

Parte II

Laboratorio

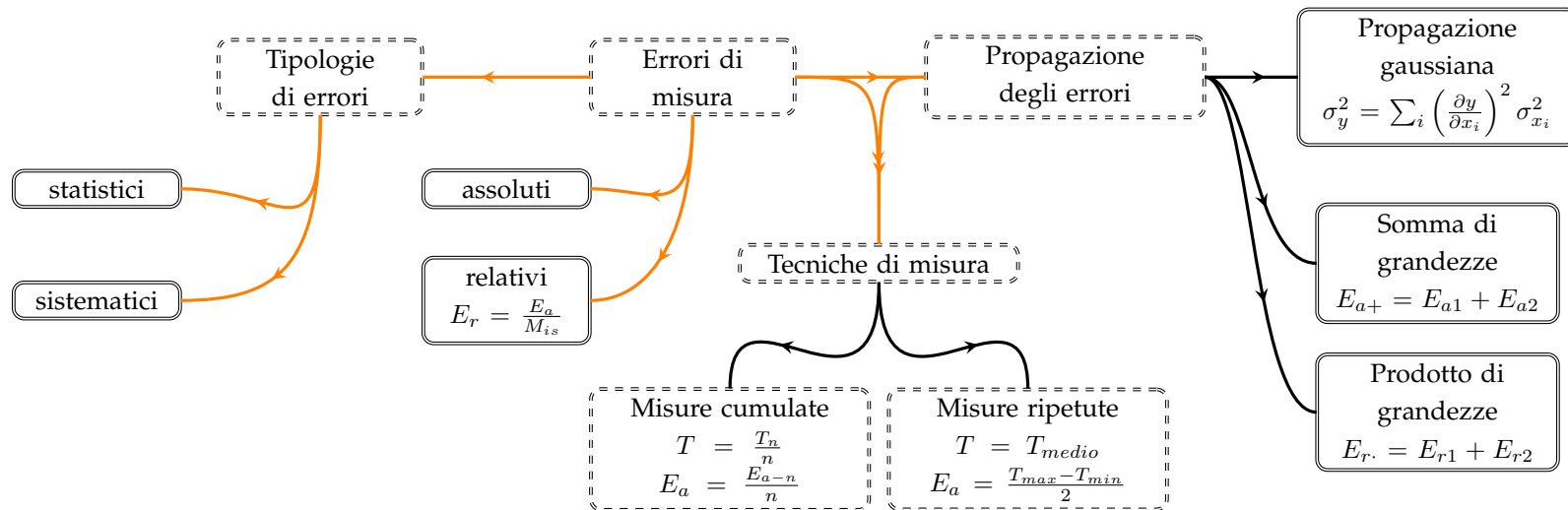




Fig. 14.1: Guarda il video youtu.be/WLf7Lo7Ncsg

14.1 Il valore della misura e l'errore assoluto

Prendiamo un righello e misuriamo il diametro di una moneta da 1 euro. Come potete vedere in figura 14.2, si può solo affermare che il diametro d vale un numero compreso tra 23 mm e 24 mm , visto che il bordo della moneta è posto tra le due stanghette corrispondenti a tali misure.

$$23\text{ mm} < d < 24\text{ mm}$$

Utilizzando un semplice righello noi non possiamo dire nulla di più preciso. Il risultato finale della nostra misura sarà

$$d = 23,5\text{ mm} \pm 0,5\text{ mm} \quad (14.1)$$

La grandezza $23,5\text{ mm}$ è il valore della misura; la grandezza $0,5\text{ mm}$ è detta *errore assoluto* sulla misura. Entrambe hanno la loro unità di misura.

Se adesso ripetiamo la stessa misura utilizzando uno strumento migliore, come per esempio un calibro ventesimale, il valore della misura del diametro della stessa moneta risulta essere



Fig. 14.2: Misura del diametro di una moneta utilizzando un righello.

$$23,2\text{ mm} < d < 23,3\text{ mm}$$

$$d = 23,25\text{ mm} \pm 0,05\text{ mm} \quad (14.2)$$

Cos'è cambiato? Utilizzando uno strumento molto migliore, è stato possibile eseguire la misura con un livello di incertezza assoluta molto minore. Se con il righello potevo solo guardare i millimetri e non potevo dire nulla al di sotto del millimetro, con il calibro posso fare affermazioni anche al livello del ventesimo di millimetro. La misura precedente non è sbagliata, semplicemente è più incerta: le due misure, infatti, sebbene diano valori differenti, sono in realtà in perfetto accordo.

14.1.1 Cifre significative

In tutte le misure precedenti sono state scritte un numero di cifre dopo la virgola in base al valore dell'errore assoluto sulla misura. Se l'errore assoluto riguardava la prima cifra dopo la virgola, allora la misura è stata scritta con una sola cifra dopo la virgola. Se l'errore assoluto riguardasse la terza cifra dopo la virgola, allora la misura deve essere scritta con tre cifre dopo la virgola anche se queste cifre sono degli zeri. Per cui sono corrette le seguenti misure:

$$L = 8,34\text{ m} \pm 0,02\text{ m}$$

$$L = 8,345\text{ m} \pm 0,002\text{ m}$$

$$L = 8,3450\text{ m} \pm 0,0002\text{ m}$$

In questo modo soltanto l'ultima cifra dopo la virgola è incerta, mentre tutte le altre sono esatte. Scrivendo ogni misura in questo modo possiamo introdurre il concetto di cifre significative. Il numero di cifre significative in una misura è pari al numero di cifre del numero con esclusione degli zeri che si trovano davanti alla prima cifra non nulla. Le seguenti misure hanno rispettivamente tre, quattro e cinque cifre significative. Ovviamente se cambiassimo unità di misura non cambierebbe il numero di cifre significative della misura.

$$M = 8,34 \text{ kg} \pm 0,02 \text{ kg}$$

$$M = 8,340 \text{ kg} \pm 0,002 \text{ kg}$$

$$M = 0,083450 \text{ kg} \pm 0,000002 \text{ kg}$$

14.1.2 Errori di misura

Se prima abbiamo visto che ad ogni misura va associata un'incertezza a seconda di come è fatto lo strumento di misura, introduciamo adesso altri due fattori che influiscono in modo molto significativo sul risultato della misura. Essi sono detti *errore statistico* ed *errore sistematico*.

Errore sistematico

L'errore sistematico è un errore dovuto alla qualità degli strumenti utilizzati o al metodo di misura seguito. Generalmente questo tipo di errore è sempre per eccesso o per difetto. Immaginate di pesarvi su di una bilancia che inizialmente non ha la lancetta che punta bene sullo zero, ma, senza che voi siate saliti, segna un kilogrammo; risulta evidente che chiunque salga su quella bilancia misura la sua massa ottenendo un valore di un kilogrammo più grande del valore corretto. In modo analogo se utilizzate un righello senza preoccuparvi di far coincidere lo zero con l'inizio del segmento da misurare, otterrete nuovamente un valore non corretto. Se misurate un intervallo di tempo con un cronometro che ritarda, otterrete un valore inferiore rispetto al valore corretto. Per loro natura tali errori sono in linea di principio riconoscibili ed è possibile correggerli; in tal caso non creano problemi alla misura. Spesso però non è facile individuare la presenza di un errore sistematico, richiando quindi di non cancellarlo ed ottenere misure non corrette. Errori sistematici possono essere anche dovuti al metodo di misura utilizzato. Immaginiamo di misurare la profondità di un pozzo misurando in quanto tempo un sasso, lasciato cadere nel pozzo, raggiunge il fondo dello stesso. Per farlo faremo partire il cronometro quando lasciamo cadere il sasso, e fermiamo il cronometro quando sentiamo il rumore del sasso che tocca il fondo. L'intervallo di tempo che intendevamo misurare è quello che impiega il sasso a cadere; quello che effettivamente abbiamo misurato è però un

po' più lungo, in quanto il suono dell'impatto del sasso impiega un certo tempo ad arrivare al nostro orecchio.

Errore accidentale

In un processo di misura, anche ammettendo di aver corretto tutti gli errori sistematici, esistono tutta una serie di fattori che non sono sotto il nostro diretto controllo. Se immaginiamo di misurare la durata del rosso ad un semaforo con un cronometro, scopriremo che, ripetendo la misura molte volte, non otteniamo sempre lo stesso valore, ma otteniamo invece misure che oscillano tra un minimo ed un massimo che distano tra loro qualche decimo di secondo. Perché? Scegliendo un cronometro con una sensibilità di un centesimo di secondo, ed ammettendo che il circuito elettronico che regola la temporizzazione del semaforo abbia anch'esso incertezze dell'ordine del centesimo di secondo, la fonte di un tale errore deve essere cercata nel metodo di misura. Quando facciamo partire il cronometro e quando lo fermiamo noi introduciamo un errore dovuto alla prontezza dei nostri riflessi; nell'azionare il cronometro, a volte lo facciamo troppo presto, a volte troppo tardi, quindi ogni volta otteniamo valori differenti, sbagliati per eccesso o per difetto, anche misurando sempre la stessa cosa. Per questo motivo il tipo di errore che facciamo lo chiamiamo *errore accidentale*. Per sua natura l'errore statistico è meno problematico dell'errore sistematico, sebbene esso non possa essere cancellato o corretto, è però più facilmente riconoscibile e può essere facilmente ridotto, anche se non può mai essere cancellato.

14.1.3 Misure ripetute

Stabilito che ripetendo tante volte la stessa misura ci si aspetta di ottenere sempre risultati leggermente differenti, in accordo con quanto indicato dall'errore assoluto, cosa possiamo affermare riguardo al risultato della misura dopo un certo numero di prove effettuate? Per rispondere a questa domanda cominciamo col considerare che è ragionevole pensare che gli errori accidentali capitino con eguale probabilità sia per difetto che per eccesso. Ci si aspetta quindi che due o più errori accidentali, sommati tra loro, tenderanno statisticamente a cancellarsi.

La questione si risolve quindi affermando che il valore della misura corrisponde al valore medio delle misure effettuate. Per cui, su un numero n di misure x_i avremo

$$X_m = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

In questo modo gli errori accidentali tenderanno a cancellarsi tra loro permettendoci di trovare il valore cercato.

Dobbiamo adesso stimare quale sia l'errore assoluto da assegnare alla misura così ricavata. Una prima stima la si può ottenere valutando la differenza tra la maggiore e la minore delle misure effettuate per cui

$$E_a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

14.1.4 Precisione ed errore relativo

Definiamo la precisione della misura utilizzando l'errore relativo della misura, definito come il rapporto tra l'errore assoluto ed il valore della misura.

$$E_r = \frac{E_a}{Misura}$$

che nel caso delle misure 14.1 e 14.2 diventa

$$E_{r1} = \frac{0,5 \text{ mm}}{23,5 \text{ mm}} \simeq 0,0213 = 2,13\%$$

$$E_{r2} = \frac{0,05 \text{ mm}}{23,25 \text{ mm}} \simeq 0,00215 = 0,215\%$$

da cui risulta evidente che la seconda misura è molto più precisa. Notate che l'errore relativo non ha una unità di misura, quindi è possibile confrontare la precisione di misure fatte su grandezze fisiche non omogenee. Per esempio se scriviamole seguenti due misure

$$M = 1,3 \text{ kg} \pm 0,1 \text{ kg}$$

$$d = 23,5 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm}$$

calcolandone gli errori relativi avremo

$$E_{rM} = \frac{0,1 \text{ kg}}{1,3 \text{ kg}} \simeq 0,077 = 7,7\%$$

$$E_{rd} = \frac{0,5 \text{ mm}}{23,5 \text{ mm}} \simeq 0,0213 = 2,13\%$$

da cui si vede facilmente che la misura più precisa è quella del diametro della moneta. Non importa se le due misure siano una di massa e l'altra di lunghezza: i due errori relativi sono omogenei e possono essere confrontati.

14.1.5 Propagazione non gaussiana degli errori

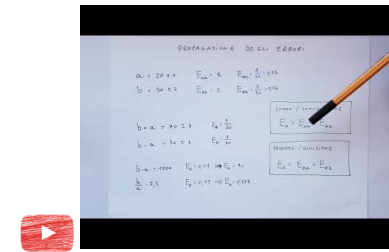


Fig. 14.3: Guarda il video youtu.be/9cJAL8HA_H8

r

Immaginiamo di avere un oggetto di forma rettangolare e di misurare con un righello la base e l'altezza di quel rettangolo. Immaginiamo che le due misure siano le seguenti:

$$h = 150 \text{ cm} \pm 3 \text{ cm}; E_r = 2\%$$

$$b = 200 \text{ cm} \pm 6 \text{ cm}; E_r = 3\%$$

Il semiperimetro del rettangolo si calcola sommando le due misure e sommando gli errori assoluti sulle misure.

$$p = 350 \text{ cm} \pm 9 \text{ cm}$$

L'errore assoluto sulla somma o sulla differenza di misure è pari alla somma degli errori assoluti sulla misura.

Il perimetro del rettangolo si calcola moltiplicando per 2 il valore del semiperimetro

$$2p = 700 \text{ cm} \pm 18 \text{ cm}$$

L'errore assoluto sul prodotto di un numero per una misura è pari al prodotto di tale numero per l'errore assoluto sulla misura.

L'area del rettangolo si calcola moltiplicando le due misure e sommando gli errori relativi sulle misure. Ovviamente è necessario calcolare prima l'errore relativo e poi quello assoluto.

$$A = 30000 \text{ cm}^2 \pm 1500 \text{ cm}^2; E_r = 5\%$$

L'errore relativo sul prodotto o sulla divisione di misure è pari alla somma degli errori relativi sulle misure.

Distribuzione Gaussiana

Scheda 15

Cosa succede se facciamo tante misure ripetute della stessa grandezza fisica? Sicuramente non otterremo mai lo stesso valore; possiamo comunque chiederci se i valori che otteniamo saranno molto vicini al valore *corretto* della misura, oppure possiamo chiederci quanto sia probabile ottenere un valore distante dal valore corretto pur avendo eseguito bene l'esperimento. Per rispondere a queste domande dobbiamo innanzi tutto mettere su di un grafico i risultati di uno stesso esperimento eseguito un numero molto alto di volte. In questa scheda mostriamo i risultati di un esperimento nel quale abbiamo misurato il valore del periodo di oscillazione di un pendolo un numero molto alto di volte.

15.1 La distribuzione Gaussiana

Immaginiamo di eseguire un numero molto alto di volte la misura del tempo di oscillazione di un pendolo. Come sappiamo non otterremo sempre lo stesso valore; nella tabella 15.1 sono riportati i valori ottenuti misurando il periodo di oscillazione dello stesso pendolo per 4213 volte. Come potete osservare la maggior parte delle volte il valore ottenuto si avvicina molto alla media, e solo poche volte si ottengono valori molto diversi dal valore medio. Possiamo dire che tanto più un valore è distante dal valore atteso, tanto meno è probabile che tale valore venga ottenuto in una misura. Se mostriamo i dati su di un grafico, dove sulle ascisse mettiamo il valore misurato e sulle ordinate il numero di volte che tale valore è stato ottenuto, vediamo che il disegno che otteniamo ha una forma a *campana* che ha una funzione matematica ben precisa ed è chiamata *gaussiana*. La curva gaussiana è definita da due parametri: il valore medio e la varianza. Il valore medio altro non è se non la media di tutti i dati sperimentali ottenuti; la varianza è un parametro legato a quanto la curva si allarga e quindi a quanto i dati risultano lontani dal valore medio. Per la gaussiana di questo esperimento avremo che

$$T_{med} = 4,5 \text{ s}$$

$$\sigma_T = 0,3 \text{ s}$$

T	n°	T	n°	T	n°
3,0	0	4,0	144	5,0	151
3,1	0	4,1	244	5,1	65
3,2	0	4,2	357	5,2	39
3,3	0	4,3	468	5,3	8
3,4	0	4,4	498	5,4	3
3,5	0	4,5	556	5,5	0
3,6	2	4,6	534	5,6	0
3,7	18	4,7	420	5,7	0
3,8	35	4,8	350	5,8	0
3,9	87	4,9	219	5,9	0

Tabella 15.1: Dati sperimentali raccolti in classi dell'ampiezza di 0,1 s. Per ogni valore riportato dal cronometro, nella seconda colonna della tabella viene riportato il numero di volte che tale valore è stato visto comparire sul cronometro. In totale sono state fatte 4213 misure. La media delle misure viene $T_{med} = 4,5 \text{ s}$; la varianza delle misure vale $\sigma_T = 0,3 \text{ s}$

15.2 Il risultato della singola misura

Chiediamoci: se noi eseguiamo un'altra misura, quale valore ci attendiamo che venga? Sicuramente potrebbe venire un qualunque valore, ma sarà più probabile che venga un valore vicino al valore medio, e sarà meno probabile che venga un valore distante dal valore medio.

Data la curva gaussiana che è stata ottenuta a seguito dei dati dell'esperimento, avremo che il valore della misura ed il corrispondente errore assoluto dovranno essere scritti nel seguente modo:

$$T = 4,5 \text{ s} \pm 0,3 \text{ s}$$

che considerando le caratteristiche della curva gaussiana significa: *ho il 68,3% di probabilità che la prossima misura venga compresa tra un minimo di 4,2 s ed un massimo di 4,8 s*

Se non sono soddisfatto della mia affermazione e voglio dire qualcosa di più sicuro anche se meno preciso allora posso raddoppiare l'errore assoluto e dire

$$T = 4,5 \text{ s} \pm 0,6 \text{ s}$$

che considerando le caratteristiche della curva gaussiana significa: *ho il 95,5% di probabilità che la prossima misura venga compresa tra un minimo di 3,9 s ed un massimo di 5,1 s*

Se non sono soddisfatto della mia affermazione e voglio dire qualcosa di ancora più sicuro anche se molto meno preciso allora posso triplicare l'errore assoluto e dire

$$T = 4,5 \text{ s} \pm 0,9 \text{ s}$$

che considerando le caratteristiche della curva gaussiana significa: *ho il 99,7% di probabilità che la prossima misura venga compresa tra un minimo di 3,6 s ed un massimo di 5,4 s*. Anche in quest'ultimo caso ci sarà comunque la possibilità per quanto piccola, che la prossima misura venga al di fuori dell'intervallo atteso.

15.3 Il risultato delle misure ripetute

Il discorso fatto fin'ora riguarda il risultato ottenuto ripetendo una singola misura. Le considerazioni fatte e le previsioni scritte riguardino quindi cosa succederebbe se ripetessimo la singola misura. Se però vogliamo rispondere alla domanda: *"quanto vale il periodo di oscillazione di quel pendolo?"* allora ci stiamo riferendo al valore della media di quelle misure. Il nostro set di dati contiene 4213 misure; è intuitivo immaginare che un secondo set di 4213 dati, sebbene i dati possano essere molto differenti, produrrà comunque un valor medio estremamente vicino a quello precedente.

Se il risultato di una singola misura di T ha incertezza σ_T allora il risultato del calcolo della media $\bar{T}$ di N misure ha incertezza $\sigma_{\bar{T}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}}$

Nel nostro esempio $\sigma_{\bar{T}} = \frac{0,3 \text{ s}}{\sqrt{4213} \approx 0,0046 \text{ s}}$ cioè circa 65 volte minore.

Il vantaggio nel ripetere tante volte una misura consiste quindi nel diminuire l'incertezza sulla media di tutte le singole misure.

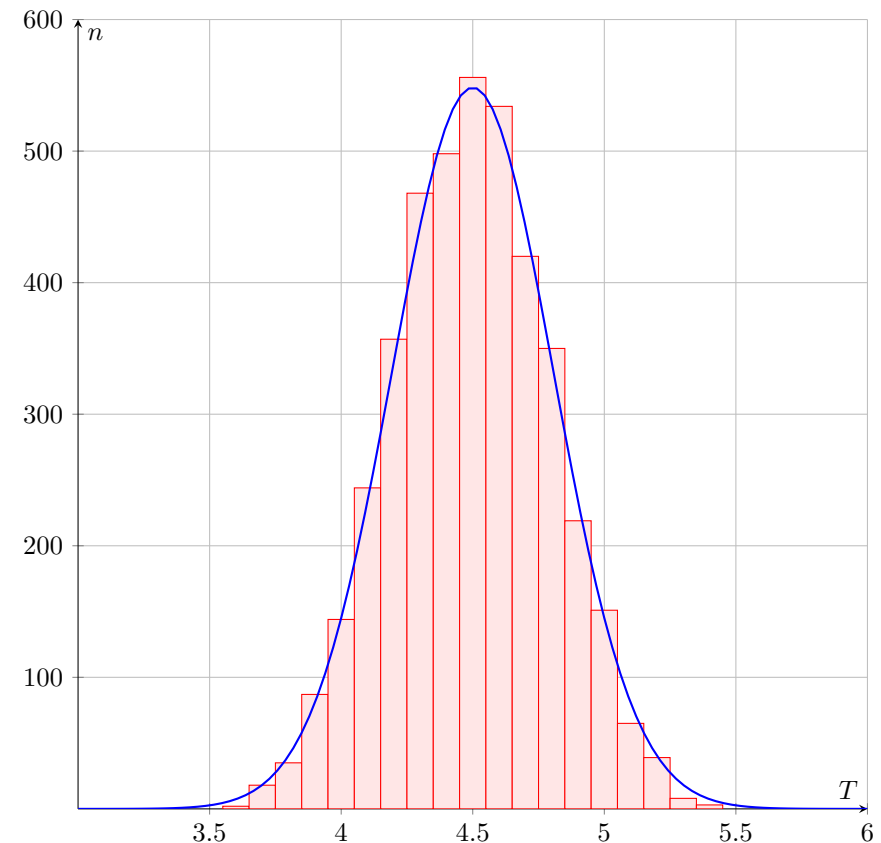
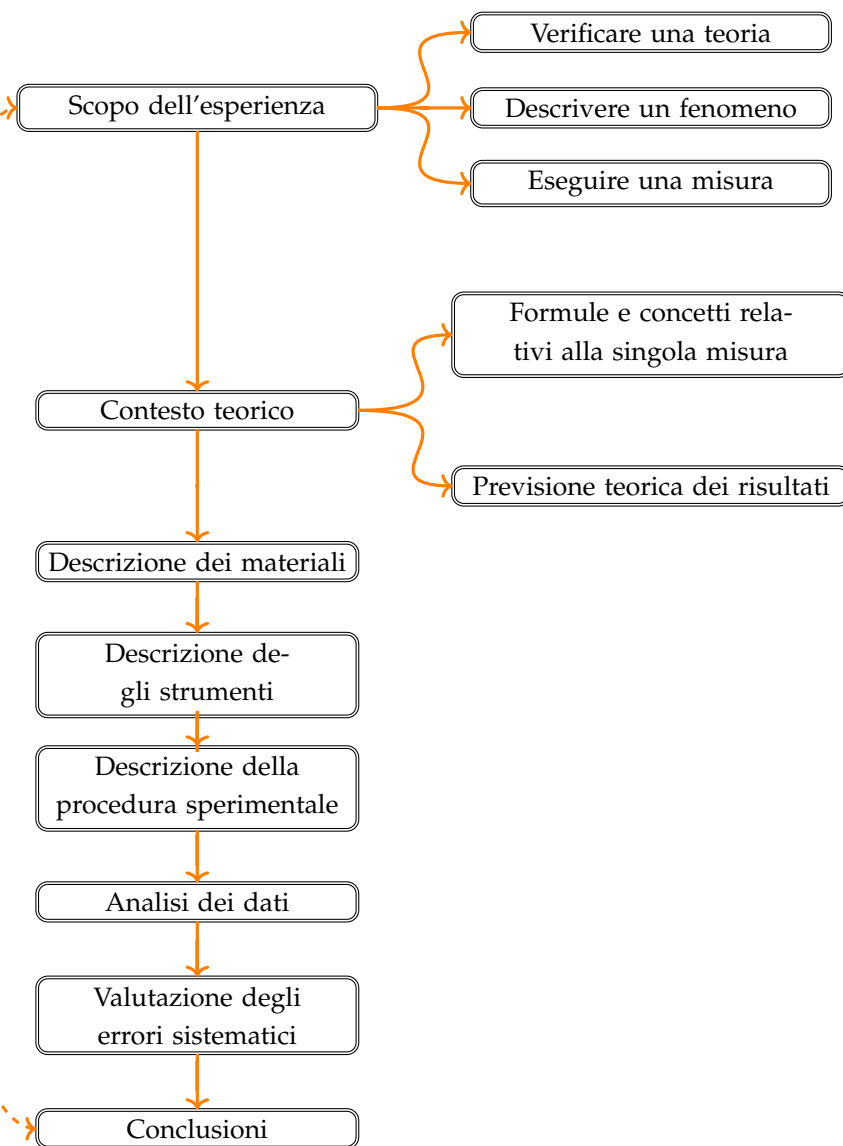


Fig. 15.1: Rappresentazione dei dati sperimentali: essi si distribuiscono con la forma di una gaussiana.



16.1 Considerazioni preliminari

Un'esperimento di qualunque genere, per avere valore, deve essere *ripetibile*. Deve cioè poter essere eseguito nello stesso identico modo da altre persone in modo che esse possano confermare la validità del metodo e delle conclusioni.

16.2 Scopo dell'esperienza

La corretta e precisa definizione dello scopo dell'esperienza è il punto centrale dell'esperienza stessa. Ogni singola azione svolta durante l'esperimento deve essere finalizzata alla realizzazione dello scopo. Quelle che saranno le conclusioni dell'esperienza dovranno essere perfettamente attinenti a quanto dichiarato nello scopo.

Tipicamente gli scopi di un'esperienza possono essere tre:

- misura di una certa grandezza fisica
- verifica di una determinata previsione teorica
- descrizione di un fenomeno

Se misuriamo una grandezza fisica semplicemente otterremo il suo valore con la relativa incertezza; se verifichiamo una legge, confronteremo che una certa previsione teorica sia in accordo con il risultato di una misura; infine se descriviamo un fenomeno fisico allora indichiamo l'andamento del valore di una grandezza fisica al variare di un'altra.

16.3 Fisica dell'esperienza

Prima di procedere con le misure, è necessario inquadrare il contesto teorico all'interno del quale tale misura si svolge. Si parlerà quindi dei concetti e delle formule che hanno a che fare con la misura che si vuole effettuare. Qualora lo scopo dell'esperienza sia la verifica sperimentale di una certa legge, allora sarà necessario svolgere tutti i calcoli necessari per predire il risultato della misura prima che questa venga effettuata.

16.4 Descrizione del materiale utilizzato

Ogni singolo oggetto, sia un materiale o uno strumento di misura, deve essere indicato e descritto all'interno dell'esperienza nel seguente modo:

1. di ogni materiale deve essere indicata la quantità, indicando il metodo di misura e le relative incertezze sperimentali
2. di ogni strumento di misura utilizzato, indicare portata e precisione dello strumento.

16.5 Realizzazione dell'esperienza

Ogni singola azione svolta deve essere documentata; chi legge la relazione dell'esperienza deve poter eseguire gli stessi vostri gesti per verificarne la correttezza. Ogni misura effettuata deve essere accompagnata dall'incertezza sperimentale (consiglio di indicare sia errore assoluto che relativo). Qualora ci siano misure ripetute, esse dovranno essere indicate all'interno di un'opportuna tabella.

In particolare dovrà essere posta attenzione a spiegare il motivo di tutti quegli accorgimenti studiati per ottenere misure con un'incertezza sperimentale statistica minima, e quali sono stati studiati per minimizzare od evitare eventuali errori sistematici.

Effettuate le misure necessarie per la realizzazione dell'esperienza, dovranno essere valutate tutte le possibili fonti di errori sistematici e verificato, anche solo con una stima di ordini di grandezza, che la loro portata sia trascurabile rispetto agli errori di misura ottenuti sulle grandezze misurate.

16.6 Analisi dei dati

Con l'analisi dei dati si intende l'esecuzione di tutti quei conti necessari per arrivare, partendo dalle misure effettuate, all'ottenimento dello scopo dell'esperienza. Di ogni grandezza fisica calcolata a partire dalle misure effettuate, è importante stimare

l'errore di misura tramite opportuna propagazione degli errori¹. Nel caso di misure ripetute, non sarà necessario ripetere tutti i conti per ogni singola misura, ma è possibile effettuare i conti una sola volta per un set di misure e poi utilizzare un foglio di calcolo elettronico.

16.7 Conclusioni

Le conclusioni dell'esperienza altro non sono che la certificazione che il risultato finale dell'analisi dei dati conferma lo scopo dell'esperienza dichiarato inizialmente.

¹A seconda del livello di conoscenze matematiche di chi svolge l'esperienza la gestione degli errori potrà essere fatta con tecniche matematiche più o meno evolute.