somma delle forze verso l'alto deve quindi essere uguale alla somma delle forze verso il basso.

$$R_v = F_1 + F_2 + F_3$$

Per cui

$$R_v = 80\text{ N}$$

Adesso affermiamo che la somma di tutti i momenti è zero; la somma dei momenti orari deve essere uguale alla somma dei momenti antiorari. Consideriamo il perno come punto di rotazione del sistema e di conseguenza togliamo dall'equazione il momento della reazione vincolare.

$$M_1 = M_2 + M_3$$

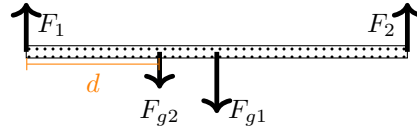
$$F_1 b_1 = F_2 b_2 + F_3 b_3$$

$$F_1 b_1 - F_2 b_2 = F_3 b_3$$

$$b_3 = \frac{F_1 b_1 - F_2 b_2}{F_3} = \frac{900\text{ N cm} - 300\text{ N cm}}{40\text{ N}} = 15\text{ cm}$$

Problema di: Dinamica - D0016a**Testo** [D0016a] [3★ 4🕒 1a📖]

Una trave di legno di massa $m_1 = 2\text{ kg}$ e di lunghezza $L = 1\text{ m}$ è sorretta ai bordi da due persone. Sulla trave si trova un oggetto di massa $m_2 = 1\text{ kg}$ ad una distanza $d = 20\text{ cm}$ dal bordo sinistro della trave. Quanto valgono le forze che fanno le due persone?



Spiegazione In questo problema abbiamo una sbarra in equilibrio sotto l'azione di quattro forze. La sbarra è ferma per cui la somma delle forze è zero e la somma dei momenti è zero. Imponendo queste due condizioni otteniamo le risposte alle domande del problema.

Svolgimento Imponendo l'equilibrio traslazionale avremo

$$F_1 + F_2 = F_{g1} + F_{g2}$$

Assumendo come punto di rotazione il punto di applicazione della forza F_1 che si trova sull'estremo sinistro della sbarra, avremo che $M_1 = 0$, $M_{g1} = \text{orario}$, $M_{g2} = \text{orario}$, $M_2 = \text{antiorario}$, e quindi

$$0 + M_g + M_{g2} = M_2$$

$$F_{g1} \cdot \frac{L}{2} + F_{g2} \cdot d = F_2 \cdot L$$

da cui si ricava F_2

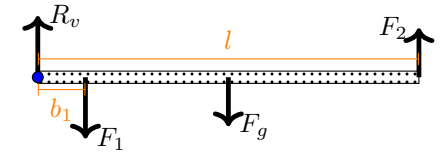
$$F_2 = \frac{m_1 g \frac{L}{2} + m_2 g d}{L} = m_1 g \frac{1}{2} + m_2 g \frac{d}{L} = 11,76\text{ N}$$

Calcolata F_2 possiamo adesso calcolare F_1 dalla prima formula scritta:

$$F_1 = m_1 g + m_2 g - F_2 = 17,64\text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0016b**Testo** [D0016b] [3★ 4🕒 1a📖]

Una trave orizzontale di massa $m = 10\text{ kg}$ e lunga $l = 200\text{ cm}$ è libera di ruotare attorno ad un perno fisso posto nella sua estremità sinistra. La trave è tenuta ferma da una forza $F_1 = 100\text{ N}$ posta ad una distanza $b_1 = 30\text{ cm}$ dal perno ed una forza F_2 applicata al fondo della trave. Calcola i valori della forza F_2 e della reazione vincolare.



Spiegazione La trave in questione è ferma, quindi l'esercizio si risolve imponendo sia l'equilibrio traslazionale che quello rotazionale. Sulla trave agiscono quattro forze: la forza di gravità verso il basso, la forza F_1 verso il basso, la forza F_2 verso l'alto e la reazione vincolare del chiodo verso l'alto.

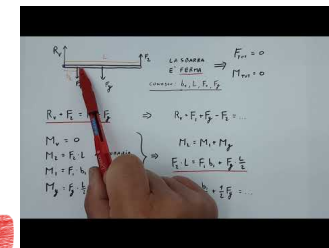
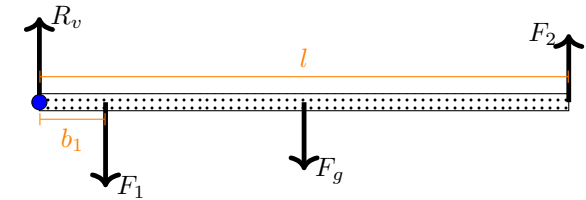


Fig. 6.2: Guarda il video youtu.be/EDB5uP7azEQ

Svolgimento Cominciamo con l'equilibrio rotazionale e analizziamo il verso di tutti i momenti delle forze presenti. Consideriamo il chiodo come il punto di rotazione della sbarra. Le forze F_1 ed F_2 generano momenti M_1 ed M_2 ; la forza di gravità

$F_g = mg = 98 \text{ N}$ genera un momento M_g ; la reazione vincolare R_v non genera alcun momento in quanto è applicata nel punto di rotazione.

$$M_{1-\text{orario}} = F_1 \cdot b_1 = 3000 \text{ Ncm}$$

$$M_{g-\text{orario}} = mg \frac{l}{2} = 9800 \text{ Ncm}$$

Imponendo la condizione di equilibrio rotazionale abbiamo:

$$M_{2-\text{antiorario}} = M_1 + M_g = 12800 \text{ Ncm}$$

$$F_2 = \frac{M_2}{l} = 64 \text{ N}$$

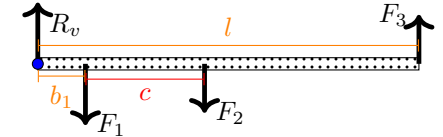
Dove la forza F_2 deve essere verso l'alto. la condizione di equilibrio traslazionale è

$$R_v = F_1 + F_g - F_2 = 134 \text{ N}$$

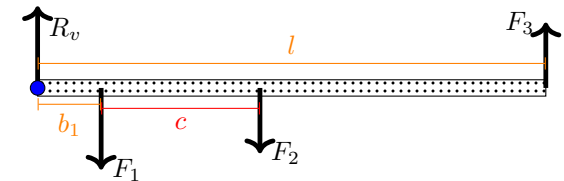
Problema di: Dinamica - D0016c

Testo [D0016c] [3★ 4🕒 1a📖]

Una trave orizzontale lunga $l = 2 \text{ m}$ è libera di ruotare attorno ad un perno fisso posto nella sua estremità sinistra. La trave viene tirata verso il basso da una forza $F_1 = 100 \text{ N}$ posta ad una distanza $b_1 = 30 \text{ cm}$ dal perno e da una forza $F_2 = 200 \text{ N}$ posta ad una distanza $c = 40 \text{ cm}$ dalla prima forza. Calcola la forza F_3 da applicare al fondo della trave per equilibrarla e non farla ruotare, e la reazione vincolare del chiodo.



Spiegazione La trave in questione è ferma e non deve ruotare, quindi l'esercizio si risolve imponendo l'equilibrio rotazionale. Sulla trave agiscono quattro forze: la forza F_1 verso il basso, la forza F_2 verso il basso, la forza F_3 verso l'alto e la reazione vincolare del chiodo verso l'alto.



Svolgimento Cominciamo con l'equilibrio traslazionale e analizziamo il verso di tutti i momenti delle forze presenti. Consideriamo il chiodo come il punto di rotazione della sbarra. Le forze F_1 ed F_2 generano momenti M_1 ed M_2 ; la forza di gravità $F_g = mg = 98 \text{ N}$ genera un momento M_g ; la reazione vincolare R_v non genera alcun momento in quanto è applicata nel punto di rotazione.

$$M_{1-\text{orario}} = F_1 \cdot b_1 = 100 \text{ N} \cdot 30 \text{ cm} = 3000 \text{ N cm}$$

$$M_{2-\text{orario}} = F_2 \cdot b_2 = F_2 \cdot (c + b_1) = 200 \text{ N} \cdot 70 \text{ cm} = 14000 \text{ N cm}$$

Imponendo la condizione di equilibrio rotazionale abbiamo:

$$M_{3-\text{antiorario}} = M_1 + M_2 = 17000 \text{ N cm}$$

$$F_3 = \frac{M_3}{l} = \frac{17000 \text{ N cm}}{200 \text{ cm}} = 85 \text{ N}$$

La reazione vincolare risulta quindi essere

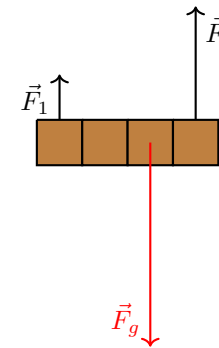
$$R_v = F_1 + F_2 - F_3 = 215 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0026

Testo [D0026] [3★ 4🕒 1a📖]

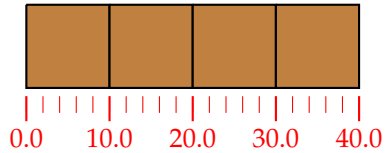
Una sbarra orizzontale è realizzata unendo quattro cubi di lato $l = 10 \text{ cm}$ e massa rispettivamente $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$, $m_3 = 3 \text{ kg}$, $m_4 = 4 \text{ kg}$. La sbarra è sorretta da due fili attaccati nel centro del primo e del quarto cubo. Calcola il baricentro della sbarra e le forze F_1 ed F_2 che devono fare i due fili affinché la sbarra sia ferma.

Spiegazione Questo problema è un problema di equilibrio. La sbarra è ferma e quindi non trasla e non ruota. Il problema si risolve imponendo l'equilibrio traslazionale e l'equilibrio rotazionale. Una delle forze del problema è la forza di gravità che agisce sulla sbarra; il problema può essere risolto in due modi: o consideriamo quattro diverse forze di gravità applicare ognuna nel baricentro di ognuno dei quattro cubi, oppure consideriamo una sola forza di gravità applicata nel baricentro della sbarra. Lo schema dell'esercizio è il seguente:



La soluzione più facile per risolvere il problema è quella di considerare la sbarra come un solo oggetto da $m_{tot} = 10 \text{ kg}$; calcolarne la posizione del baricentro, in modo da sapere dove mettere la forza di gravità; ed infine impostare le due equazioni dell'equilibrio.

Svolgimento Cominciamo con il determinare la posizione del baricentro della trave. Mettiamo un sistema di riferimento come mostrato in figura



$$x_B = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$x_B = \frac{5 \text{ cm} \cdot 1 \text{ kg} + 15 \text{ cm} \cdot 2 \text{ kg} + 25 \text{ cm} \cdot 3 \text{ kg} + 35 \text{ cm} \cdot 4 \text{ kg}}{10 \text{ kg}} = 25 \text{ cm}$$

Stabilita la posizione del baricentro della sbarra, punto nel quale applicheremo la forza di gravità, dobbiamo ora imporre le condizioni dell'equilibrio.

La condizione di equilibrio rotazionale deve essere imposta solo dopo avere identificato il punto di rotazione rispetto al quale calcoliamo i momenti delle forze. Come punto di rotazione scegliamo il baricentro del primo cubo. La condizione di equilibrio rotazionale diventa

$$M_2 = M_g$$

$$F_2 \cdot b_2 = F_g \cdot b_g$$

$$F_2 = \frac{F_g \cdot b_g}{b_2} = \frac{m_{tot} g \cdot b_g}{b_2}$$

$$F_2 = \frac{10 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = \frac{196}{3} \text{ N}$$

La condizione di equilibrio traslazionale è

$$F_{tot} = 0$$

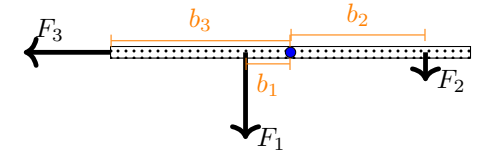
$$F_1 + F_2 = F_g$$

$$F_1 = F_g - F_2 = 10 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \frac{196}{3} \text{ N} = \frac{98}{3} \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0093

Testo [D0093] [3★ 5🕒 1a📖]

Una sbarra orizzontale di massa trascurabile è inchiodata nel suo centro libera di ruotare. Due forze $F_1 = 15 \text{ N}$ e $F_2 = 5 \text{ N}$ vengono applicate alla sbarra verso il basso. La forza F_1 è applicata alla distanza $b_1 = 20 \text{ cm}$ a sinistra del chiodo. Un terza forza $F_3 = 15 \text{ N}$ è applicata orizzontalmente alla sbarra verso sinistra. Sapendo che la sbarra è ferma, calcola la distanza dal chiodo b_2 a cui è posizionata la forza F_2 e la reazione vincolare del chiodo.



Spiegazione Se la sbarra è ferma, allora è in equilibrio traslazionale e rotazionale. Questo produrrà tre equazioni, due sulle forze ed uno sui momenti delle forze.

Svolgimento In questo esercizio abbiamo quattro forze. Due di esse, F_3 e la reazione vincolare del chiodo, generano un momento della forza nullo. Quindi dal punto di vista della rotazione possiamo scrivere

$$M_1 = M_2$$

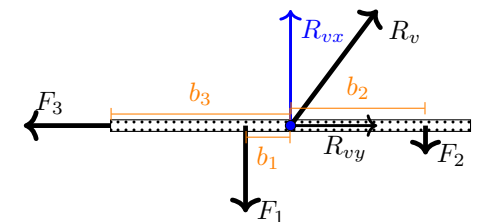
in quanto il momento di F_1 è antiorario ed il momento di F_2 è orario.

$$F_1 b_1 = F_2 b_2$$

$$b_2 = \frac{F_1}{F_2} b_1 = 60 \text{ cm}$$

La reazione vincolare deve essere scomposta nelle sue componenti orizzontale R_{vx} e verticale R_{vy} . Avremo le equazioni

$$\begin{cases} R_{vx} = F_3 = 15 \text{ N} \\ R_{vy} = F_1 + F_2 = 20 \text{ N} \end{cases}$$



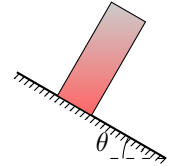
Di conseguenza il modulo di R_v sarà

$$R_v = \sqrt{R_{vx}^2 + R_{vy}^2} = 25 \text{ N}$$

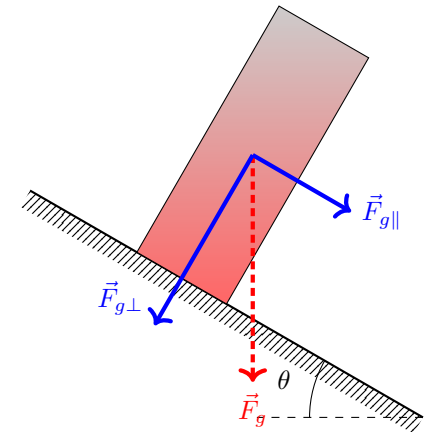
Problema di: Dinamica - D0061

Testo [D0061] [3★ 2🕒 3a📖]

Un oggetto a forma di parallelepipedo con base $b = 5 \text{ cm}$, altezza h e profondità non conosciuta, viene posizionato su di un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale, come mostrato in figura. Per quale valore dell'altezza l'oggetto si ribalterà? [Suggerimento: ribaltarsi in questo caso significa ruotare intorno allo spigolo più in basso del parallelepipedo.]



Spiegazione Cominciamo con il dire che la forza di gravità agisce nel baricentro dell'oggetto, verticale verso il basso. In questo problema dobbiamo analizzare se il parallelepipedo inizia o no una rotazione. Se lo facesse, il punto di rotazione sarebbe necessariamente lo spigolo inferiore del parallelepipedo. In tal caso la reazione vincolare del piano sarebbe necessariamente sullo spigolo di appoggio e quindi sul punto di rotazione. La reazione vincolare non contribuisce quindi alla rotazione dell'oggetto. Rimangono le due componenti della forza di gravità lungo le direzioni parallela e perpendicolare al piano inclinato. Entrambe generano due momenti, uno orario ed uno antiorario. L'oggetto inizierà la rotazione se il momento orario della forza parallela al piano risulta maggiore del momento antiorario della componente perpendicolare al piano.



Svolgimento La condizione per la rotazione dell'oggetto è

$$M_{\parallel} > M_{\perp}$$

$$F_g \sin \alpha \cdot \frac{h}{2} > F_g \cos \alpha \cdot \frac{b}{2}$$

$$h \cos \alpha > b \sin \alpha$$

L'angolo in questione è minore dell'angolo retto, quindi

$$h > b \tan \alpha$$

$$h > \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - CD0003

Testo [CD0003] [3★ 4🕒 3a📖]

Un ciclista sulla sua bicicletta ha massa complessiva $m = 60 \text{ kg}$ e nel rettilineo (con la bicicletta in posizione verticale) il suo baricentro si trova ad altezza $h = 100 \text{ cm}$ da terra. Il ciclista affronta poi una curva con velocità $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ inclinato di un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto alla verticale. Calcola il momento della forza di gravità che tende a far cadere il ciclista, ed il momento della forza centrifuga che lo mantiene in equilibrio. Calcola il raggio della curva che percorre.

Spiegazione Una bicicletta, mentre si muove in un rettilineo, è in posizione verticale. Se percorre una curva, deve inclinarsi. Guardando la bicicletta da dietro e considerando il punto di appoggio delle ruote sull'asfalto, se si muove troppo piano la bicicletta ruota in senso orario e cade; se si muove troppo veloce la bicicletta ruota in senso antiorario, si raddrizza e poi cade dalla parte opposta. La rotazione oraria che fa cadere la bici verso l'interno della curva è data dal momento della forza di gravità; la rotazione antioraria è invece data dal momento della forza centrifuga.

Svolgimento Il momento della forza di gravità vale

$$M_{F_g} = F_g \cdot h \cdot \sin(\alpha) = 60 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ m} \cdot \sin(30^\circ) = 294 \text{ Nm}$$

Per mantenere la bicicletta in equilibrio il momento della forza centrifuga deve essere uguale a quello della forza di gravità, in quanto i due momenti sono opposti.

$$M_{F_c} = 294 \text{ Nm}$$

Ma sappiamo anche che

$$M_{F_c} = F_c \cdot h \cdot \sin(\alpha)$$

da cui

$$F_c = \frac{M_{F_c}}{h \cdot \sin(\alpha)} = \frac{294 \text{ Nm}}{1 \text{ m} \cdot 0,866} = 339,5 \text{ N}$$

Visto che conosciamo la forza centrifuga e la velocità della bicicletta, allora possiamo risalire al raggio della curva

$$r = \frac{m v^2}{F_c} = \frac{60 \text{ kg} \cdot 100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{339,5 \text{ N}} = 17,7 \text{ m}$$

Problema di: Dinamica - D0089

Testo [D0089] [3½★ 4👍 3a📖]

Un frigorifero di massa $m = 40 \text{ kg}$ e largo $L = 80 \text{ cm}$ si trova su di un pavimento con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.8$ e dinamico $\mu_d = 0.7$. Qual è la massima altezza a cui è possibile applicare una forza in modo che il frigo possa strisciare sul pavimento nel verso della larghezza?

Spiegazione Per prima cosa bisogna capire perché debba esistere una massima altezza. La forza che facciamo, necessaria per spostare il frigo, rispetto allo spigolo del frigo poggiato sul pavimento genera un momento che lo fa ruotare... cioè cadere se il contributo alla rotazione della forza di gravità non controbilancia l'effetto. Serve una forza minima per poterlo spostare, quindi un'altezza massima a cui poterla applicare per mantenere la giusta condizione sul momento delle forze.

Svolgimento La forza minima da esercitare sul frigo è pari alla massima forza di attrito statico

$$F = F_{as_{max}} = \mu_s mg$$

Contemporaneamente tale forza genera un momento in funzione dell'altezza h a cui è applicata. Se la forza F è applicata sul lato sinistro del frigo verso destra, lo spigolo che stiamo considerando è quello sul lato opposto, che chiameremo spigolo C ed intorno al quale il frigo ruota in senso orario.

$$M_o = F \cdot h = \mu_s mgh$$

La forza di gravità genera un momento con verso opposto il cui braccio è pari a metà della larghezza del frigo

$$M_a = mg \cdot \frac{L}{2}$$

Se $M_o > M_a$ allora il frigo cade ruotando intorno allo spigolo C . Se $M_o \leq M_a$ allora il frigo non può cadere perché di fatto verrebbe ben premuto contro il pavimento, e la cui reazione vincolare ne annulla il momento totale.

Quindi

$$M_o \leq M_a$$

$$\mu_s m g h \leq m g \cdot \frac{L}{2}$$

$$h \leq \frac{L}{2\mu_s} = 50 \text{ cm}$$

Nell'istante in cui il frigorifero comincia a spostarsi, la forza di attrito diminuisce passando da attrito statico ad attrito dinamico. L'altezza massima a cui applicare la forza quindi aumenta a

$$h \leq \frac{L}{2\mu_d} = 57,1 \text{ cm}$$

ù

Problema di: Dinamica - D0109

Testo [D0109] [3½★ 4🕒 2a📖]

Una sbarra di lunghezza $L = 1 \text{ m}$ e massa $m = 2 \text{ kg}$ è appesa ad un chiodi in una delle sue due estremità. Agiscono sulla sbarra due forze orizzontali $F_1 = 10 \text{ N}$ ed $F_2 = 40 \text{ N}$, una delle quali posizionata all'estremità opposta rispetto al chiodo. La sbarra rimane ferma in posizione verticale. Indica la posizione dell'ultima forza ed il valore della reazione vincolare.

Spiegazione Un problema di equilibrio rotazionale e traslazionale. Non dimenticate la forza di gravità sulla sbarra. Avendo indicato la massa della sbarra il problema vi sta chiedendo di non trascurarla.

Svolgimento [...]

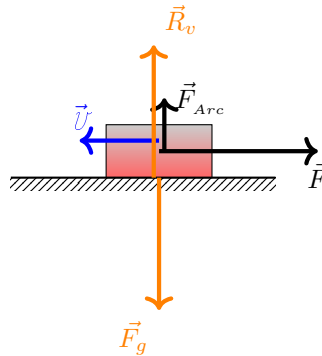
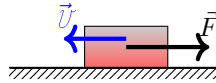
6.6 Schema di forze con accelerazione

Problema di: Dinamica - D0039a

Testo [D0039a] [3★ 3🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 2 \text{ kg}$ si muove su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,2$, spinto da una forza $F = 20 \text{ N}$ con verso opposto a quello del moto. Considera che l'oggetto ha un volume $V = 0,5 \text{ m}^3$ e che la densità dell'aria è $\rho_{aria} = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Qual è la forza totale che agisce su di esso?

Spiegazione Il peso dell'oggetto lo schiaccia contro il piano, generando una forza di attrito. In questo caso il peso dell'oggetto è pari alla forza di gravità che subisce meno la forza di Archimede nel senso opposto. Sulla linea del movimento abbiamo quindi due forze concordi: la forza esterna che spinge l'oggetto nel verso opposto a quello del moto e la forza di attrito anch'essa opposta. Sulla linea perpendicolare al moto la forza totale è invece nulla. Il pavimento fa una reazione vincolare che compensa il peso dell'oggetto.



Svolgimento

$$F_{tot} = F + F_a = F + \mu_d (F_g - \rho_{aria} V g)$$

$$F_{tot} = F + \mu_d (mg - \rho_{aria} V g)$$

$$T_{tot} = 20 \text{ N} + 0,2 \cdot \left(2 \text{ kg} - 0,5 \text{ m}^3 \cdot 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 22,65 \text{ N}$$

Problema di: Cinematica - D0054

Testo [D0054] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 2 \text{ kg}$ striscia su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 2$ spinto da una forza $F = 50 \text{ N}$ nello stesso verso del moto. Con quale accelerazione si sta muovendo?

Spiegazione In questo problema si applica il secondo principio della dinamica in quanto si conoscono le forze che agiscono sull'oggetto e si chiede di calcolarne l'accelerazione.

Svolgimento La forza che schiaccia l'oggetto contro il piano orizzontale è la forza di gravità.

$$F_g = mg = 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 19,6 \text{ N}$$

Lungo la linea del movimento agiscono quindi due forze opposte: la forza esterna che spinge l'oggetto e la forza di attrito dinamico. La forza totale che agisce sull'oggetto lungo la linea del moto è quindi

$$F_{tot} = F - F_{att} = F - \mu_d F_g = 50 \text{ N} - 39,2 \text{ N} = 10,8 \text{ N}$$

L'accelerazione con cui l'oggetto si muove è quindi

$$a = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{10,8 \text{ N}}{2 \text{ kg}} = 5,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Problema di: Cinematica - D0054a**Testo** [D0054a] [2★ 2🕒 1a📖]

Un oggetto di massa $m = 2\text{ kg}$ striscia su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 2$ spinto da una forza $F = 50\text{ N}$ nel verso opposto al moto. Con quale accelerazione si sta muovendo?

Spiegazione In questo problema si applica il secondo principio della dinamica in quanto si conoscono le forze che agiscono sull'oggetto e si chiede di calcolarne l'accelerazione.

Svolgimento La forza che schiaccia l'oggetto contro il piano orizzontale è la forza di gravità.

$$F_g = mg = 2\text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 19,6\text{ N}$$

Lungo la linea del movimento agiscono quindi due forze nello stesso verso: la forza esterna che spinge l'oggetto e la forza di attrito dinamico. La forza totale che agisce sull'oggetto lungo la linea del moto è quindi

$$F_{tot} = F + F_{att} = F + \mu_d F_g = 50\text{ N} + 39,2\text{ N} = 89,2\text{ N}$$

L'accelerazione con cui l'oggetto si muove è quindi

$$a = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{89,2\text{ N}}{2\text{ kg}} = 44,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - CD0012**Testo** [CD0012] [3★ 3🕒 1a📖]

Da una mongolfiera di massa $M = 170\text{ kg}$ cade un oggetto di massa $m = 10\text{ kg}$. Quanto sarà distante dalla mongolfiera dopo un tempo $\Delta t = 1\text{ s}$?

Spiegazione La mongolfiera inizialmente ferma lascia cadere un corpo che verrà tirato verso il basso dalla forza di gravità. Come conseguenza, ma non per il terzo principio della dinamica, anche la mongolfiera subisce una forza verso l'alto pari alla forza di gravità sull'oggetto. La forza totale, infatti, inizialmente era nulla.

I due oggetti si muovono di moto uniformemente accelerato in verso opposto.

Svolgimento L'accelerazione di gravità con cui il corpo cade e la forza di gravità che subisce sono

$$g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_g = mg = 98\text{ N}$$

Considerato che la forza sull'oggetto sarà uguale alla forza sulla mongolfiera, e considerato che adesso la massa complessiva della mongolfiera è diminuita, l'accelerazione con cui si muove la mongolfiera verso l'alto vale

$$a = \frac{F}{M - m} = \frac{98\text{ N}}{160\text{ kg}} = 0,61 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

L'accelerazione con cui la mongolfiera vede cadere l'oggetto, risulta quindi

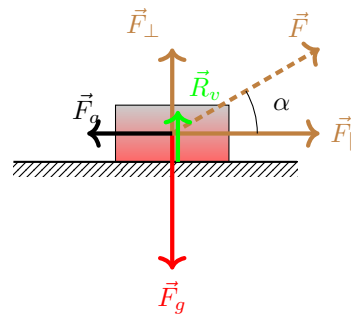
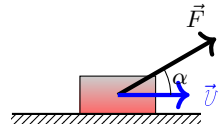
$$a_{rel} = g + a = 10,42 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Nell'intervallo di tempo trascorso i due oggetti si sono quindi allontanati di

$$\Delta S = \frac{1}{2} a_{rel} \Delta t^2 = 5,21\text{ m}$$

Problema di: Dinamica - D0055**Testo** [D0055] [3★ 3🕒 2a📖]

Un oggetto di massa $m = 2\text{ kg}$ striscia su di un piano con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$ sotto l'azione di una forza $F = 5\text{ N}$ inclinata di $\alpha = 30^\circ$ verso l'alto rispetto alla velocità dell'oggetto. Calcola l'accelerazione dell'oggetto.



Spiegazione La forza che agisce sul blocco deve essere scomposta lungo la linea del movimento e lungo la linea perpendicolare al movimento. La forza di attrito si oppone al movimento ed è determinata dalla forza con cui l'oggetto viene schiacciato contro il piano. Il piano reagisce alla forza che schiaccia con la reazione vincolare verso l'alto. La forza di attrito è proporzionale alla forza che schiaccia, quindi alla reazione vincolare del piano. Infatti, se consideriamo la linea perpendicolare al piano, su tale linea l'oggetto è fermo, e quindi la forza totale è nulla. La reazione vincolare eguaglia di conseguenza la forza che schiaccia.

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che in questo problema l'oggetto si sta muovendo nello stesso verso della componente $F_{\parallel}$ della forza, quindi la forza di attrito è ad essa opposta.

Se consideriamo la linea del movimento, avremo

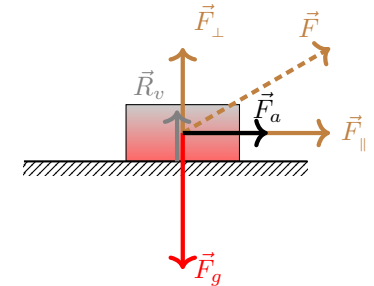
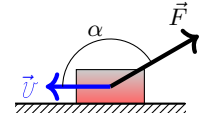
$$F_{\parallel} - \mu(mg - F_{\perp}) = ma$$

$$\frac{F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)}{m} = a$$

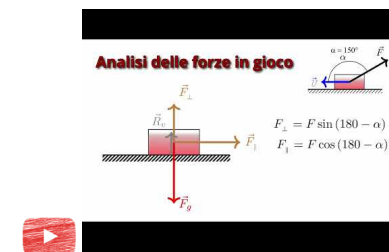
$$a = \frac{4,33\text{ N} - 0,2 \cdot (19,6\text{ N} - 2,5\text{ N})}{2\text{ kg}} = 0,455 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Problema di: Dinamica - D0055a**Testo** [D0055a] [3★ 3🕒 2a📖]

Un oggetto di massa $m = 2\text{ kg}$ striscia su di un piano con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.2$ sotto l'azione di una forza $F = 5\text{ N}$ inclinata di $\alpha = 150^\circ$ verso l'alto rispetto alla velocità dell'oggetto. Calcola l'accelerazione dell'oggetto.



Spiegazione La forza che agisce sul blocco deve essere scomposta lungo la linea del movimento e lungo la linea perpendicolare al movimento. La forza di attrito si oppone al movimento ed è determinata dalla forza con cui l'oggetto viene schiacciato contro il piano. Il piano reagisce alla forza che schiaccia con la reazione vincolare verso l'alto. La forza di attrito è proporzionale alla forza che schiaccia, quindi alla reazione vincolare del piano. Infatti, se consideriamo la linea perpendicolare al piano, su tale linea l'oggetto è fermo, e quindi la forza totale è nulla. La reazione vincolare eguaglia di conseguenza la forza che schiaccia.

Fig. 6.3: Guarda il video youtu.be/QKtAJR-15DU

Svolgimento Cominciamo con lo scomporre la forza $\vec{F}$ nelle sue due componenti $\vec{F}_{\parallel}$ e $\vec{F}_{\perp}$. Disegniamo poi la forza di attrito che è opposta alla velocità del corpo. In

questo problema l'oggetto si sta muovendo nel verso opposto alla componente $\vec{F}_{\parallel}$ della forza, quindi la forza di attrito è concorde ad essa.

Analizziamo il problema in verticale: la forza di gravità è verso il basso e verso l'alto la componente verticale della forza $\vec{F}$. La forza di gravità è maggiore e quindi la reazione del piano è verso l'alto.

Sulla linea verticale il corpo è fermo, quindi

$$R_v + F_{\perp} = mg$$

$$R_v = mg - F_{\perp}$$

Se consideriamo ora la linea del movimento, avremo

$$F_{\parallel} + \mu R_v = ma$$

$$F_{\parallel} + \mu (mg - F_{\perp}) = ma$$

$$F \cos \alpha + \mu (mg - F \sin \alpha) = ma$$

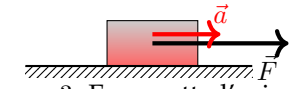
$$a = \frac{F \cos \alpha + \mu (mg - F \sin \alpha)}{m}$$

$$a = \frac{4,33 \text{ N} + 0,2 \cdot (19,6 \text{ N} - 2,5 \text{ N})}{2 \text{ kg}} = 3,875 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

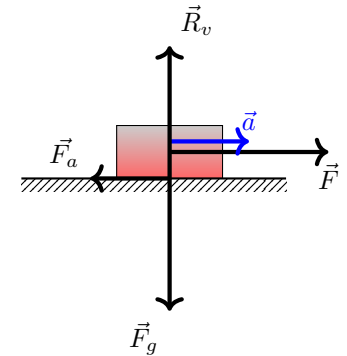
Problema di: Dinamica - D0001

Testo [D0001] [3½★ 3🕒 2a📖]

Un blocco di massa $m = 20 \text{ kg}$ è inizialmente fermo su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 3$. Esso, sotto l'azione di una forza F , comincia a muoversi con accelerazione $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra il piano orizzontale e l'oggetto?



Spiegazione In questo esercizio abbiamo un oggetto che, inizialmente fermo, comincia a muoversi sotto l'azione di una forza F . Inizialmente l'oggetto è fermo perché la forza di attrito statico impedisce all'oggetto di muoversi. In questa situazione la somma di tutte le forze è nulla $\vec{F}_{tot} = 0$. Quando la forza F è sufficientemente intensa da vincere l'attrito statico, allora l'oggetto comincia a muoversi. In quell'istante l'attrito statico diventa dinamico e quindi meno intenso. Di conseguenza la forza che spinge l'oggetto è ora maggiore della forza che lo frena, quindi la forza totale non è nulla. Visto che la forza totale non è nulla, allora l'oggetto si muove di conseguenza con una certa accelerazione.



Svolgimento Per risolvere il problema seguiamo la seguente scaletta:

1. Calcola la forza di gravità che agisce sull'oggetto.
2. Calcola la massima forza di attrito statico che può agire sull'oggetto.
3. Quanto vale la forza che fa cominciare a muovere l'oggetto?
4. Quale forza totale subisce l'oggetto mentre si muove?
5. Quanto vale la forza di attrito dinamico sull'oggetto?
6. Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico tra il piano e l'oggetto?

La forza di gravità che agisce sull'oggetto è

$$F_g = mg = 20 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 196 \text{ N}$$

La massima forza d'attrito statico è generata dal fatto che c'è una forza che schiaccia l'oggetto sul piano orizzontale. In questo caso tale forza è la forza di gravità.

$$F_{s-max} = \mu F_g = 3 \cdot 196 \text{ N} = 588 \text{ N}$$

La forza da fare per spostare l'oggetto deve essere tale da vincere la forza d'attrito. Quindi la forza vale

$$F = 588 \text{ N}$$

Mentre l'oggetto si muove subisce un'accelerazione

$$a_{tot} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

e quindi una forza

$$F_{tot} = 20 \text{ kg} \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 100 \text{ N}$$

La forza totale che subisce l'oggetto è data da

$$F_{tot} = F - F_{din}$$

Dovete infatti tenere presente che adesso che l'oggetto si muove, l'attrito statico non esiste più e viene sostituito da quello dinamico. Quindi

$$F_{din} = F - F_{tot} = 588 \text{ N} - 100 \text{ N} = 488 \text{ N}$$

Il coefficiente di attrito dinamico sarà quindi

$$\mu_{din} = \frac{F_{din}}{F_g} = \frac{488 \text{ N}}{196 \text{ N}} = 2,49$$

giustamente minore del valore del coefficiente di attrito statico.



Fig. 6.4: Guarda il video youtu.be/3Bb2hrwKwpY

Esercizi concettualmente identici

1. Un blocco di ferro pesa $F_p = 98 \text{ N}$ fermo su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_{statico} = 3$ viene spinto verso destra. Qual'è il valore della forza che si deve applicare per far muovere l'oggetto? Nel momento in cui comincia a muoversi, subisce un'accelerazione $a_{tot} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Quale forza totale sta subendo l'oggetto? Quanto vale, di conseguenza, la forza di attrito dinamico che agisce sul blocco di ferro? Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico tra l'oggetto ed il piano su cui striscia? [$F = 294 \text{ N}$; $F_{tot} = 50 \text{ N}$; $F_{ad} = 244 \text{ N}$; $\mu_d = 2,49$]
2. Un oggetto di massa $m = 3 \text{ kg}$ viene fatto strisciare su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,5$ spinto da una forza $F = 50 \text{ N}$. Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza di attrito che frena l'oggetto? Quanto vale la reazione vincolare fatta dal piano orizzontale per sorreggere l'oggetto? Quanto vale la forza totale che spinge l'oggetto? Quanto vale l'accelerazione totale subita dall'oggetto? [$F_g = 29,4 \text{ N}$; $F_{att} = 14,7 \text{ N}$; $R_v = 29,4 \text{ N}$; $F_{tot} = 35,3 \text{ N}$; $a_{tot} = 11,77 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$]
3. Un oggetto di massa $m = 10 \text{ kg}$ è fermo su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0,5$ e con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0,3$. Per spostarlo lo spingete con una forza F . Quanto vale la forza di gravità che agisce sull'oggetto? Quanto vale la forza F che bisogna fare per spostare l'oggetto quando è fermo? Quanto vale la forza di attrito dinamico che frena l'oggetto mentre si muove? Quanto vale la forza totale che spinge l'oggetto

mentre si muove? Quanto vale la sua accelerazione totale? $[F_g = 98 \text{ N};$

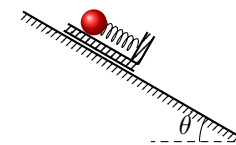
$F = 49 \text{ N}; F_{ad} = 29,4 \text{ N}; F_t = 19,6 \text{ N}; a_t = 1,96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$

4. Un blocco di massa $m = 50 \text{ kg}$ fermo su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_{statico} = 2$ viene spinto verso destra. Esso comincia a muoversi sotto l'azione di una forza F con accelerazione $a_{tot} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Calcola la forza di gravità che agisce sull'oggetto. Calcola la forza di attrito statico sull'oggetto. Quanto vale la forza che serve per far cominciare a muovere l'oggetto? Ora l'oggetto si sta muovendo. Quale forza totale subisce l'oggetto mentre si muove? Sapendo la forza totale che spinge l'oggetto, e conoscendo la forza F ad esso applicata, quanto vale la forza di attrito dinamico sull'oggetto? Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico tra il piano orizzontale e l'oggetto? $[F_g = 490 \text{ N}; F_{as} = 980 \text{ N}; F = 980 \text{ N}$ pari alla forza di attrito statico; $F_2 = 25 \text{ N}; F_{ad} = 955 \text{ N}; \mu_d = 1,95]$

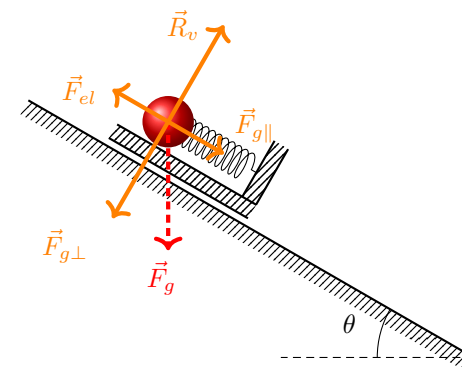
Problema di: Dinamica - D0050

Testo [D0050] [4★ 3🕒 3a📖]

Un oggetto di massa $m = 2 \text{ kg}$ si trova su di un carrello posizionato fermo su di un piano inclinato inclinato di $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale. Il sistema inizialmente è fermo. L'oggetto è appoggiato ad una molla di costante elastica $k = 5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$, parallela al piano inclinato. Di quanto si allunga la molla quando si lascia il carrello libero di muoversi?



Spiegazione L'oggetto nel carrello è soggetto alla forza di gravità verticale verso il basso. Per analizzare lo schema delle forze è utile scomporre tale forza lungo le linee parallela e perpendicolare al piano inclinato. Il piano inclinato esercita sul peso una reazione vincolare uguale alla forza premente $\vec{F}_{g\perp}$. A spingere lungo il piano rimane la relativa componente della forza di gravità $\vec{F}_{g\parallel}$. Il carrello è fermo e la pallina schiaccia la molla con una forza pari a $\vec{F}_{g\parallel}$. Nel momento in cui il carrello viene lasciato libero di cadere, il peso della pallina lungo la direzione del moto si annulla, quindi la molla non viene più schiacciata e ritorna della lunghezza iniziale.



Svolgimento Dal momento che il sistema è inizialmente fermo, allora la somma delle forze sull'oggetto deve essere nulla. L'equazione dell'equilibrio è quindi:

$$\begin{cases} R_v - F_{g\perp} = 0 \\ F_{el} - F_{g\parallel} = 0 \end{cases}$$

Il calcolo dell'allungamento della molla rispetto alla posizione a riposo mi dà di conseguenza l'allungamento della molla quando il sistema viene lasciato libero.

$$k \cdot \Delta l = mg \sin \theta$$

$$\Delta l = \frac{mg \sin \theta}{k} = \frac{2 \, \text{kg} \cdot 9,8 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2}}{5 \, \frac{\text{N}}{\text{cm}}} = 1,96 \, \text{cm}$$

Infatti quando il sistema è in caduta libera siamo in assenza di peso e quindi la molla si riposiziona nella sua posizione a riposo.

Problema di: Dinamica - D0051

Testo [D0051] [4★ 4👤 3a📖]

Una navicella spaziale di forma cilindrica con altezza $h = 10 \, \text{m}$ e massa $m_2 = 500 \, \text{kg}$ è in orbita intorno alla Terra. La base inferiore si trova ad una distanza $d = 408 \, \text{km}$ dal centro della Terra (di raggio $R_T = 6371 \, \text{km}$ e massa $M_T = 5,97219 \cdot 10^{24} \, \text{kg}$). Quanto pesa un oggetto di massa $m_1 = 1 \, \text{kg}$ su tale base?

Spiegazione Una navicella in orbita è in caduta libera e quindi l'accelerazione percepita dagli oggetti al suo interno dovrebbe essere nulla, e di conseguenza è nullo il loro peso. Questo è quanto giustamente si studia a scuola quando si introducono i sistemi di riferimento non inerziali. Quando però si fa questo esempio, spesso si assume un ascensore in caduta libera e tutto torna bene perchè l'accelerazione subita dall'ascensore e quella subita dalla persona all'interno è la stessa, pari all'accelerazione di gravità g supposta appunto *costante*. Detto questo il professore fa poi l'esempio dell'aereo in caduta libera e della stazione spaziale, magari mostrando dei filmati che effettivamente dimostrano un'assenza di peso.

Detto questo possiamo comunque approfondire l'argomento e chiederci se nel nostro problema effettivamente l'astronave e l'oggetto sul suo fondo subiscono la stessa accelerazione. In caso contrario il peso non risulterebbe nullo!

Svolgimento Utilizziamo la legge di gravitazione universale. L'accelerazione percepita da un corpo la indichiamo con

$$g = G \frac{M_T}{R^2}$$

dove R è la distanza del *baricentro* del corpo dal centro della Terra e M_T è la massa della Terra.

La base della nostra navicella si trova ad una distanza dal centro della Terra pari a $r = 6779000 \, \text{m}$

Detta a l'accelerazione che percepisce l'oggetto sul fondo dell'astronave avremo:

$$P = m_1 \cdot a$$

$$P = m_1 \cdot \left(G \frac{M_T}{(r)^2} - G \frac{M_T}{\left(r + \frac{h}{2}\right)^2} \right)$$

$$P = GM_T m_1 \cdot \left(\frac{1}{(r)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{h}{2}\right)^2} \right)$$

$$P = G \frac{M_T m_1}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{2r}\right)^2} \right)$$

$$P = 6,67408 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \frac{5,97219 \cdot 10^{24} kg \cdot 1 kg}{(6779000 m)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 1,48 \cdot 10^{-6}} \right)$$

$$P \simeq 8,67 \cdot 1,48 \cdot 10^{-6} N \simeq 12,8 \cdot 10^{-6} N = 12,8 \mu N$$

Per questo motivo si dice comunemente che gli esperimenti sulla stazione spaziale sono fatti in un contesto di microgravità.

Problema di: Dinamica - D0083

Testo [D0083] [2★ 2🕒 1a📖]

Ad un palloncino è appeso un pendolo di lunghezza $l = 2 m$ e di massa $m = 1 kg$. Se il palloncino è tirato verso l'alto con una forza di Archimede tale per cui si muove con accelerazione $a = 4,2 \frac{m}{s^2}$, con quale frequenza oscilla il pendolo?

Spiegazione Il periodo dell'oscillazione di un pendolo dipende dalla sua lunghezza e dall'accelerazione a cui è sottoposto. Dal momento che il sistema è spinto verso l'alto con una certa forza, l'accelerazione che ne consegue viene percepita dal pendolo come un'accelerazione che si aggiunge all'accelerazione di gravità dando l'accelerazione effettivamente percepita dal pendolo.

Svolgimento Il periodo del pendolo è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a_{eff}}}$$

dove $a_{tot} = g + a_{app}$

per cui

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a}} = [...]$$

Problema di: Dinamica - D0052**Testo** [D0052] [2★ 3🕒 1a📖]

Un ascensore si muove verso l'alto con accelerazione $a = 2 \frac{m}{s^2}$. Una persona di massa $m = 70 \text{ kg}$ si trova al suo interno in piedi sopra una bilancia. Quanto peso segna la bilancia?

Spiegazione In questo esercizio semplicemente applichiamo il secondo principio della dinamica. Noi infatti sappiamo quali forze agiscono sulla persona e sappiamo con quale accelerazione si muove la persona.

Svolgimento Sulla persona agiscono due forze: la forza di gravità verso il basso e la reazione vincolare della bilancia verso l'alto. Possiamo quindi scrivere il secondo principio della dinamica

$$F_{tot} = m \cdot a$$

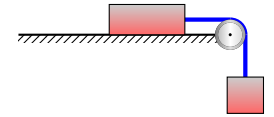
$$T - F_g = m \cdot a$$

$$T = m \cdot g + m \cdot a = m(g + a)$$

$$T = 70 \text{ kg} \cdot \left(9,8 \frac{m}{s^2} + 2 \frac{m}{s^2} \right) = 826 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0006**Testo** [D0006] [3★ 3🕒 2a📖]

Una slitta di massa $m_1 = 0,12 \text{ kg}$ scivola senza attrito su un piano orizzontale tirata da un filo di massa trascurabile che, attraverso una carrucola, è a sua volta attaccato ad un peso di massa $m_2 = 0,02 \text{ kg}$. Tale peso viene tirato verso il basso dalla forza di gravità. Con quale accelerazione si muove il sistema?



Spiegazione Il pesino m_2 viene spinto verso il basso dalla forza di gravità; tale forza fa però muovere sia il pesino che la slitta con la stessa accelerazione. Quindi per risolvere il sistema utilizziamo il secondo principio della dinamica.

Traccia di lavoro: *prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.*

Per ogni oggetto presente nel problema: disegna tutte le forze che agiscono su di esso, disegna l'accelerazione che subisce, infine applica ad ognuno di essi il secondo principio della dinamica. Otterrai il sistema di equazioni che risolve il problema.

Svolgimento La forza di gravità che agisce sul pesino è

$$F_{g2} = m_2 g = 0,02 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 1,96 \text{ N}$$

Lo schema delle forze ci permette di scrivere tre equazioni, tutte derivanti dall'applicazione del terzo principio, una per il peso nella direzione verticale, uno per la slitta in direzione verticale ed uno per la slitta in direzione orizzontale

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T = m_1 a \\ R_v = m_2 g \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene

$$m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{0,02 \text{ kg}}{0,14 \text{ kg}} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La tensione del filo è

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 0,168 \text{ N}$$

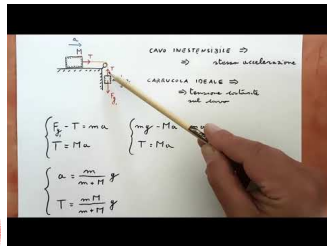
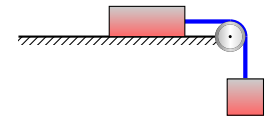


Fig. 6.5: Guarda il video youtu.be/pWyRB8JJHDI

Problema di: Dinamica - D0102

Testo [D0102] [3★ 3🕒 2a📖]

Una slitta di massa $m_1 = 0,12 \text{ kg}$ scivola su di un piano orizzontale, partendo da fermo, con coefficiente di attrito $\mu_d = 0,1$ tirata da un filo di massa trascurabile che, attraverso una carrucola, è a sua volta attaccato ad un peso di massa $m_2 = 0,02 \text{ kg}$. Tale peso viene tirato verso il basso dalla forza di gravità. Con quale accelerazione si muove il sistema?



Spiegazione Il pesino m_2 viene spinto verso il basso dalla forza di gravità; tale forza fa però muovere sia il pesino che la slitta con la stessa accelerazione. Quindi per risolvere il sistema utilizziamo il secondo principio della dinamica

Traccia di lavoro: prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.

Per ogni oggetto presente nel problema: disegna tutte le forze che agiscono su di esso, disegna l'accelerazione che subisce, infine applica ad ognuno di essi il secondo principio della dinamica. Otterrai il sistema di equazioni che risolve il problema.

Svolgimento La forza di gravità che agisce sul pesino è

$$F_{g2} = m_2 g = 0,02 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,196 \text{ N}$$

Lo schema delle forze ci permette di scrivere tre equazioni, tutte derivanti dall'applicazione del terzo principio, una per il peso nella direzione verticale, uno per la slitta in direzione verticale ed uno per la slitta in direzione orizzontale

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T - \mu m_1 g = m_1 a \\ R_v = m_1 g \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene

$$m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2) a$$

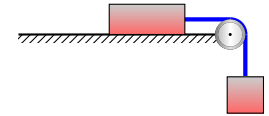
$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$a = \frac{0,02 \text{ kg} - 0,1 \cdot 0,12 \text{ kg}}{0,14 \text{ kg}} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,56 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Problema di: Dinamica - D0102a

Testo [D0102a] [3★ 3🔧 2a📖]

Una slitta di massa $m_1 = 0,12 \text{ kg}$ scivola su un piano orizzontale con coefficiente di attrito $\mu_d = 0,1$, tirata da un filo di massa trascurabile che, attraverso una carrucola, è a sua volta attaccato ad un peso di massa $m_2 = 0,02 \text{ kg}$. Tale peso viene tirato verso il basso dalla forza di gravità. Sapendo che la velocità iniziale del pesino è verso l'alto, con quale accelerazione si muove il sistema?



Spiegazione Il pesino m_2 viene spinto verso il basso dalla forza di gravità; tale forza fa però muovere sia il pesino che la slitta con la stessa accelerazione. Quindi per risolvere il sistema utilizziamo il secondo principio della dinamica. Attenzione a non dimenticare la forza di attrito.

Traccia di lavoro: *prima di guardare la soluzione, segui la seguente traccia di lavoro.*

Per ogni oggetto presente nel problema: disegna tutte le forze che agiscono su di esso, disegna l'accelerazione che subisce, infine applica ad ognuno di essi il secondo principio della dinamica. Otterrai il sistema di equazioni che risolve il problema.

Svolgimento La forza di gravità che agisce sul pesino è

$$F_{g2} = m_2 g = 0,02 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,96 \text{ N}$$

Il sistema si muove in modo che il pesino inizialmente ha la velocità verso l'alto, e quindi la slitta si muove verso sinistra, quindi la forza di attrito sulla slitta è nello stesso verso della tensione del filo.

Lo schema delle forze ci permette di scrivere tre equazioni, tutte derivanti dall'applicazione del terzo principio, una per il peso nella direzione verticale, uno per

la slitta in direzione verticale ed uno per la slitta in direzione orizzontale

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T + \mu m_1 g = m_1 a \\ R_v = m_2 g \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene

$$\begin{aligned} m_2 g + \mu m_1 g &= (m_1 + m_2) a \\ a &= \frac{m_2 + \mu m_1}{m_1 + m_2} g \\ a &= \left(\frac{0,032 \text{ kg}}{0,14 \text{ kg}} \right) \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 2,24 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

La tensione del filo è

$$T = m_1 \cdot (a - \mu g) = 0,151 \text{ N}$$

Tale accelerazione avrà il valore indicato fino a quando la slitta non si ferma e ricomincia a muoversi. In questa fase successiva l'accelerazione del sistema diminuirà.

Problema di: Dinamica - D0104

Testo [D0104] [3★ 3🕒 2a📖]

Le caratteristiche tecniche di un'auto di massa $M = 1500 \text{ kg}$, indicano che è in grado di passare da $v_i = 0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a $v_f = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ in un tempo $\Delta t = 9,26 \text{ s}$. Se aggancio all'auto un rimorchio di massa $m = 500 \text{ kg}$, e assumo che la forza espressa dal motore rimanga invariata, quale forza deve sopportare il gancio di traino?

Spiegazione Calcolata la forza media espressa dal motore dell'auto, un diagramma di corpo libero risolve il problema.

Svolgimento La forza espressa dal motore dell'auto è

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = 15 \text{ kN}$$

In un diagramma di corpo il gancio di traino è modellizzato con una reazione vincolare che frena l'auto e tira il rimorchio. Quindi

$$\begin{cases} F - T = Ma \\ T = ma \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a = \frac{F}{M + m} \\ T = \frac{m}{M + m} F \end{cases}$$

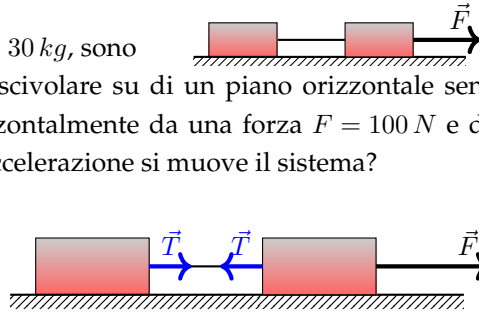
Quindi

$$T = 3750 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0059**Testo** [D0059] [3★ 3🕒 2a📖]

Due oggetti di massa $m_1 = 20 \text{ kg}$ ed $m_2 = 30 \text{ kg}$, sono legati da un filo inestensibile e liberi di scivolare su di un piano orizzontale senza attrito. Uno dei due viene tirato orizzontalmente da una forza $F = 100 \text{ N}$ e di conseguenza trascina l'altro. Con quale accelerazione si muove il sistema?

Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo la seconda legge della dinamica ai due corpi in movimento. Il problema prevede di non tenere conto delle forze di attrito.



Svolgimento L'accelerazione del sistema avrà verso concorde alla forza $\vec{F}$ che agisce sul primo oggetto. La tensione del filo agisce orizzontalmente su entrambi i blocchi con verso opposto. Sul primo oggetto agiscono quindi due forze. Sul secondo oggetto agisce solo la tensione del filo. Avremo quindi

$$\begin{cases} F - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases}$$

Risolviendo il sistema avremo

$$\begin{cases} F - m_2 a = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{F}{m_1 + m_2} \\ T = F \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

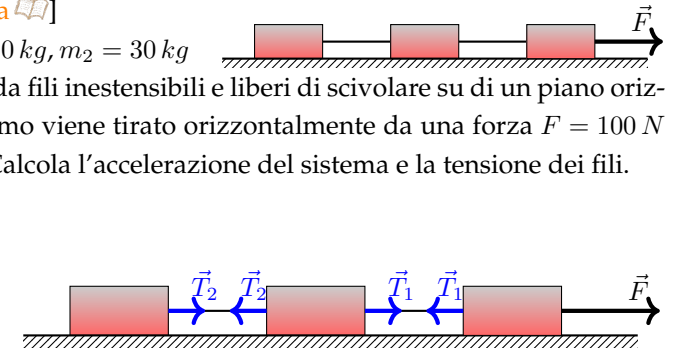
Abbiamo quindi ottenuto la tensione del filo e l'accelerazione del sistema. Numericamente avremo

$$\begin{cases} a = \frac{100 \text{ N}}{50 \text{ kg}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ T = 100 \text{ N} \cdot \frac{30 \text{ kg}}{50 \text{ kg}} = 60 \text{ N} \end{cases}$$

Problema di: Dinamica - D0060**Testo** [D0060] [3★ 3🕒 2a📖]

Tre oggetti di massa $m_1 = 20 \text{ kg}$, $m_2 = 30 \text{ kg}$ ed $m_3 = 50 \text{ kg}$, sono legati da fili inestensibili e liberi di scivolare su di un piano orizzontale senza attrito. Il primo viene tirato orizzontalmente da una forza $F = 100 \text{ N}$ e trascina quindi gli altri. Calcola l'accelerazione del sistema e la tensione dei fili.

Spiegazione In questo problema semplicemente applichiamo la seconda legge della dinamica ai tre corpi in movimento. In questo esercizio non si prevede la presenza di forze di attrito



Svolgimento L'accelerazione del sistema avrà verso concorde alla forza $\vec{F}$ che agisce sul primo oggetto. Le tensioni dei fili agiscono orizzontalmente su tutti i blocchi con verso opposto. Sul primo oggetto agiscono quindi due forze. Sul secondo oggetto agiscono due forze. Sul terzo agisce solo la tensione del filo. Avremo quindi

$$\begin{cases} F - T_1 = m_1 a \\ T_1 - T_2 = m_2 a \\ T_2 = m_3 a \end{cases}$$

Risolviendo il sistema avremo

$$\begin{cases} F = m_1 a + m_2 a + m_3 a = (m_1 + m_2 + m_3) a \\ T_2 = F \cdot \frac{m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)} \\ T_1 = F \cdot \frac{m_2 + m_3}{(m_1 + m_2 + m_3)} \end{cases}$$

Abbiamo quindi ottenuto la tensione del filo e l'accelerazione del sistema. Numericamente avremo

$$\begin{cases} a = \frac{100 \text{ N}}{100 \text{ kg}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ T_1 = 100 \text{ N} \cdot \frac{80 \text{ kg}}{100 \text{ kg}} = 80 \text{ N} \\ T_2 = 100 \text{ N} \cdot \frac{50 \text{ kg}}{100 \text{ kg}} = 50 \text{ N} \end{cases}$$

Problema di: Dinamica - D0034

Testo [D0034] [3★ 3🕒 2a📖]

Ad una macchina di Atwood sono appese due masse $m_1 = 2 \text{ kg}$ ed $m_2 = 5 \text{ kg}$. Con quale accelerazione si muove il sistema? [Si consideri una carrucola ideale, di massa trascurabile e senza alcun attrito, ed un filo inestensibile.]

Spiegazione Una macchina di Atwood è costituita da una carrucola con perno fisso a cui sono appese due masse. In questo caso la carrucola è ideale (massa e attriti trascurabili). Nel sistema agiscono due forze di gravità entrambe verso il basso che, rispetto alla direzione del filo, risultano opposte. Conoscendo quindi le masse e le forze in gioco, il problema chiede di determinare l'accelerazione del sistema. L'unica formula che qui ci serve applicare è il secondo principio della dinamica

$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a}$$

Svolgimento Uno dei due oggetti accelera verso il basso (per esempio l'oggetto numero 2), mentre l'altro accelera verso l'alto. Per i due oggetti possiamo applicare il secondo principio della dinamica.

$$\begin{cases} m_2 g - T = m_2 a \\ T - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

da cui, utilizzando il metodo di sostituzione, avremo

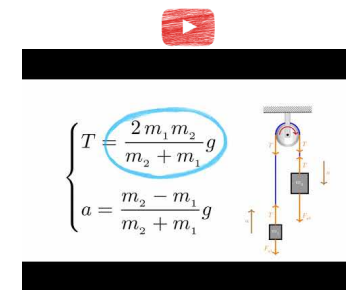
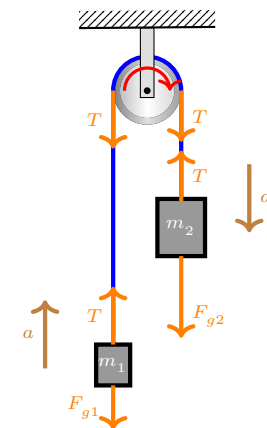


Fig. 6.6: Guarda il video youtu.be/2z0IIAzU2PM



$$\begin{cases} T = m_1 a + m_1 g \\ m_2 g - m_1 a - m_1 g = m_2 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 a + m_1 g \\ (m_2 - m_1) g = (m_2 + m_1) a \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 a + m_1 g \\ a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g + m_1 g \\ a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g + m_1 g \\ a = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_2 + m_1)} g \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = \frac{2 m_1 m_2}{m_2 + m_1} g \\ a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \end{cases}$$

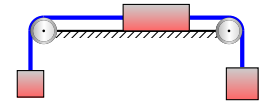
$$a = \frac{3 \text{ kg}}{7 \text{ kg}} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$T = \frac{20}{7} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 28 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0065

Testo [D0065] [3★ 3🕒 2a📖]

Un corpo di massa $m_0 = 10 \text{ kg}$ si muove senza attrito su di un piano orizzontale attaccato da entrambi i lati a due funi a loro volta attaccate a due corpi di massa $m_1 = 5 \text{ kg}$ ed $m_2 = 3 \text{ kg}$, liberi di muoversi sotto l'azione della forza di gravità. Con quale accelerazione si muove il sistema?



Spiegazione In questo esercizio applichiamo il secondo principio della dinamica ai tre oggetti. Conosciamo tutte le forze esterne e le masse, quindi possiamo determinare l'accelerazione del sistema.

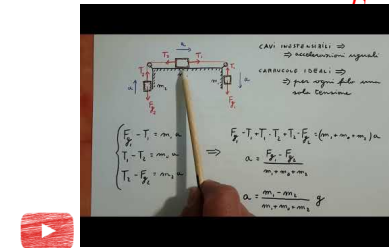
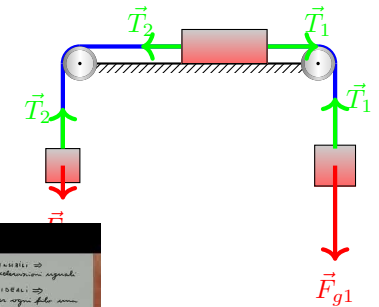


Fig. 6.7: Guarda il video youtu.be/1u49ZYsDCvc

Svolgimento Visto che tutti gli oggetti sono legati da corde inestensibili di massa trascurabile, allora tutti e tre gli oggetti avranno la stessa accelerazione, seppur con direzioni differenti.

Il sistema di equazioni che possiamo scrivere è

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_1 - T_2 = m_0 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

Sostituendo la prima e la terza nella seconda e riordinando avremo

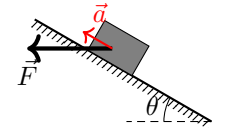
$$-m_1 a + m_1 g - m_2 a - m_2 g = m_0 a$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_0 + m_1 + m_2} g$$

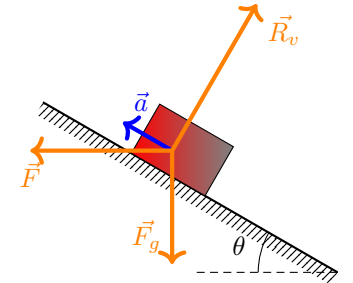
Problema di: Dinamica - D0063

Testo [D0063] [2★ 3🕒 2a📖]

Un blocco di massa $m = 10 \text{ kg}$ scivola senza attrito su di un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^\circ$ ed è spinto contro il piano da una forza orizzontale $F = 100 \text{ N}$. Con quale accelerazione si muove il blocco?

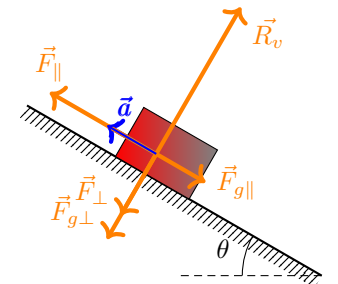


Spiegazione L'analisi dello schema di forze avviene su due assi perpendicolari tra loro: quello parallelo al piano inclinato e quello perpendicolare al piano inclinato. Sull'asse parallelo agiscono la componente della forza di gravità verso il basso e la componente della forza $\vec{F}$ verso l'alto. Sull'asse perpendicolare le componenti della forza $\vec{F}$ e della forza di gravità entrambe schiacciano l'oggetto contro il piano, mentre il piano inclinato esercita una reazione vincolare R_v che equilibra le due forze precedenti. L'accelerazione del sistema è ovviamente lungo il piano inclinato, essendo quella la linea del moto. A priori non possiamo sapere se verso l'alto o verso il basso, in quanto dipende dal valore della forza $\vec{F}$, dalla massa dell'oggetto e dall'inclinazione del piano. Scegliete in modo arbitrario il disegno del verso dell'accelerazione; se avrete sbagliato, ve ne accorgete quando l'accelerazione vi verrà un valore negativo.



Svolgimento Per poter studiare il problema è necessario scomporre tutte le forze lungo le due direzioni interessanti del problema: quelle parallela e perpendicolare al piano inclinato. Dall'analisi dello schema di forze sull'asse parallelo al piano avremo

$$F \cos \theta - F_g \sin \theta = m a$$



$$a = \frac{F \cos \theta - mg \sin \theta}{m} = \frac{100 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 98 \text{ N} \cdot \frac{1}{2}}{10 \text{ kg}} = 3,76 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

È ovviamente possibile anche calcolare la reazione vincolare del piano

$$R_v = F_{\perp} + F_{g\perp}$$

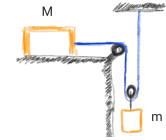
$$R_v = F \sin \theta + F_g \cos \theta$$

$$R_v = 100 \text{ N} \cdot \frac{1}{2} + 98 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 89,87 \text{ N}$$

Problema di: Dinamica - D0056

Testo [D0056] [3★ 4🕒 3a📖]

Un oggetto di massa $M = 20 \text{ kg}$ striscia senza attrito su di un piano orizzontale. L'oggetto è tirato da una corda inestensibile che, tramite una carrucola mobile, sorregge un peso di massa $m = 10 \text{ kg}$. Se l'oggetto avanza di $L = 10 \text{ cm}$, di quanto si abbassa il peso? Con quale accelerazione si sta muovendo il sistema?



Spiegazione In assenza di attriti, l'unica forza che mette in movimento il sistema è la forza di gravità sul pesino di massa m . Il problema si risolve applicando il secondo principio della dinamica ai due blocchi.

Svolgimento Il peso che cade, per come è attaccato all'altro oggetto, percorrerà sempre la metà della distanza percorsa dall'oggetto. Infatti se il peso scende di un metro, vuol dire che un metro di corda si mette da un lato della carrucola ed un altro metro di corda si mette dall'altro lato; l'oggetto avanza quindi di due metri per dare la corda necessaria. Questo vuol dire che il blocco appeso avrà sempre la metà della velocità del blocco trascinato, e quindi la metà della sua accelerazione.

Sul blocco appeso agiscono la forza di gravità in basso e due tensioni del filo in alto.

$$mg - 2T = m \cdot \frac{a}{2}$$

Sul blocco che scivola in orizzontale avremo

$$T = Ma$$

Quindi

$$mg - 2Ma = m \cdot \frac{a}{2}$$

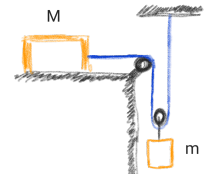
da cui

$$a \cdot \left(\frac{m}{2} + 2M \right) = mg$$

$$a = g \cdot \frac{m}{\frac{m}{2} + 2M} = 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{10}{45} = 2,18 \frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - D0057
Testo [D0057] [3★ 3🕒 3a📖]

Un oggetto di massa $M = 20 \text{ kg}$ striscia su di un piano orizzontale con coefficiente di attrito $\mu_d = 0,05$. L'oggetto è tirato da una corda inestensibile che, tramite una carrucola mobile, sorregge un peso di massa $m = 10 \text{ kg}$. Tale peso si muove verso il basso. Con quale accelerazione si sta muovendo il sistema?



Spiegazione La forza che mette in movimento il sistema è la forza di gravità sul pesino di massa m . Il problema si risolve applicando il secondo principio della dinamica ai due blocchi. Sul blocco che scivola il orizzontale agisce anche la forza di attrito radente dinamico.

Svolgimento Il blocco che cade, per come è attaccato all'altro blocco, percorrerà sempre la metà della distanza percorsa dal primo blocco. Questo vuol dire che avrà sempre la metà della sua velocità e quindi la metà della sua accelerazione.

Sul blocco appeso agiscono la forza di gravità in basso e due tensioni del filo in alto.

$$mg - 2T = m \frac{a}{2} \quad (6.1)$$

Sul blocco che scivola in orizzontale avremo

$$T - F_{attr} = Ma$$

$$T - \mu Mg = Ma$$

$$T = Ma + \mu Mg$$

Quindi, sostituendo quest'ultima equazione nella 6.1

$$mg - 2(Ma + \mu Mg) = m \frac{a}{2}$$

da cui, risolvendo l'equazione, otteniamo

$$a \cdot \left(\frac{m}{2} + 2M \right) = g \cdot (m - 2\mu M)$$

$$a = g \cdot \frac{(m - 2\mu M)}{\frac{m}{2} + 2M} = 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{8}{45} = 1,744 \frac{m}{s^2}$$

Ovviamente quanto calcolato vale solo se

$$\frac{m}{2} - 2\mu M > 0$$

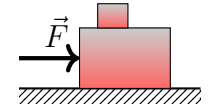
in quanto l'accelerazione del blocco deve essere verso destra. Quindi solo se

$$\mu < \frac{m}{4M} = 0,125$$

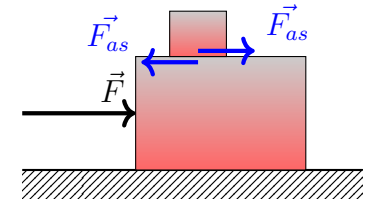
Problema di: Dinamica - D0079

Testo [D0079] [4★ 4🕒 3a📖]

Un oggetto di massa $M = 10 \text{ kg}$ si muove senza attrito su di un piano orizzontale spinto da una forza $F = 84 \text{ N}$. Su di esso è appoggiato un secondo oggetto di massa $m = 2 \text{ kg}$ solidale con il primo a causa della forza di attrito statico con coefficiente $\mu_s = 5$. Con quale accelerazione si muove il sistema? Quanto vale la forza di attrito statico? Quale forza dovrei fare per far sì che i due oggetti non siano più solidali?



Spiegazione In questo problema applichiamo il secondo principio della dinamica. Per quanto riguarda la forza di attrito che tiene i due oggetti solidali, bisogna ricordare che essa è una reazione vincolare il cui valore sarà sempre inferiore alla massima forza di attrito statico calcolabile con la formula opportuna. Il blocco inferiore spinge, grazie alla forza di attrito, il blocco superiore; per il terzo principio della dinamica, anche il blocco superiore spinge quello inferiore anche se dalla parte opposta.



Svolgimento Ai due oggetti applichiamo il secondo principio:

$$\begin{cases} F - F_{as} = Ma \\ F_{as} = ma \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} F = (M + m) a \\ F_{as} = ma \\ a = \frac{F}{M + m} \\ F_{as} = \frac{m}{M + m} F \end{cases}$$

La massima forza di attrito che può agire tra i due oggetti sarà

$$F_{as-max} = \mu_s mg$$

Gli oggetti non saranno più solidali se

$$F_{as} > F_{as-max}$$

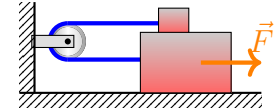
$$\frac{m}{M+m} F > \mu_s mg$$

$$F > \mu_s (M+m) g$$

Problema di: Dinamica - D0091

Testo [D0091] [3½★ 4🕒 3a📖]

Un oggetto di massa $M = 10 \text{ kg}$ si muove su di un piano orizzontale senza attrito spinto da una forza $F = 90 \text{ N}$. Su di esso è appoggiato un secondo oggetto di massa $m = 2 \text{ kg}$. Il coefficiente di attrito dinamico tra loro è $\mu_d = 2$. I due blocchi sono uniti da una fune che passa attraverso una carrucola in modo da farli muovere in verso opposto. Calcola l'accelerazione con cui si muove il sistema e la tensione del filo.



Spiegazione In questo esercizio applichiamo i principi della dinamica ottenendo un sistema di equazioni la cui soluzione risponde ai quesiti del problema.

Svolgimento Il filo è inestensibile, quindi le accelerazioni dei due oggetti hanno lo stesso modulo.

Sul blocco inferiore agisce la spinta F , la tensione del filo T e la forza di attrito con il blocco superiore F_a . Scriviamo la legge di Newton per questo oggetto nella prima riga del sistema.

Sul blocco superiore agiscono la tensione del filo T e la forza di attrito con il blocco inferiore F_a . Scriviamo la legge di Newton per questo oggetto nella seconda riga del sistema.

Quindi

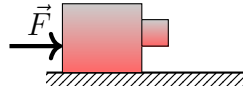
$$\begin{cases} F - T - F_a = M a \\ T - F_a = m a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - T - \mu mg = M a \\ T - \mu mg = m a \end{cases}$$

da cui, risolvendo, otteniamo

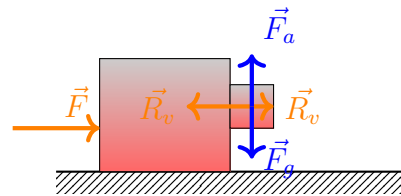
$$\begin{cases} F - 2\mu mg = (M+m) a \\ T - \mu mg = m a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{F - 2\mu mg}{(M+m)} \\ T = \frac{m}{(M+m)} [F + \mu (M-m) g] \end{cases}$$

Problema di: Dinamica - D0062
Testo [D0062] [4★ 4👤 3a📖]

Due blocchi di massa $M = 2\text{ kg}$ ed $m = 1\text{ kg}$, sono posti come mostrato in figura, liberi di scivolare senza attrito su di un piano orizzontale spinti dalla forza $\vec{F}$. Tra i due blocchi c'è attrito con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 2$. Calcola la minima forza $\vec{F}$ affinché il blocco più piccolo non cada.



Spiegazione La spinta $\vec{F}$ determina tra i due blocchi una coppia di reazioni vincolari che per il terzo principio della dinamica sono uguali ed opposte. Tali reazioni determinano una forza di attrito verso l'alto che si oppone alla forza di gravità.



Svolgimento Analizzando le forze sulla linea orizzontale avremo

$$\begin{cases} F - R_v = M \cdot a \\ R_v = m \cdot a \end{cases}$$

da cui si ottiene

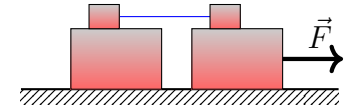
$$\begin{cases} a = \frac{F}{M+m} \\ R_v = F \cdot \frac{m}{M+m} \end{cases}$$

Se il blocco più piccolo non cade allora

$$\begin{aligned} F_g &= F_{as} \\ mg &< \mu_s R_v \\ mg &< \mu_s F \cdot \frac{m}{M+m} \\ F &> \frac{(M+m)g}{\mu_s} \end{aligned}$$

Problema di: Principi della dinamica - D0098
Testo [D0098] [4½★ 4👤 3a📖]

Su di un piano senza attrito sono appoggiati due oggetti di massa M . Su ognuno di essi è appoggiato un oggetto di massa m e tra loro il coefficiente di attrito statico è μ_s . I due oggetti di massa m sono uniti da una corda tesa. Uno degli oggetti che poggia sul piano senza attrito è spinto da una forza F . Qual è la massima forza F che possiamo fare affinché tutti e quattro gli oggetti si muovano con la stessa accelerazione? [Walter Lewin problem #16]



Spiegazione Qui semplicemente applichiamo il secondo principio della dinamica. Dobbiamo aver chiaro il concetto di forza di attrito statico sempre minore della massima forza di attrito statico $F_{max} = \mu_s mg$

Svolgimento Indichiamo con a i due oggetti di destra e con b i due oggetti di sinistra. F_a è la forza di attrito sugli oggetti a destra. F_b è la forza di attrito sugli oggetti a sinistra. La forza F agisce sull'oggetto a destra e spinge verso destra.

Una volta disegnate tutte le forze possiamo scrivere quattro equazioni per le forze posizionate in orizzontale

$$\begin{cases} F - F_a = Ma \\ F_a - T = ma \\ T - F_b = ma \\ F_b = Ma \end{cases}$$

A queste quattro equazioni aggiungiamo le due equazioni legate alla forza di attrito

$$\begin{cases} F_a < \mu_s mg \\ F_b < \mu_s mg \end{cases}$$

Dal momento che il sistema accelera verso destra, possiamo affermare con sicurezza, osservando gli oggetti di massa m , che $F_a > T > F_b$

Quindi il limite sulla forza F lo ricaveremo dalla disequazione che coinvolge F_a .
Risolvendo il sistema avremo

$$\begin{cases} a = \frac{F}{2(m+M)} \\ T = \frac{1}{2}F \\ F_b = \frac{M}{2(m+M)}F \\ F_a = \frac{(2m+M)}{2(m+M)}F \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{(2m+M)}{2(m+M)}F < \mu_s mg$$

da cui

$$F < 2\mu_s g \frac{m(m+M)}{(2m+M)}$$

Problema di: Dinamica - D0105

Testo [D0105] [5★ 4🕒 3a📖]

Un sistema di carrucole è formato da due carrucole fisse ed una mobile posizionata tra di esse. un cavo ha due pesi ai suoi estremi e sorregge la carrucola nel centro. Il cavo assume sempre posizione verticale tra una carrucola e la successiva. In assenza di attriti e con le carrucole di massa trascurabile, chiamate m_1, m_2 ed m_3 le tre masse, calcola la tensione del filo.

Spiegazione In questo esercizio è sufficiente applicare il secondo principio della dinamica a tutte e tre le masse, e scrivere una relazione tra le tre accelerazioni dei tre oggetti. Le tre accelerazioni sono infatti tutte differenti.

Svolgimento Cominciamo con il dire che le tre accelerazioni sono differenti; non conoscendo il loro verso, le disegniamo tutte verso il basso e ci aspettiamo che una o due possano risultare avere valori negativi.

Il sistema che scriviamo è quindi

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ m_2 g - 2T = m_2 a_2 \\ m_3 g - T = m_3 a_3 \\ a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione fondamentale dice che il filo è inestensibile. Infatti per ogni centimetro di cavo che ognuno dei pesi tira verso il basso, sempre un centimetro di cavo deve salire nel complesso per quanto riguarda gli altri due pesi. L'unica particolarità è che la carrucola centrale tira un cavo doppio.

Avremo che

$$\begin{cases} g - \frac{T}{m_1} = a_1 \\ g - 2\frac{T}{m_2} = a_2 \\ g - \frac{T}{m_3} = a_3 \\ g - \frac{T}{m_1} + 2g - 4\frac{T}{m_2} + g - \frac{T}{m_3} = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione

$$4g = \left(\frac{1}{m_1} + 4\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) T$$

$$T = \frac{4g}{\left(\frac{1}{m_1} + 4\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right)}$$

Problema di: Dinamica rotazionale - D0067

Testo [D0067] [4★ 6🏆 3a📖]

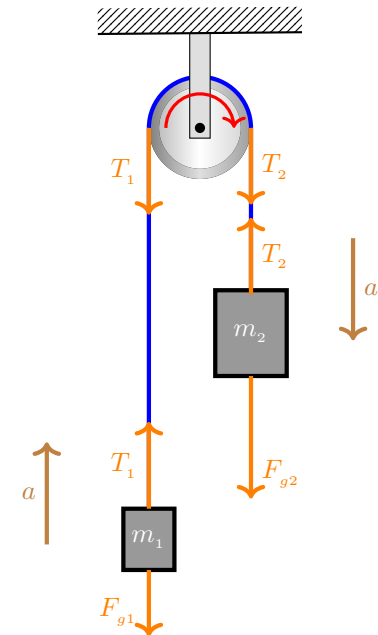
Ad una macchina di Atwood sono appese due masse $m_1 = 2\text{ kg}$ ed $m_2 = 5\text{ kg}$. La carrucola ha momento di inerzia $I = 5 \cdot 10^{-4}\text{ kg m}^2$ e raggio $r = 5\text{ cm}$. Con quale accelerazione si muove il sistema?

Spiegazione Una macchina di Atwood è costituita da una carrucola con perno fisso a cui sono appese due masse. Nel sistema agiscono due forze di gravità entrambe verso il basso che, rispetto alla direzione del filo, risultano opposte. La carrucola ha un momento di inerzia ed una massa quindi rientra nel sistema di equazioni che definisce il problema

Svolgimento Il sistema è costituito da tre oggetti: due oggetti che traslano e la carrucola che ruota. Sappiamo che l'oggetto di massa maggiore accelererà verso il basso, mentre l'altro accelererà verso l'alto. Indicando con α l'accelerazione angolare della carrucola, avremo:

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ (T_2 - T_1) \cdot r = I \alpha \end{cases}$$

Possiamo applicare adesso la condizione di puro rotolamento in quanto supponiamo che la corda non scivoli sulla carrucola ma la faccia solo ruotare.



$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ (T_2 - T_1) \cdot r = I \frac{a}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ (-m_1 a - m_1 g - m_2 a + m_2 g) = I \frac{a}{r^2} \end{cases}$$

da cui

$$(m_1 + m_2) \cdot a + I \frac{a}{r^2} = (m_2 - m_1) g$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2} \right) \cdot a = (m_2 - m_1) g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{3 \text{ kg}}{7,2 \text{ kg}} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

6.7 In un sistema isolato il baricentro è fermo

Problema di: Principi della dinamica - D0097

Testo [D0097] [2½★ 2🕒 3a📖]

Due ragazzi su pattini da ghiaccio sono legati con una fune lunga $L = 10 \text{ m}$. Ad un certo punto il ragazzo più pesante tira la fune per avvicinarsi all'amico. Sapendo che le masse dei ragazzi sono rispettivamente $m_1 = 75 \text{ kg}$ e $m_2 = 50 \text{ kg}$, di quanti metri è avanzato il ragazzo più pesante?

Spiegazione In un sistema isolato, per il terzo principio della dinamica, il baricentro del sistema rimane fermo. In questa situazione, per avvicinarsi all'amico, il ragazzo può solo tirare la fune e da questa, di conseguenza, essere tirato in avanti. Quindi ogni forza coinvolta è interna al sistema.

Svolgimento Rispetto al ragazzo più pesante, il baricentro del sistema si troverà nel punto

$$X_b = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{50 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}}{125 \text{ kg}} = 4 \text{ m}$$

Tirando la fune, i ragazzi si toccheranno nel baricentro del sistema, quindi il ragazzo più pesante sarà avanzato di esattamente $\Delta S = 4 \text{ m}$

Problema di: Principi della dinamica - D0097a**Testo** [D0097a] [2½★ 2🕒 3a📖]

Un acrobata di massa $m = 70 \text{ kg}$ si trova appeso ad una fune lunga $L = 10 \text{ m}$ sotto una mongolfiera ferma di massa $M = 210 \text{ kg}$. Salendo lungo la fune, di quanto si abbassa la mongolfiera?

Spiegazione In un sistema isolato, per il terzo principio della dinamica, il baricentro del sistema rimane fermo. In questa situazione, per avvicinarsi alla mongolfiera, il ragazzo può solo tirare la fune e da questa, di conseguenza, essere tirato in alto. Quindi ogni forza coinvolta è interna al sistema.

Svolgimento Rispetto alla mongolfiera, il baricentro del sistema si troverà nel punto

$$Y_b = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{-70 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m}}{280 \text{ kg}} = -2,5 \text{ m}$$

Tirando la fune, la mongolfiera scende di esattamente $\Delta S = -2.5 \text{ m}$

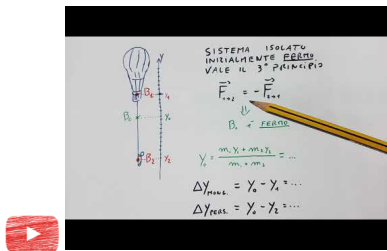


Fig. 6.8: Guarda il video youtu.be/Vwvkef4ujaw

Problema di: Principi della dinamica - D0095**Testo** [D0095] [2½★ 2🕒 3a📖]

Su di una barca ferma in un lago, lunga $L = 3 \text{ m}$ e di massa $M = 150 \text{ kg}$, due persone di massa rispettivamente $m_1 = 55 \text{ kg}$ e $m_2 = 90 \text{ kg}$ sono sedute ai bordi opposti della nave. Di quanto si sposta la barca se le due persone invertono la loro posizione?

Spiegazione In un sistema isolato, per il terzo principio della dinamica, il baricentro del sistema rimane fermo.

Svolgimento Nel sistema di riferimento della barca, considerando l'origine degli assi nella posizione della prima persona, il baricentro del sistema si trova nel punto

$$X_b = \frac{m_1 \cdot 0 + M \cdot \frac{L}{2} + m_2 \cdot L}{m_1 + M + m_2} = \frac{55 \text{ kg} \cdot 0 \text{ m} + 150 \text{ kg} \cdot 1,5 \text{ m} + 90 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m}}{295 \text{ kg}} = 1 \text{ m}$$

Invertendosi le due persone, ora il baricentro si trova, sempre rispetto alla prua della barca, nel punto

$$X_b = \frac{m_2 \cdot 0 + M \cdot \frac{L}{2} + m_1 \cdot L}{m_2 + M + m_1} = \frac{90 \text{ kg} \cdot 0 \text{ m} + 150 \text{ kg} \cdot 1,5 \text{ m} + 55 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m}}{295 \text{ kg}} = 1,322 \text{ m}$$

Questo significa che, rispetto all'acqua, tutta la barca deve essersi spostata di $32,2 \text{ cm}$

Problema di: Principi della dinamica - D0097b**Testo** [D0097b] [2½★ 2🕒 3a📖]

Un batiscafo si trova fermo sott'acqua a $h = 10\text{ m}$ di distanza dal fondo marino. Il batiscafo, completo di equipaggio, ha una massa $M = 2000\text{ kg}$ e trasporta, ancorato fuori di esso, un apparato scientifico di massa $m = 300\text{ kg}$ che deve essere depositato sul fondale calandolo con una fune metallica di massa trascurabile. Quanti metri di fune devono essere utilizzati per l'operazione?

Spiegazione In un sistema isolato, per il terzo principio della dinamica, il baricentro del sistema rimane fermo. In questa situazione, per spostare il carico si agisce unicamente sulla tensione del filo che è di fatto una forza interna al sistema.

Svolgimento Lavoriamo nel sistema di riferimento del baricentro.

Visto che il baricentro del sistema deve rimanere fermo, quando la strumentazione arriverà a toccare il fondo avremo che il batiscafo si sarà sollevato di una certa altezza Δy in modo tale che

$$M\Delta y = mh$$

In questo modo, se calcoliamo la posizione del baricentro, essa continua ad essere nell'origine degli assi.

Quindi

$$\Delta y = \frac{m}{M}h = 1,5\text{ m}$$

La distanza tra il batiscafo e la strumentazione, nel momento in cui essa si appoggia al fondo, è quindi $L = h + \Delta y = 11,5\text{ m}$

6.8 Dinamica del moto circolare**Problema di: Cinematica - Dinamica - CD0005****Testo** [CD0005] [2★ 2🕒 1a📖]

Caronte, satellite di Plutone, ruota intorno ad esso con un'orbita circolare di raggio $r = 19571\text{ km}$ in un tempo $T = 6,3872\text{ giorni}$. Quanto vale la massa di Plutone?

Spiegazione Caronte compie un'orbita che assumiamo essere circolare e quindi si muove di moto circolare uniforme. L'accelerazione centripeta necessaria a tale movimento è data dall'attrazione gravitazionale tra i due oggetti.

Svolgimento Impostiamo il problema affermando che la forza centripeta su Caronte è data dalla legge di gravitazione universale

$$M_C \cdot \omega^2 \cdot r = G \frac{M_C \cdot M_P}{r^2}$$

dove M_C e M_P sono le masse di Caronte e Plutone, r è il raggio dell'orbita di Caronte, ω è la velocità angolare del moto di Caronte e G la costante di gravitazione universale.

Svolgendo i passaggi algebrici avremo

$$M_P = \frac{\omega^2 \cdot r^3}{G}$$

$$M_P = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{T^2 \cdot G}$$

dove T è il periodo di rivoluzione di Caronte. Facciamo le opportune conversioni:

$$r = 19571\text{ km} = 19571000\text{ m}$$

$$T = 6,3872\text{ giorni} = 6,3872 \cdot 24 \cdot 3600\text{ s} = 551854\text{ s}$$

A questo punto è possibile inserire i dati

$$M_P = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot (19571000 \text{ m})^3}{(551854 \text{ s})^2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}}$$

$$M_P = 1,45 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Questo risultato vale se ipotizziamo inoltre che Plutone abbia una massa molto maggiore di Caronte, cosa non corretta. In tal caso la massa calcolata è in realtà la massa del sistema Plutone + Caronte.

Problema di: Dinamica - CD0005b

Testo [CD0005b] [2★ 3🕒 1a📖]

Sapendo che Venere orbita intorno al Sole ad una distanza $R = 1,08 \cdot 10^{11} \text{ m}$, con periodo $T = 0,615 \text{ anni}$, calcola la massa del Sole.

Spiegazione Qui abbiamo un sistema fatto da un pianeta che orbita di moto circolare uniforme attorno al Sole, quindi la forza di gravità dovuta al sole è una forza di tipo centripeto.

Svolgimento Il periodo di rivoluzione del pianeta è $T = 0,615 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 19394640 \text{ s}$

Essendo che il pianeta ha un moto circolare uniforme possiamo scrivere:

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

La velocità del pianeta è

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

per cui

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r}$$

Semplificando

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1,26 \cdot 10^{33} \text{ m}^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 3,762 \cdot 10^{14} \text{ s}^2} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Problema di: Dinamica - CD0005a**Testo** [CD0005a] [2★ 2⌚ 1a📖]

Un satellite orbita circolarmente ad un'altezza $h = 500 \text{ km}$ dalla superficie terrestre. Calcola velocità ed periodo dell'orbita.

Spiegazione Il satellite in questione sta percorrendo un'orbita circolare la cui forza centripeta è data dalla forza di gravità del pianeta Terra.

Svolgimento Indichiamo con M_T la massa della Terra; con m la massa del satellite, con $R_T = 6371 \text{ km}$ il raggio della Terra; con $r = R_T + h = 6871 \text{ km}$ la distanza del satellite dal centro della Terra; con V la velocità del satellite. Essendo qui la forza di gravità una forza di tipo centripeto possiamo scrivere

$$G \frac{M_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,871 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7613 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il periodo dell'orbita sarà quindi

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 6871 \cdot 10^3 \text{ m}}{7613 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 5671 \text{ s}$$

Problema di: Dinamica - CD0008**Testo** [CD0008] [2★ 3⌚ 1a📖]

Sapendo che un satellite orbita intorno ad un pianeta ad una distanza R , con periodo $T = 150 \text{ giorni}$, quanto vale il periodo di rotazione di un satellite che ruota intorno allo stesso pianeta ad una distanza $R_2 = 4 R$?

Spiegazione Il satellite in questione sta percorrendo un'orbita circolare la cui forza centripeta è data dalla forza di gravità del pianeta intorno al quale orbita.

Svolgimento Indichiamo con M la massa del pianeta; con m la massa del satellite, con R il raggio dell'orbita; con v la velocità del satellite e con T il periodo di rivoluzione. Essendo qui la forza di gravità una forza di tipo centripeto possiamo scrivere

$$G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{R}$$

da cui

$$v^2 = \frac{GM}{R}$$

Il periodo dell'orbita sarà

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2}$$

Unendo le due equazioni avremo

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM}{R}$$

$$\frac{1}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2 R^3}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$$

Consideriamo adesso il secondo satellite che orbita a distanza R_2 ; possiamo scrivere

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2 R_2^3}{GM}$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2 \cdot 4^3 \cdot R^3}{GM} = 4^3 T^2$$

da cui

$$T_2 = 8T = 8 * 150 \text{ giorni} = 1200 \text{ giorni}$$

Problema di: Dinamica - CD0047

Testo [CD0047] [2★ 2👤 1a📖]

Una macchina di massa $m = 800 \text{ kg}$ sta facendo una curva di raggio $r = 20 \text{ m}$ su asfalto bagnato e con le gomme lisce. Tra l'asfalto e le ruote il coefficiente di attrito è $\mu = 0,2$. Quanto vale l'attrito dell'auto sull'asfalto? A quale velocità massima può andare la macchina per non uscire di strada?

Spiegazione Un'automobile percorre una curva di moto circolare uniforme grazie alla forza di tipo centripeto fornita dalla forza di attrito delle ruote con l'asfalto.

Svolgimento La forza di gravità e la forza di attrito radente sull'auto valgono

$$F_g = mg = 800 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7840 \text{ N}$$

$$F_a = \mu F_g = 0,2 \cdot 7840 \text{ N} = 1568 \text{ N}$$

La forza centripeta necessaria per fare la curva dipende dalla velocità dell'auto ed è data dalla forza di attrito delle ruote con l'asfalto.

$$F_c = F_a \quad \Rightarrow \quad m \frac{v^2}{r} = \mu mg$$

$$v = \sqrt{\frac{\mu mgr}{m}} = \sqrt{\frac{1568 \text{ N} \cdot 20 \text{ m}}{800 \text{ kg}}} = 6,261 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Se l'auto viaggia a velocità superiore esce di strada.

Problema di: Cinematica - Dinamica - CD0002**Testo** [CD0002] [2★ 3🕒 1a📖]

In un giorno di sole, un'automobile sta percorrendo una curva di raggio $r = 48\text{ m}$. Sapendo che il coefficiente di attrito tra la gomma e l'asfalto asciutto vale $\mu = 0,6$, a quale velocità massima può viaggiare senza uscire di strada? In caso di pioggia, il coefficiente di attrito scende fino al valore $\mu = 0,4$; a quale velocità deve scendere l'autista per rimanere in strada?

Spiegazione Nel muoversi in curva la macchina subisce la forza centrifuga, che, al fine di non avere incidenti, deve essere contrastata dalla forza di attrito dei pneumatici sull'asfalto. Se le due forze sono almeno uguali, la macchina riesce a seguire la curva. Attenzione soltanto al significato dei valori che otterrete: tali valori sono calcolati teoricamente e rappresentano i valori massimi... non certo quelli di sicurezza. Bastano infatti piccole e semplici variazioni nell'inclinazione della strada o nella qualità dell'asfalto o nella qualità della pulizia del suolo stradale, che i reali valori di sicurezza per le velocità dell'auto sono sicuramente più bassi.

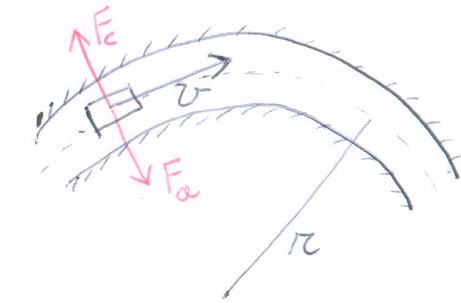


Fig. 6.9: Un'auto in curva

Svolgimento La forza centrifuga sull'auto deve essere uguale alla forza di attrito generata dal peso dell'auto sull'asfalto asciutto.

$$m \frac{v^2}{r} = \mu mg$$

Semplificando la massa e risolvendo per trovare la velocità avremo (indicando con il simbolo $_a$ il caso di asfalto asciutto):

$$v_a = \sqrt{\mu g r} = 16,8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 60,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ripetendo esattamente gli stessi conti nel caso di asfalto bagnato avremo (indicando con il simbolo $_b$ il caso di asfalto bagnato):

$$v_b = \sqrt{\mu g r} = 13,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 49,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Se analizziamo adesso il fatto che la massa dell'auto non rientra nel problema, in quanto si semplifica nei conti, possiamo affermare che questi conti rimangono validi per qualunque automobile.

Problema di: Dinamica - D0018**Testo** [D0018] [2★ 2⌚ 1a📖]

A quale velocità minima deve andare una motocicletta per fare il giro della morte su di una pista circolare di raggio $r = 10\text{ m}$?

Spiegazione Durante il giro della morte, la motocicletta è soggetta a due forze: la forza di gravità verso il basso e la forza centrifuga che schiaccia la moto contro la pista. La moto non si stacca dalla pista quando la forza centrifuga è per lo meno uguale alla forza di gravità.

Svolgimento Eguagliando le due forze che agiscono sulla moto avremo:

$$F_c = F_g$$

$$m \frac{v^2}{r} = mg$$

$$\frac{v^2}{r} = g$$

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{9,8 \frac{m}{s^2} \cdot 10\text{ m}} = 9,9 \frac{m}{s}$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - CD0015**Testo** [CD0015] [3★ 3⌚ 3a📖]

Un oggetto di massa $m = 10\text{ kg}$ è appoggiato su di una piattaforma rotante di raggio $R = 2\text{ m}$, e con coefficienti di attrito dinamico e statico pari a $\mu_d = 2$ e $\mu_s = 5$, ad una distanza $r = 5 \cdot 10^{-2}\text{ m}$ dall'asse di rotazione. Qual è la minima frequenza necessaria per mettere in movimento l'oggetto?

Spiegazione Nel sistema di riferimento dell'oggetto, la forza centrifuga spinge verso l'esterno, mentre la forza di attrito statico mantiene l'oggetto in equilibrio.

Svolgimento Per mettere in moto l'oggetto inizialmente fermo, è necessario che la forza centrifuga sia almeno uguale alla massima forza di attrito statico.

$$m\omega^2 r \geq \mu_s mg$$

$$4\pi^2 r \nu^2 \geq \mu_s g$$

$$\nu \geq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_s g}{r}}$$

A questo punto possiamo inserire i valori ed ottenere il risultato

$$\nu \geq \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{49 \frac{m}{s^2}}{0,05\text{ m}}} = 4,98\text{ Hz}$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - CD0015a**Testo** [CD0015a] [3★ 3⌚ 3a📖]

Un oggetto di massa $m = 10 \text{ kg}$ è appoggiato su di una piattaforma rotante di raggio $R = 2 \text{ m}$, e con coefficienti di attrito dinamico e statico pari a $\mu_d = 2$, ad una distanza $r = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ dall'asse di rotazione. Quanto deve valere il coefficiente di attrito statico per permettere alla piattaforma di ruotare con una frequenza $\nu = 6 \text{ Hz}$?

Spiegazione Nel sistema di riferimento dell'oggetto, la forza centrifuga spinge verso l'esterno, mentre la forza di attrito statico mantiene l'oggetto in equilibrio.

Svolgimento Per mantenere fermo l'oggetto, è necessario che la forza centrifuga sia minore della massima forza di attrito statico.

$$m\omega^2 r < \mu_s mg$$

$$4\pi^2 r \nu^2 < \mu_s g$$

$$4\pi^2 r \nu^2 < \mu_s g$$

$$\mu_s > \frac{4\pi^2 r \nu^2}{g}$$

A questo punto possiamo inserire i valori ed ottenere il risultato

Problema di: Dinamica - D0077**Testo** [D0077] [3★ 3⌚ 1a📖]

Un tavolo privo di attrito ha un foro nel centro. Attraverso quel foro passa un cordino di massa trascurabile con attaccate agli estremi due masse $m_1 = 1 \text{ kg}$ che pende sotto al tavolo, ed $m_2 = 0,1 \text{ kg}$ che ruota di moto circolare uniforme di raggio $r = 40 \text{ cm}$ sul tavolo attorno al foro. Con quale frequenza deve ruotare la massa m_2 per mantenere la massa m_1 in equilibrio?

Spiegazione se la sfera appesa è in equilibrio significa che la somma delle forze che agisce su di essa è nulla. La tensione del filo eguaglia quindi la forza di gravità. La stessa tensione è poi l'unica forza che agisce sulla massa che ruota di moto circolare uniforme.

Svolgimento Analizzando i due oggetti in questione possiamo scrivere per ognuno di essi la seconda legge della dinamica

$$\begin{cases} T = m_1 g \\ T = m_2 \cdot 4\pi^2 \nu^2 \cdot r \end{cases}$$

da cui

$$m_2 \cdot 4\pi^2 \nu^2 \cdot r = m_1 g$$

$$\nu^2 = \frac{m_1 g}{4\pi^2 m_2 r} = 6,2 \text{ Hz}$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - CD0016**Testo** [CD0016] [3★ 3🔒 3a📖]

Un sistema binario di stelle è formato da due stelle tra loro distanti $d = 10^{10} \text{ km}$ e di massa rispettivamente $M_1 = 5 M_s$ ed $M_2 = 20 M_s$, con $M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ la massa del sole. Calcola il periodo di rotazione del sistema nell'ipotesi di orbite circolari.

Spiegazione Le due stelle, a causa dell'attrazione gravitazionale, ruotano attorno al centro di massa del sistema.

Svolgimento La forza di gravità che le fa attrarre è

$$F = G \frac{M_1 M_2}{d^2}$$

Calcolando la posizione del baricentro troviamo quanto dista la prima stella dal centro di massa.

$$x_b = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$$

Mettendoci nel sistema di riferimento del baricentro abbiamo $x_b = 0$ e quindi

$$M_1 x_1 + M_2 x_2$$

$$x_1 = -\frac{M_2}{M_1} x_2$$

in termini di valore assoluto della distanza, le distanze sono definite positive, e quindi

$$r_1 = \frac{M_2}{M_1} r_2$$

ipotizziamo orbite circolari, le quali preservano nel tempo la distanza tra le due stelle che il testo ipotizza costante.

Quindi

$$\begin{cases} r_1 = \frac{M_2}{M_1} r_2 \\ d = r_1 + r_2 \end{cases}$$

e risolvendo

$$\begin{cases} r_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} d \\ r_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} d \end{cases}$$

Il periodo di rotazione del sistema equivale ai periodi di rotazione delle due stelle che sono ovviamente uguali. Considerando la prima stella, sappiamo che la forza che subisce è di tipo centripeto, quindi possiamo scrivere

$$M_1 \omega^2 r_1 = G \frac{M_1 M_2}{d^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{M_2}{M_1 + M_2} d = G \frac{M_2}{d^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = G \frac{M_1 + M_2}{d^3}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G (M_1 + M_2)}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{G (M_1 + M_2)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{10^{39} \text{ m}^3}{6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 50 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} = 2\pi \sqrt{3 \cdot 10^{14} \text{ s}^2} = 3,44 \cdot 10^9 \text{ s} = 109,4 \text{ anni}$$

Problema di: Dinamica - D0053**Testo** [D0053] [3★ 5🕒 2a📖]

In una gara automobilistica un'auto affronta una curva parabolica di raggio $r = 40\text{ m}$, inclinata di $\alpha = 15^\circ$ rispetto all'orizzontale. Sapendo che il coefficiente di attrito delle ruote sull'asfalto è $\mu = 0,6$, quale velocità massima può tenere l'auto senza perdere aderenza con la strada?

Spiegazione Abbiamo un problema di dinamica sul moto circolare e sul piano inclinato. L'auto subisce una forza centrifuga e la forza di gravità, entrambe non allineate con il piano stradale. L'auto viene schiacciata verso il basso dalle componenti di entrambe le forze e spinto lateralmente dalle altre componenti delle stesse forze.

Svolgimento Nella direzione perpendicolare alla strada ci sono tre forze che agiscono: la componente della forza di gravità

$$F_{g\perp} = mg \cdot \cos \alpha$$

la componente della forza centrifuga

$$F_{c\perp} = m \frac{v^2}{r} \sin \alpha$$

ed infine la reazione vincolare del piano stradale

$$R_v = F_{g\perp} + F_{c\perp}$$

$$R_v = mg \cdot \cos \alpha + m \frac{v^2}{r} \sin \alpha$$

Contemporaneamente l'auto deve essere in equilibrio sulla linea parallela al piano stradale, su cui agisce l'altra componente forza di gravità

$$F_{g\parallel} = mg \sin \alpha$$

l'altra componente della forza centrifuga

$$F_{c\parallel} = m \frac{v^2}{r} \cos \alpha$$

e la forza di attrito radente

$$F_a = \mu R_v$$

Quindi

$$F_a = F_{c\parallel} - F_{g\parallel}$$

$$\mu (F_{g\perp} + F_{c\perp}) = F_{c\parallel} - F_{g\parallel}$$

$$\mu \left(mg \cdot \cos \alpha + m \frac{v^2}{r} \sin \alpha \right) = m \frac{v^2}{r} \cos \alpha - mg \sin \alpha$$

$$\mu g \cdot \cos \alpha + g \sin \alpha = \frac{v^2}{r} \cos \alpha - \mu \frac{v^2}{r} \sin \alpha$$

$$g (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{v^2}{r} (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$$

$$v = \sqrt{\frac{gr (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}}$$

Problema di: Dinamica - CD0009**Testo** [CD0009] [3★ 2🕒 2a📖]

Un sistema binario di stelle è formato da due stelle di massa $M_1 = 2 M_s$ ed $M_2 = 8 M_s$. Sapendo che la massa del nostro Sole è $M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ e che le due stelle mantengono tra loro una distanza costante $d = 2 \cdot 10^{10} \text{ m}$, quanto vale il periodo di rotazione del sistema?

Spiegazione Il sistema è formato da due stelle che ruotano con lo stesso periodo intorno al baricentro del sistema. La forza che tiene insieme le due stelle è ovviamente la forza di gravità.

Svolgimento Le due stelle compiono un moto circolare uniforme intorno al baricentro del sistema. Il problema si risolve con un sistema di tre equazioni: le prime due indicano la forza centripeta che muove le stelle; la seconda indica che la somma dei due raggi di rotazione è pari alla distanza tra le due stelle.

$$\begin{cases} G \frac{M_1 M_2}{d^2} = M_1 \frac{v_1^2}{r_1} \\ G \frac{M_1 M_2}{d^2} = M_2 \frac{v_2^2}{r_2} \\ r_1 + r_2 = d \end{cases}$$

Introduciamo il periodo di rotazione, ovviamente uguale per le due stelle

$$\begin{cases} G \frac{M_2}{d^2} = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2} \\ G \frac{M_1}{d^2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2} \\ r_1 + r_2 = d \end{cases}$$

Sappiamo che i due corpi ruotano intorno al baricentro del sistema, per cui

$$M_1 r_1 = M_2 r_2$$

$$M_1 r_1 = M_2 (d - r_1)$$

Quindi

$$r_1 = \frac{d M_2}{M_1 + M_2}$$

$$G \frac{M_2}{d^2} = \frac{4\pi^2 d M_2}{T^2 \cdot (M_1 + M_2)}$$

$$G \frac{(M_1 + M_2)}{d^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

da cui

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d^3}{G (M_1 + M_2)}}$$

$$T = 486572 \text{ sec} = 5,63 \text{ giorni}$$

Problema di: Cinematica e Dinamica - CD0013
Testo [CD0013] [4★ 4🕒 3a📖]

Due satelliti ruotano intorno alla Terra con orbite circolari complanari di verso opposto. Sapendo che le due orbite hanno raggio $r_1 = 2R_T$ ed $r_2 = 3R_T$, ogni quanto tempo i due satelliti si trovano sulla verticale dello stesso luogo?

Spiegazione I due satelliti viaggiano a velocità differenti su orbite di lunghezza differente. Per poter paragonare i due moti è necessario utilizzare la velocità angolare dei due moti.

Svolgimento I due satelliti si muovono in verso opposto e per ritornare allineati devono percorrere complessivamente un intero giro dell'orbita. Quindi

$$2\pi = \omega_1 \cdot \Delta t + \omega_2 \cdot \Delta t$$

Un satellite in orbita circolare subisce come forza centripeta la forza di gravità

$$m\omega^2 r = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\omega = \sqrt{G \frac{M}{r^3}}$$

per cui avremo

$$\Delta t = \frac{1}{2\pi} \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{GM}}{2\pi\sqrt{R_T^3}} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{1}{27}} \right)$$

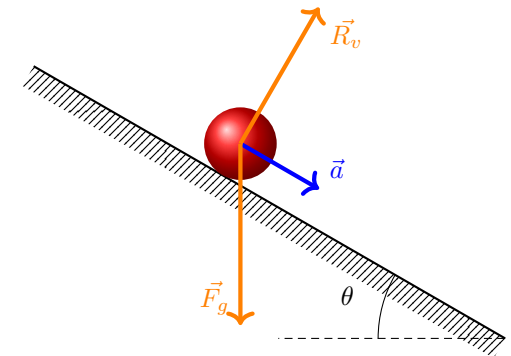
$$\Delta t = \dots$$

6.9 Dinamica del puro rotolamento

Problema di: Dinamica - D0069
Testo [D0069] [4★ 4🕒 3a📖]

Una sfera di massa $m = 10 \text{ kg}$ e raggio $r = 10 \text{ cm}$, rotola senza scivolare su di un piano inclinato di un angolo $\theta = 30^\circ$. Con quale accelerazione si muove lungo il piano inclinato?

Spiegazione Il rotolamento della sfera corrisponde ad una continua rotazione intorno al punto di appoggio della sfera con il piano inclinato. Tale rotolamento è indotto dal momento della forza che viene generato dalla forza di gravità.



Svolgimento Il momento di inerzia di una sfera di raggio r e massa m rispetto ad un qualunque asse di rotazione che passi per il centro è

$$I_0 = \frac{2}{5}mr^2$$

Rispetto invece ad un asse di rotazione tangente alla sfera è

$$I = I_0 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

Il momento della forza di gravità rispetto all'asse del rotolamento è

$$M = mgr \sin \theta$$

Detta α l'accelerazione angolare della sfera, i principi della dinamica ci dicono

$$M = I\alpha = \frac{7}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r}$$

$$mgr \sin \theta = \frac{7}{5} mr^2 \cdot \frac{a}{r}$$

$$g \sin \theta = \frac{7}{5} a$$

$$a = \frac{5}{7} g \sin \theta = 3,5 \frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica rotazionale - D0067

Testo [D0067a] [4★ 6👤 3a📖]

Ad una macchina di Atwood sono appese due masse $m_1 = 2 \text{ kg}$ ed $m_2 = 5 \text{ kg}$. La carrucola cilindrica di raggio $r = 5 \text{ cm}$ e massa $M = 3 \text{ kg}$. Con quale accelerazione si muove il sistema?

Spiegazione Una macchina di Atwood è costituita da una carrucola con perno fisso a cui sono appese due masse. Nel sistema agiscono due forze di gravità entrambe verso il basso che, rispetto alla direzione del filo, risultano opposte. La carrucola ha un momento di inerzia ed una massa quindi rientra nel sistema di equazioni che definisce il problema

Svolgimento Il sistema è costituito da tre oggetti: due oggetti che traslano e la carrucola che ruota. Sappiamo che l'oggetto di massa maggiore accelererà verso il basso, mentre l'altro accelererà verso l'alto. Indicando con α l'accelerazione angolare della carrucola, avremo:

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ (T_2 - T_1) \cdot r = I \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ (T_2 - T_1) \cdot r = I \frac{a}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \\ (-m_1 a - m_1 g - m_2 a + m_2 g) = I \frac{a}{r^2} \end{cases}$$

da cui

$$(m_1 + m_2) \cdot a + I \frac{a}{r^2} = (m_2 - m_1) g$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right) \cdot a = (m_2 - m_1) g$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} \cdot g$$

Dal momento che il testo ci dice che la carrucola è un cilindro di massa R , sappiamo che $\frac{I}{r^2} = \frac{1}{2}M$ e quindi

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} \cdot g$$

Da questa equazione si vede bene come conti solo la forma della carrucola e non la sua dimensione.

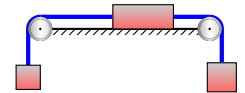
$$a = \frac{3 \text{ kg}}{8,5 \text{ kg}} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,46 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Problema di: Dinamica - D0068

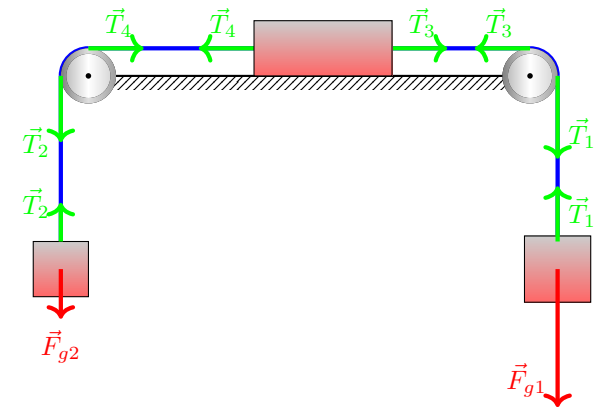
Testo [D0068] [4★ 9🕒 3a📖]

Un oggetto di massa $m_0 = 10 \text{ kg}$ è libero di muoversi senza attrito su di un piano orizzontale, attaccato a due funi a loro volta attaccate a due pesi di massa $m_1 = 5 \text{ kg}$ ed $m_2 = 3 \text{ kg}$.

La carrucola ha momento di inerzia $I = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ e raggio $r = 5 \text{ cm}$. Con quale accelerazione si muove il sistema?



Spiegazione In questo esercizio applichiamo il secondo principio della dinamica ai tre oggetti ed alle due carrucole. Per ogni carrucola dobbiamo considerare un moto rotazionale, per cui l'equazione del moto riguarderà il momento delle forze applicate, il momento di inerzia e l'accelerazione angolare della carrucola. Conosciamo tutte le forze esterne e le masse, quindi possiamo determinare l'accelerazione del sistema.



Svolgimento Visto che tutti gli oggetti sono legati da corde inestensibili di massa trascurabile, allora tutti e tre gli oggetti avranno la stessa accelerazione, seppur con direzioni differenti. Anche i punti esterni della carrucola subiranno la stessa accelerazione tangenziale.

Il sistema di equazioni che possiamo scrivere è

$$\begin{cases} m_1g - T_1 = m_1a \\ T_3 - T_4 = m_0a \\ T_2 - m_2g = m_2a \\ T_4 - T_2 = \frac{I}{r^2}a \\ T_1 - T_3 = \frac{I}{r^2}a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1g - m_1a = T_1 \\ T_2 = m_2a + m_2g \\ T_3 - T_4 = m_0a \\ T_4 - m_2a - m_2g = \frac{I}{r^2}a \\ -T_3 + m_1g - m_1a = \frac{I}{r^2}a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1g - m_1a = T_1 \\ T_2 = m_2a + m_2g \\ T_4 = +m_2a + m_2g + \frac{I}{r^2}a \\ T_3 = +m_1g - m_1a - \frac{I}{r^2}a \\ +m_1g - m_1a - \frac{I}{r^2}a - m_2a - m_2g - \frac{I}{r^2}a = m_0a \end{cases}$$

da cui

$$m_1g - m_2g = m_0a + m_1a + m_2a + 2\frac{I}{r^2}a$$

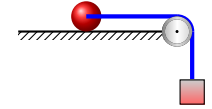
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_0 + m_1 + m_2 + 2\frac{I}{r^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{2 \text{ kg}}{18 \text{ kg} + 0,4 \text{ kg}} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,065 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Problema di: Dinamica - D0090

Testo [D0090] [4★ 4⌚ 3a📖]

Una sfera di raggio r e di massa M è trainata, su di un piano orizzontale, da una fune fissata sull'asse di rotazione della sfera. La fune è a sua volta legata ad un peso di massa m . Sapendo che la sfera rotola senza strisciare, con quale accelerazione si muove? Quanto vale la tensione sul filo?



Spiegazione In questo esercizio applichiamo i principi della dinamica tenendo conto che la sfera compie un puro rotolamento e va quindi trattata come un corpo rigido a cui applicare inoltre l'opportuno vincolo.

Svolgimento Consideriamo il peso che si muove accelerando in verticale: avremo che

$$mg - T = ma$$

Consideriamo la traslazione della sfera: essa è spinta in avanti dalla tensione della corda e indietro dalla forza di attrito statico con il pavimento

$$T - F_{as} = Ma$$

Consideriamo la rotazione della sfera: il momento della forza di attrito statico mette in rotazione la sfera

$$M_{as} = I\alpha$$

da cui

$$F_{as}r = I\frac{a}{r}$$

Aggiungendo a queste equazioni il vincolo di puro rotolamento avremo

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - F_{as} = Ma \\ F_{as}r = I\alpha \\ a = \alpha r \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - I \frac{a}{r^2} = Ma \\ F_{as} = I \frac{a}{r^2} \\ \alpha = \frac{a}{r} \end{cases} \quad \begin{cases} mg = a \left(M + \frac{I}{r^2} + m \right) \\ T = a \left(M + \frac{I}{r^2} \right) \\ F_{as} = I \frac{a}{r^2} \\ \alpha = \frac{a}{r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = g \frac{m}{\left(M + \frac{I}{r^2} + m \right)} \\ T = g \frac{m}{\left(M + \frac{I}{r^2} + m \right)} \left(M + \frac{I}{r^2} \right) \\ F_{as} = g \frac{m}{\left(M + \frac{I}{r^2} + m \right)} \frac{I}{r^2} \\ \alpha = \frac{g}{r} \frac{m}{\left(M + \frac{I}{r^2} + m \right)} \end{cases} \quad \begin{cases} a = g \frac{1}{\left(1 + \frac{M}{m} + \frac{I}{mr^2} \right)} \\ T = mg \frac{1}{\left(1 + \frac{Mr^2}{Mr^2 + I} \right)} \\ F_{as} = mg \frac{1}{\left(1 + \frac{(M+m)r^2}{I} \right)} \\ \alpha = \frac{g}{r} \frac{1}{\left(1 + \frac{M}{m} + \frac{I}{mr^2} \right)} \end{cases}$$

Abbiamo risolto il sistema e quindi il problema. Possiamo ora inserire l'ultima informazione: l'oggetto che rotola è una sfera! Quindi

$$I = \frac{2}{5} Mr^2$$

Riscriviamo quindi il sistema introducendo questa informazione.

$$\begin{cases} a = g \frac{1}{\left(1 + \frac{7}{5} \frac{M}{m} \right)} \\ T = mg \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{7} \frac{m}{M} \right)} \\ F_{as} = mg \frac{1}{\left(1 + \frac{5}{2} \frac{(M+m)}{M} \right)} \\ \alpha = \frac{g}{r} \frac{1}{\left(1 + \frac{7}{5} \frac{M}{m} \right)} \end{cases}$$

Problema di: Dinamica - D0074

Testo [D0074] [4★ 5🕒 3a📖]

Uno Yo-yo è fatto da due cilindri di raggio $r_2 = 5 \text{ cm}$ ed un perno interno di raggio $r_1 = 2 \text{ cm}$ e massa trascurabile, attorno al quale viene arrotolato il filo. Con quale accelerazione cade?

Spiegazione Uno yo-yo cade effettuando un rotolamento puro sul filo che lo sostiene. Il problema è un problema di dinamica che si risolve utilizzando il secondo principio nella sua versione traslazionale, in quella rotazionale, ed utilizzando il vincolo di puro rotolamento

Svolgimento Sullo yo-yo agiscono la tensione del filo e la forza di gravità.

Vale quindi l'equazione per la traslazione:

$$F_g - T = ma$$

Dove l'accelerazione è intesa nella stessa direzione della Forza di gravità.

Vale quindi l'equazione per la rotazione con α l'accelerazione angolare in senso antiorario ed I il momento di inerzia dello yo-yo:

$$T \cdot r_1 = I\alpha$$

Scriviamo adesso la condizione di puro rotolamento, considerando la velocità un vettore nel verso opposto alla Tensione del filo

$$v = \omega r_2$$

da cui

$$a = \alpha r_2$$

Quindi

$$\begin{cases} F_g - T = ma \\ T \cdot r_1 = I\alpha \\ a = \alpha r_1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{a}{r_1} = \alpha \\ T = I \frac{a}{r_1^2} \\ mg - I \frac{a}{r_1^2} = ma \end{cases}$$

ed infine

$$mg = a \left(m + \frac{I}{r_1^2} \right)$$

$$a = \frac{m}{m + \frac{I}{r_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{I}{mr_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{2}mr_2^2}{mr_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{r_2^2}{2r_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{r_2^2}{2r_1^2}} \cdot g$$

$$a = \frac{8}{33} \cdot g$$

Problema di: Dinamica - D0073

Testo [D0073] [5★ 5🕒 3a📖]

Uno Yo-yo è fatto da due cilindri di raggio $r_2 = 5 \text{ cm}$ ed un perno interno di raggio $r_1 = 2 \text{ cm}$ attorno al quale viene arrotolato il filo. Esso si trova su di un piano scabro e rotola senza strisciare su di esso. Determinare il valore ed il verso dell'accelerazione dello yo-yo in funzione della forza applicata orizzontalmente dal filo.

Spiegazione In questo problema abbiamo un filo che esercita una forza in modo tale da dare al corpo rigido sia un'accelerazione lineare, sia una accelerazione angolare. Essendo in una condizione di puro rotolamento, la forza di attrito statico agisce sul punto di contatto tra il corpo ed il piano. Il terzo principio della dinamica, nella versione lineare e rotazionale, insieme al vincolo di puro rotolamento, risolvono il problema.

Svolgimento Sullo yo-yo agiscono la tensione del filo e la forza di attrito con il piano.

Vale quindi l'equazione per la traslazione:

$$T - F_a = ma$$

$$T - F_a = ma$$

Dove l'accelerazione è intesa nella stessa direzione della tensione del filo.

Vale quindi l'equazione per la rotazione con α l'accelerazione angolare in senso antiorario ed I il momento di inerzia dello yo-yo:

$$T \cdot r_1 - F_a \cdot r_2 = I\alpha$$

Scriviamo adesso la condizione di puro rotolamento, considerando la velocità un vettore nel verso opposto alla forza di attrito

$$v = -\omega r_2$$

da cui

$$a = -\alpha r_2$$

Quindi

$$\begin{cases} T - F_a = ma \\ T \cdot r_1 - F_a \cdot r_2 = I\alpha \\ a = -\alpha r_2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} T - ma = F_a \\ \alpha = -\frac{a}{r_2} \\ T \cdot r_1 - T \cdot r_2 + ma \cdot r_2 = -I \frac{a}{r_2} \end{cases}$$

e quindi in particolare

$$T(r_1 - r_2) = -mar_2 - \frac{I}{r_2}a$$

$$a = \frac{T(r_2 - r_1)}{mr_2 + \frac{I}{r_2}}$$

$$a = \frac{T}{m + \frac{I}{r_2^2}} \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)$$

Problema di: Elettromagnetismo - D0072

Testo [D0072] [5★ 6👤 3a📖]

Uno Yo-yo di massa complessiva $M = 100 \text{ g}$, è fatto da due cilindri di raggio $r_2 = 5 \text{ cm}$ ed un perno interno di massa trascurabile e di raggio $r_1 = 1 \text{ cm}$ attorno al quale viene arrotolato il filo. Lo yo-yo si trova su di un piano scabro e rotola senza strisciare su di esso. Determinare il valore ed il verso dell'accelerazione dello yo-yo in funzione della forza applicata sul filo e della sua angolazione θ rispetto al piano (con $0 \leq \theta \leq 180^\circ$).

Spiegazione La forza fatta dal filo e la forza di attrito contribuiscono all'accelerazione dell'oggetto. La condizione di puro rotolamento permetterà di risolvere l'equazione del moto e calcolare l'accelerazione.

Svolgimento Posizioniamo il nostro sistema di riferimento orientato verso destra con l'asse x orizzontale parallelo al piano.

Indicata con θ l'angolazione della forza fatta sul filo rispetto al piano, ipotizziamo che il filo sia arrotolato in modo da indurre una rotazione antioraria dello yo-yo.

La forza sul filo genera un'accelerazione del baricentro dello yo-yo e quindi una sua accelerazione angolare visto che rotola senza strisciare.

Consideriamo la forza F sul filo sempre positiva. Sarà il valore di θ ad indicarne l'orientazione.

L'accelerazione angolare α è intesa positiva per rotazioni orarie.

L'equazione del moto rotatorio è quindi (ipotizzando la forza di attrito rivolta nel verso positivo dell'asse x)

$$-F \cdot r - F_{as} \cdot R = M\alpha$$

La condizione di puro rotolamento è

$$\alpha = a \cdot R$$

L'equazione del moto traslatorio è

$$F \cos \theta + F_{as} = ma$$

Quindi

$$\begin{cases} -F \cdot r - F_{as} \cdot R = I\alpha \\ a = \alpha \cdot R \\ F \cos \theta + F_{as} = Ma \end{cases}$$

da cui, sostituendo le prime due equazioni nella terza, avremo

$$Ma = F \cos \theta - \frac{I \frac{a}{R} + F \cdot r}{R}$$

$$Ma = F \cos \theta - \frac{\frac{1}{2}MRa + F \cdot r}{R}$$

$$Ma = F \cos \theta - \frac{1}{2}Ma - \frac{F \cdot r}{R}$$

$$\frac{3}{2}Ma = F \left(\cos \theta - \frac{r}{R} \right)$$

$$a = \frac{2F}{3M} \left(\cos \theta - \frac{r}{R} \right)$$

Da questa equazione si vede che il verso dell'accelerazione dipende dall'angolo θ

L'accelerazione sarà nel verso positivo delle x per angoli θ tali che

$$\cos \theta > \frac{r}{R}$$

e sarà invece nel verso opposto per angoli maggiori.

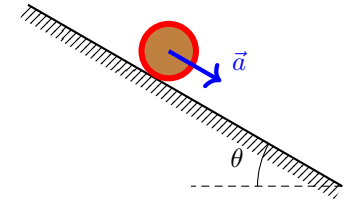
Con i dati del testo l'angolo θ di separazione tra le due differenti situazioni fisiche è

$$\theta = \arccos \frac{1}{5} = 78,5^\circ$$

Problema di: Principi della dinamica - D0099

Testo [D0099] [4★ 5🕒 3a📖]

Su di un piano inclinato di $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale, rotola senza strisciare un cilindro composito formato da due materiali differenti. Il cilindro è formato da un cilindro interno di piombo, di raggio $r_a = 4 \text{ cm}$ e densità $\rho_a = 11,34 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, e da una corona cilindrica esterna di ferro, di raggio esterno $r_b = 5 \text{ cm}$ e densità $\rho_b = 7,85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$. Il cilindro e la corona sono solidali tra loro. Con quale accelerazione si muove il sistema lungo il piano inclinato?



Spiegazione E' un problema di dinamica in cui si applica il secondo principio della dinamica sia nella forma lineare che rotazionale, e la condizione di puro rotolamento.

Svolgimento Concentriamo la nostra attenzione lungo la linea del piano inclinato in quanto lungo la linea ad esso perpendicolare le forze sono in equilibrio.

Avremo la forza di gravità in avanti e la forza di attrito indietro. Per cui

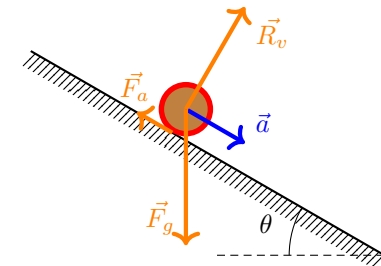
$$F_g \sin \theta - F_a = ma$$

Dal punto di vista rotazionale possiamo scrivere che

$$F_a \cdot r_b = I\alpha$$

ed infine la condizione di puro rotolamento

$$\alpha r = a$$



Quindi

$$\begin{cases} F_g \sin \theta - F_a = m_{tot} a \\ F_a \cdot r_b = I \alpha \\ \alpha r_b = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_a = -m_{tot} a + F_g \sin \theta \\ (-m_{tot} a + F_g \sin \theta) \cdot r_b = I \alpha \\ \frac{(-m_{tot} a + F_g \sin \theta) \cdot r_b^2}{I} = a \end{cases}$$

Da cui

$$(I + m_{tot} r_b^2) a = F_g r_b^2 \sin \theta$$

$$a = \frac{F_g r_b^2 \sin \theta}{I + m_{tot} r_b^2}$$

esplicitiamo la forza di gravità

$$a = \frac{m_{tot} g r_b^2 \sin \theta}{I + m_{tot} r_b^2}$$

e dividiamo per la massa e per il quadrato di r_b

$$a = \frac{g \sin \theta}{\frac{I}{m_{tot} r_b^2} + 1}$$

Adesso dobbiamo calcolare il momento di inerzia del cilindro composito. Esso sarà la somma dei momenti di inerzia delle sue due parti.

Per cui

$$I = I_a + I_b = \frac{1}{2} m_a r_a^2 + \frac{1}{2} m_b (r_b^2 - r_a^2)$$

Indicando con h le altezze dei due oggetti, le masse dei due oggetti sono

$$m_a = \rho_a \cdot \pi r_a^2 h$$

$$m_b = \rho_b \cdot \pi (r_b^2 - r_a^2) h$$

$$m_{tot} = m_a + m_b = \pi h [\rho_a r_a^2 + \rho_b (r_b^2 - r_a^2)]$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} \rho_a \cdot \pi r_a^4 h + \frac{1}{2} \rho_b \cdot \pi (r_b^2 - r_a^2)^2 h$$

$$I = \frac{1}{2} \pi h [\rho_a r_a^4 + \rho_b (r_b^2 - r_a^2)^2]$$

Ora calcoliamo la quantità

$$\frac{I}{m_{tot} r_b^2} = \frac{1}{2} \frac{[\rho_a r_a^4 + \rho_b (r_b^2 - r_a^2)^2]}{r_b^2 [\rho_a r_a^2 + \rho_b (r_b^2 - r_a^2)]}$$

divido per r_b^4

$$\frac{I}{m_{tot} r_b^2} = \frac{1}{2} \frac{[\rho_a \frac{r_a^4}{r_b^4} + \rho_b (1 - \frac{r_a^2}{r_b^2})^2]}{[\rho_a \frac{r_a^2}{r_b^2} + \rho_b (1 - \frac{r_a^2}{r_b^2})]}$$

Adesso possiamo mettere nei conti i dati del problema

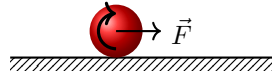
$$\frac{I}{m_{tot} r_b^2} = \frac{1}{2} \frac{[11,34 \frac{g}{cm^3} \cdot 0,41 + 7,85 \frac{g}{cm^3} \cdot 0,13]}{[11,34 \frac{g}{cm^3} \cdot 0,64 + 7,85 \frac{g}{cm^3} \cdot 0,36]} = 0,28$$

e quindi

$$a = 0,14 g = 1,38 \frac{m}{s^2}$$

Problema di: Dinamica - D0112**Testo** [D0112] [4★ 4👤 3a📖]

Una sfera di raggio $r = 0,3\text{ m}$ e massa $m = 2\text{ kg}$, rotola senza strisciare su di un piano orizzontale sotto l'azione di una forza orizzontale $F = 70\text{ N}$ applicata nel baricentro. Calcola la sua accelerazione. Quanto deve valere il coefficiente di attrito statico con il piano?



Spiegazione Un esercizio in cui semplicemente applichiamo le leggi della dinamica. Magari è complesso, ma non concettualmente.

Svolgimento Oltre alla forza F agisce la forza di attrito statico dalla parte opposta. La ruota rotola senza strisciare, quindi vale la condizione di puro rotolamento. Infine, la forza di attrito statico genera un momento di una forza che causa l'accelerazione angolare della ruota. Quindi possiamo scrivere il sistema

$$\begin{cases} F - F_{as} = ma \\ a = \alpha r \\ F_{as} \cdot r = I\alpha \end{cases}$$

Svolgiamo tutti i passaggi. Per prima cosa ricaviamo α dalla seconda equazione e sostituiamola nella terza.

$$\begin{cases} F - F_{as} = ma \\ \alpha = \frac{a}{r} \\ F_{as} \cdot r = I \frac{a}{r} \end{cases}$$

Successivamente ricaviamo la forza di attrito statica e la sostituiamo nella prima.

$$\begin{cases} F - F_{as} = ma \\ \alpha = \frac{a}{r} \\ F_{as} = I \frac{a}{r^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F - I \frac{a}{r^2} = ma \\ \alpha = \frac{a}{r} \\ F_{as} = I \frac{a}{r^2} \end{cases}$$

A questo punto ricaviamo l'accelerazione dalla prima

$$\begin{cases} F = a \left(\frac{I}{r^2} + m \right) \\ \alpha = \frac{a}{r} \\ F_{as} = I \frac{a}{r^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{F}{\left(\frac{I}{r^2} + m \right)} = F \frac{r^2}{(I + mr^2)} \\ \alpha = \frac{a}{r} \\ F_{as} = I \frac{a}{r^2} \end{cases}$$

Ed infine sostituiamo l'accelerazione nelle altre due.

$$\begin{cases} a = F \frac{r^2}{(I + mr^2)} \\ \alpha = F \frac{r}{(I + mr^2)} \\ F_{as} = F \frac{I}{(I + mr^2)} \end{cases}$$

Considerando che l'oggetto è una sfera, e quindi $I = \frac{2}{5}mr^2$, il sistema diventa

$$\begin{cases} a = F \frac{r^2}{\left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2 \right)} = F \frac{r^2}{\left(\frac{7}{5}mr^2 \right)} = \frac{5}{7} \frac{F}{m} \\ \alpha = \frac{5}{7} \frac{F}{mr} \\ F_{as} = F \frac{\frac{2}{5}mr^2}{\left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2 \right)} = \frac{2}{7} F \end{cases}$$

La forza di attrito statico che effettivamente agisce sulla sfera è

$$F_{as} = 20 \text{ N}$$

. La massima forza di attrito che il piano può sviluppare è

$$F_{as-max} = \mu_s mg$$

da cui ricaviamo il coefficiente di attrito statico

$$\begin{aligned} \mu_s mg &> F_{as} \\ \mu_s &> \frac{F_{as}}{mg} = 1,02 \end{aligned}$$

Problema di: Dinamica rotazionale - D0110

Testo [D0110] [4★ 8👤 3a📖]

Ad una macchina di Atwood sono appese due masse $m_1 = 2 \text{ kg}$ ed $m_2 = 1 \text{ kg}$. La carrucola cilindrica ha massa $M = 4 \text{ kg}$. I cavi non scivolano sulla carrucola. La macchina si trova dentro un ascensore che accelera verso l'alto con accelerazione $a = 5 \frac{m}{s^2}$. Calcola l'accelerazione dei due corpi appesi nel sistema di riferimento dell'ascensore e nel sistema di riferimento inerziale del laboratorio. Calcola inoltre le tensioni dei fili. Assumi pure che l'accelerazione di gravità della Terra sia $g = 10 \frac{m}{s^2}$. [Walter Lewin problem #16]

Spiegazione Una macchina di Atwood è costituita da una carrucola con perno fisso a cui sono appese due masse. Nel sistema agiscono due forze di gravità entrambe verso il basso che, rispetto alla direzione del filo, risultano opposte. La carrucola ha un momento di inerzia ed una massa quindi rientra nel sistema di equazioni che definisce il problema. Il tutto si trova in un ascensore che accelera verso l'alto. Quindi bisogna tenere conto di ciò che accade nel sistema di riferimento non inerziale dell'ascensore.

Svolgimento La migliore spiegazione possibile è nel video riportato qui sotto.

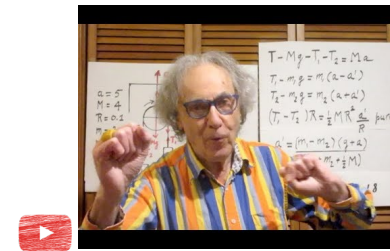


Fig. 6.10: Guarda il video youtu.be/elDZwKCKQzs

Problema di: Dinamica del puro rotolamento - D0101**Testo** [D0101] [5★ 8🕒 3a📖]

Una palla da bowling di massa $M = 8 \text{ kg}$ viene lanciata con una velocità iniziale $U_0 = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Inizialmente non ruota. A causa dell'attrito con la pista ($\mu_d = 0,2$) essa aumenta gradualmente la sua velocità di rotazione fino a raggiungere una condizione di puro rotolamento. Quale velocità avrà e quanta strada avrà fatto in quell'istante?

Spiegazione E' un problema sul moto uniformemente accelerato per un corpo rigido. Serve conoscere la condizione di puro rotolamento. Attenzione che l'applicazione della condizione di puro rotolamento, fatta sulla distanza percorsa, può essere controintuitiva.

Svolgimento Sappiamo che la palla da bowling inizialmente non ruota, e quindi striscia sulla pista mentre avanza, e sappiamo che gradualmente aumenta la sua velocità di rotazione fino a raggiungere la condizione di puro rotolamento. La rotazione è causata dall'attrito dinamico tra la palla e la pista

$$F_{ad} = \mu_d Mg$$

L'attrito crea un momento torcente sulla palla

$$T = F_{ad} \cdot R = \mu_d MgR$$

il quale per il secondo principio della dinamica vale¹

$$\mu_d MgR = I\dot{\omega}$$

¹Ricordo che l'accelerazione angolare che spesso ho indicato con α può essere più comodamente indicata con $\dot{\omega}$ che indica come l'accelerazione sia legata alla variazione nel tempo della velocità angolare.



Fig. 6.11: Guarda il video youtu.be/N4Yy_E6JDyo

Il momento di inerzia della sfera è

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

e quindi

$$\mu_d MgR = \frac{2}{5} M R^2 \dot{\omega}$$

$$\mu_d g = \frac{2}{5} R \dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{5\mu_d g}{2R}$$

Come potete vedere l'accelerazione angolare è costante e quindi, rispetto al baricentro della sfera, abbiamo un moto rotazionale uniformemente accelerato di equazione

$$\omega = \dot{\omega} \Delta t + \omega_i = \frac{5\mu_d g}{2R} \Delta t$$

Contemporaneamente la sfera si sta muovendo in avanti. Su di essa agisce solo la forza di attrito, e quindi possiamo scrivere

$$F_{ad} = M a$$

$$a = \mu_d g$$

Anche l'accelerazione del baricentro della sfera è costante; il baricentro si muove quindi di moto uniformemente accelerato. Teniamo presente che l'accelerazione è rivolta in verso opposto alla velocità, e che quanto scritto rappresenta il modulo dell'accelerazione, quindi

$$U = -a \Delta t + U_i = -\mu_d g \Delta t + U_i$$

La velocità quindi diminuisce man mano che passa il tempo, come effettivamente ci si aspetta in presenza del solo attrito dinamico.

Abbiamo quindi una sfera che avanza con velocità decrescente e rotola con velocità angolare crescente. Mentre questo accade sappiamo che $\omega R < U$ infatti ω partiva da zero, mentre U partiva da un valore non nullo.

Il problema chiede di calcolare due grandezze fisiche nell'istante in cui la sfera raggiunge la condizione di puro rotolamento, rappresentata da una relazione tra la velocità lineare del baricentro e la velocità angolare del corpo rigido.

$$U = \omega R$$

Quindi

$$-\mu_d g \Delta t + U_i = \frac{5\mu_d g}{2R} \Delta t \cdot R$$

$$\Delta t = \frac{U_i}{\frac{5\mu_d g}{2} + \mu_d g}$$

$$\Delta t = \frac{2U_i}{7\mu_d g} = 1,312 \frac{m}{s}$$

Sappiamo quindi adesso quanto tempo passa prima di raggiungere la condizione di puro rotolamento, e possiamo calcolarci velocità e distanza percorsa.

$$U_{pr} = -\mu_d g \frac{2U_i}{7\mu_d g} + U_i$$

$$U_{pr} = \frac{5U_i}{7} = 6,429 \frac{m}{s}$$

$$\Delta S = -\frac{1}{2} a \Delta t^2 + U_i \Delta t$$

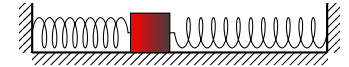
$$\Delta S_{pr} = -\frac{2U_i^2}{49\mu_d g} + U_i \frac{2U_i}{7\mu_d g} = \frac{12U_i^2}{49\mu_d g} = 10,121 m$$

6.10 Dinamica del moto armonico

Problema di: Dinamica - D0078

Testo [D0078] [3★ 2⌚ 3a📖]

Un oggetto di massa $m = 2 kg$ oscilla su di un piano orizzontale senza attrito, attaccato a due molle di costante elastica $k_1 = 3 \frac{N}{m}$ e $k_2 = 5 \frac{N}{m}$. Con quale periodo oscilla il sistema?



Spiegazione Il sistema ha un periodo in quanto oscilla di moto armonico. Per trovare il periodo è sufficiente scrivere l'equazione del moto.

Svolgimento Immaginiamo di spostare la massa di una quantità Δx . Avremo

$$-k_2 \Delta x - k_1 \Delta x = ma$$

$$a = \frac{k_1 + k_2}{m} \Delta x$$

Paragonando questa equazione con l'equazione del moto armonico

$$a = -\omega^2 \Delta x$$

avremo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} = 0,314 s$$

Problema di: Cinematica - Dinamica - CD0006**Testo** [CD0006] [3★ 3🕒 3a📖]

Immaginate un tunnel che attraversi tutto il pianeta Terra (ipotizzandola come una sfera perfetta ed omogenea) passando per il suo centro. Se lasciamo cadere un oggetto nel tunnel, di che tipo di moto si muoverà?

Spiegazione Per capire di che tipo di moto si muove, bisogna costruirsi la legge oraria del moto. Dobbiamo quindi capire quale accelerazione subisce l'oggetto.

Svolgimento Immaginiamo che l'oggetto si trovi ad una certa distanza r dal centro della terra. La forza che agisce sull'oggetto è la forza di gravità generata su di esso dalla sola massa che si trova a distanze dal centro della Terra minori di quella dell'oggetto. Il guscio sferico esterno infatti non contribuisce. Quindi, indicando con m la massa dell'oggetto e con M la massa della porzione di Terra a distanze dal centro inferiori a quella dell'oggetto, avremo

$$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{a} = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}_r = -G \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} \vec{u}_r = -G \frac{4}{3}\pi \rho r \vec{u}_r$$

Il segno meno indica che l'accelerazione è sempre rivolta verso il centro della Terra, e quindi opposta al versore $\vec{u}_r$.

Dall'equazione per l'accelerazione si deduce che il moto deve essere di tipo armonico.

Problema di: Cinematica e Dinamica - CD0014**Testo** [CD0014] [4★ 4🕒 3a📖]

Un galleggiante di forma cilindrica, di base S ed altezza H , appesantito sul fondo, galleggia in posizione verticale in acqua, immerso per un'altezza h_i . Spostato leggermente in basso, e poi rilasciato, comincia a oscillare nell'acqua. Quanto vale il periodo dell'oscillazione?

Spiegazione Per dimostrare che il moto è oscillatorio, scriviamo l'equazione del moto e vediamo che ha la forma

$$a = -\omega^2 x$$

Svolgimento Nella condizione di equilibrio, la forza di gravità è uguale alla forza di Archimede

$$mg = \rho_{H_2O} g S h_{imm}$$

Se immergiamo il galleggiante di una quantità x , la forza totale che agisce sul galleggiante sarà

$$mg - \rho_{H_2O} g S (h_{imm} + x) = ma$$

quindi

$$\rho_{H_2O} g S h_{imm} - \rho_{H_2O} g S h_{imm} - \rho_{H_2O} g S x = ma$$

$$-\rho_{H_2O} g S x = ma$$

$$a = -\frac{\rho_{H_2O} g S}{m} x$$

Da qui si capisce che il moto è armonico, quindi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_{H_2O} g S}}$$

Problema di: Moto armonico - D0092**Testo** [D0092] [4★ 4🕒 3a📖]

In un tubo a forma di "U" aperto da entrambi i lati è presente dell'acqua. Inizialmente la differenza di livello dell'acqua nei due bracci del tubo è $\Delta h_i = 10 \text{ cm}$. Il tubo è pieno di acqua per una lunghezza $L = 1 \text{ m}$. Inizialmente l'acqua è ferma. Calcolate la frequenza con cui il livello dell'acqua comincerà ad oscillare all'interno del tubo.

Spiegazione In questo esercizio il livello del liquido nei due bracci del tubo è differente. Questo significa che il peso della colonna di liquido più alta mette in movimento tutto il liquido nel tubo. La colonna di liquido più alta comincia ad abbassarsi mentre quella più alta a sollevarsi. Quando i due livelli sono uguali, il liquido ha assunto la massima velocità e continua il suo movimento; il braccio del tubo nel quale la colonna di liquido era inizialmente bassa, adesso contiene una colonna di liquido più alta. Si innesca un movimento oscillatorio caratterizzato da una certa frequenza di oscillazione. Per trovare la frequenza di oscillazione è sufficiente trovare la relazione tra l'accelerazione del liquido e l'altezza del dislivello di liquido tra le due colonne.

Svolgimento Cominciamo con il fissare un sistema di riferimento. Noi sappiamo che il liquido nella posizione iniziale occupa due bracci del tubo. Le due colonne di liquido sono una più alta dell'altra. Concentriamo la nostra attenzione sui livelli di liquido nelle due colonne. Durante l'oscillazione il liquido si sposta da una colonna all'altra; il livello del liquido in ognuna delle due colonne oscilla quindi intorno ad un'altezza che si trova, nell'istante iniziale, a metà altezza tra le due colonne. Fissiamo il centro dell'oscillazione del livello del liquido come nostro punto di riferimento.

Per cui, all'inizio, la colonna più alta si trova all'altezza $\Delta x_i = \frac{\Delta h}{2}$ e quella più bassa all'altezza $\Delta x_f = -\frac{\Delta h}{2}$

Per ottenere l'equazione del moto partiamo da

$$F = ma$$

dove m è la massa totale di liquido nel tubo, a è l'accelerazione con cui si muove il liquido nel tubo e F è la forza con cui l'acqua in eccesso da un lato del tubo viene tirata verso il basso. Ciò che innesca il movimento è infatti la forza di gravità; ma tale forza agisce in verso opposto nei due bracci del tubo, per cui la risultante della forza di gravità coincide con la forza che si applica alla sola acqua in eccesso in un lato del tubo.

La forza di gravità che spinge l'acqua nel tubo è quindi soltanto quella che agisce sull'eccesso di acqua in un lato del tubo, per cui

$$\rho \cdot S \cdot 2\Delta x \cdot g = \rho \cdot L \cdot S \cdot a$$

da cui

$$a = \frac{2g}{L} \Delta x$$

L'accelerazione è direttamente proporzionale alla posizione del livello del liquido. Questa equazione indica che siamo di fronte ad un moto armonico che prevede un'oscillazione intorno ad un punto di equilibrio il cui periodo vale

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$$

La frequenza è quindi

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

Problema di: Dinamica - D0081**Testo** [D0081] [5★ 6🕒 3a📖]

Una sfera di raggio $r = 2\text{ cm}$ oscilla su di una rotaia sferica di raggio $R = 1\text{ m}$ rotolando su di essa senza strisciare. Quanto vale il periodo dell'oscillazione?

Spiegazione La differenza tra un pendolo semplice e la sfera che rotola su di un binario è che la sfera ha sia energia cinetica traslazionale che rotazionale. Il periodo lo si ricava esprimendo l'equazione del moto.

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che la sfera compie un percorso circolare di raggio $r_{osc} = R - r$. L'angolo rispetto al centro dell'oscillazione lo chiameremo θ e per convenzione esso cresce in senso antiorario. Tale sfera è quindi nel suo percorso assimilabile ad un pendolo a parte che la reazione vincolare del filo viene esercitata dalla rotaia. La fondamentale differenza è che la massa del pendolo oscilla mentre la sfera sulla rotaia... rotola!

La condizione di puro rotolamento implica che $U_{sfera} = \omega_{sfera} \cdot r$ indicando ω_{sfera} positivo se in senso orario, il che corrisponde a valori di θ crescenti.

Consideriamo un istante in cui la sfera si trova a valori di θ negativi.

La sfera rotola sotto l'azione del momento della forza di gravità

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g = I_{sfera} \vec{\alpha}_{sfera}$$

Il momento di questa forza è orario, così come l'accelerazione che ne segue. L'accelerazione angolare della sfera corrisponde però ad un'accelerazione angolare del pendolo di verso opposto e quindi

$$\omega_{sfera} \cdot r = -\omega_{pendolo} \cdot (R - r)$$

$$\alpha_{sfera} \cdot r = -\alpha_{pendolo} \cdot (R - r)$$

Avremo quindi

$$mgr \sin \theta = I_{sfera} \vec{\alpha}_{sfera} = -I_{sfera} \frac{R - r}{r} \alpha_{pendolo}$$

$$\alpha_{pendolo} = -\frac{mgr^2}{(R - r) I_{sfera}} \sin \theta$$

Per piccole oscillazioni possiamo affermare

$$\sin \theta \sim \theta$$

e quindi

$$\alpha_{pendolo} = -\frac{mgr^2}{(R - r) I_{sfera}} \theta$$

Il periodo dell'oscillazione risulta quindi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R - r) \cdot I_{sfera}}{mgr^2}}$$

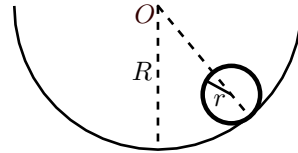
Nel caso della sfera avremo infine

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2(R - r)}{5g}}$$

Problema di: Dinamica del moto armonico - D0100**Testo** [D0100] [5★ 4🕒 3a📖]

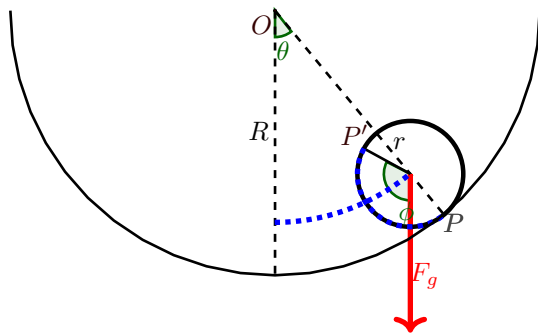
Un cilindro omogeneo pieno, di massa m e raggio r , rotola senza strisciare all'interno di un cilindro di raggio interno R . Nell'approssimazione di piccoli angoli, esso oscillerà di moto armonico. Calcola il periodo delle oscillazioni.

[Walter Lewin problem #23]



Spiegazione E' un problema di dinamica del moto armonico per un corpo rigido in condizione di puro rotolamento. Si consiglia di vedere i video Youtube codice rjz0XeK0gr0

Svolgimento Il cilindro mobile, che chiameremo CM, è spinto dalla forza di gravità verso il basso e dalla forza di attrito statico con il cilindro fisso. Quest'ultima è la causa del rotolamento.



Il punto di contatto tra i due cilindri non striscia, ed in ogni istante è considerabile come punto di rotazione di CM.

Il momento di inerzia di CM, rispetto al suo asse centrale, è $I = \frac{1}{2}mr^2$. Considerato che il punto P si trova sul bordo del cilindro dobbiamo utilizzare il teorema degli assi paralleli ed otteniamo il momento di inerzia rispetto al punto P

$$I_P = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

Quindi l'equazione che descrive la dinamica della rotazione, rispetto al punto P, è²

$$\begin{aligned} mgr \sin \theta &= -\frac{3}{2}mr^2\ddot{\phi} \\ g \sin \theta &= -\frac{3}{2}r\ddot{\phi} \end{aligned}$$

che nell'approssimazione di piccoli angoli di oscillazione diventa

$$g\theta = -\frac{3}{2}r\ddot{\phi}$$

Il punto P, considerato come punto su CM, sebbene non strisci sul cilindro, è istante dopo istante un punto differente. La lunghezza dell'arco descritto da P su CM deve essere uguale alla distanza percorsa dall'asse di rotazione di CM.

Imponiamo in questo modo la condizione di puro rotolamento.

$$\theta(R-r) = \phi r$$

che per le accelerazioni angolari, essendo i raggi costanti, diventa

$$\ddot{\theta}(R-r) = \ddot{\phi}r$$

Quindi otteniamo la formula

$$g\theta = -\frac{3}{2}r\ddot{\theta}\frac{R-r}{r}$$

da cui

$$\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3(R-r)}\theta$$

Questa è l'equazione del moto di un moto armonico semplice di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

²Per gli studenti del liceo è necessaria una spiegazione sulla simbologia utilizzata nella formula seguente. I due puntini messi sopra una grandezza fisica, in questo caso l'angolo ϕ indicano la derivata seconda rispetto al tempo di quella grandezza. Per cui se ϕ è un angolo, allora $\dot{\phi}$ è la velocità angolare e $\ddot{\phi}$ è un'accelerazione angolare. Se x è una posizione, allora $\dot{x}$ è una velocità e $\ddot{x}$ è un'accelerazione.

-  [\[youtu.be/_2Hu4GcOS9Y\]](https://youtu.be/_2Hu4GcOS9Y) Lavoro di una forza
-  [\[youtu.be/piMb-kxo1PQ\]](https://youtu.be/piMb-kxo1PQ) Lavoro di una forza
-  [\[youtu.be/80vKZZJI-3k\]](https://youtu.be/80vKZZJI-3k) Potenza
-  [\[youtu.be/ckj_ac32amE\]](https://youtu.be/ckj_ac32amE) Teorema dell'energia cinetica
-  [\[youtu.be/HT3rdfuyICY\]](https://youtu.be/HT3rdfuyICY) Energia potenziale gravitazionale sulla superficie di un pianeta
-  [\[youtu.be/GKyjmZ02g_E\]](https://youtu.be/GKyjmZ02g_E) Energia potenziale elastica
-  [\[youtu.be/RBSwcQ42mY4\]](https://youtu.be/RBSwcQ42mY4) Relazione tra i tre principi della dinamica e la quantità di moto
-  [\[youtu.be/8qK9CO4IEAo\]](https://youtu.be/8qK9CO4IEAo) Classificazione degli urti

7.1 Semplice calcolo di energie

Problema di: Leggi di Conservazione - L0031

Testo [L0031] [1★ 1🕒 2a📖]

Un blocco di cemento di massa $m = 500 \text{ kg}$ è tenuto da una gru ad un'altezza $h_i = 10 \text{ m}$ e poi appoggiato dentro un pozzo ad una profondità $h_f = -5 \text{ m}$ sotto il livello del terreno. Di quanto è variata l'energia potenziale gravitazionale dell'oggetto a causa del suo spostamento?

Spiegazione Il blocco di cemento cambia la sua altezza e quindi cambia il suo valore di energia potenziale gravitazionale.

Svolgimento L'energia potenziale gravitazionale iniziale dell'oggetto vale

$$U_i = mgh_i = 500 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 49000 \text{ J}$$

L'energia potenziale gravitazionale finale dell'oggetto vale

$$U_f = mgh_f = 500 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-5 \text{ m}) = -24500 \text{ J}$$

Quindi

$$\Delta U = U_f - U_i = -73500 \text{ J}$$

che giustamente è negativa visto che il blocco di cemento sta scendendo.