

Parte V

Leggi di conservazione

43.1 La quantità di moto

Una grandezza fisica particolarmente importante per descrivere una grande quantità di fenomeni è la **quantità di moto** $\vec{q}$. Essa è una grandezza vettoriale legata alla massa ed alla velocità di un oggetto.

La quantità di moto di un oggetto è definita come il prodotto della massa dell'oggetto per la sua velocità

$$\vec{q} = m \vec{v}$$

La quantità di moto di un oggetto è quindi una grandezza vettoriale che ha stessa direzione e verso della velocità dell'oggetto. L'unità di misura della quantità di moto è quindi $\frac{kg \cdot m}{s}$

43.1.1 Forza e quantità di moto

Partendo dal secondo principio della dinamica possiamo scrivere:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t}$$

Una forza corrisponde quindi ad una variazione di quantità di moto nel tempo. Analogamente possiamo affermare che

$$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{q}$$

l'effetto di una forza applicata per un certo intervallo di tempo causa una variazione di quantità di moto nel tempo. La grandezza

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

viene chiamata **Impulso**. Chiamo forza impulsiva una forza, generalmente molto intensa, che agisce per un brevissimo arco di tempo. Un esempio di forza impulsiva lo possiamo vedere negli sport che si praticano con una palla: ogni volta che colpiamo tale palla applichiamo una forza molto intensa per il brevissimo intervallo di tempo pari alla durata del colpo.

43.2 Conservazione della quantità di moto

Immaginiamo di studiare un sistema isolato nel quale ci siano molti oggetti tra i quali agiscono delle forze. Tali forze sono tutte interne al sistema, per cui se un oggetto esercita una forza su di un secondo oggetto, per il terzo principio della dinamica, all'interno del mio sistema vedrà anche la forza uguale e contraria che il secondo oggetto esercita sul primo. In formule scriverò

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Riscrivo ora queste forze come variazioni di quantità di moto nel tempo otterremo

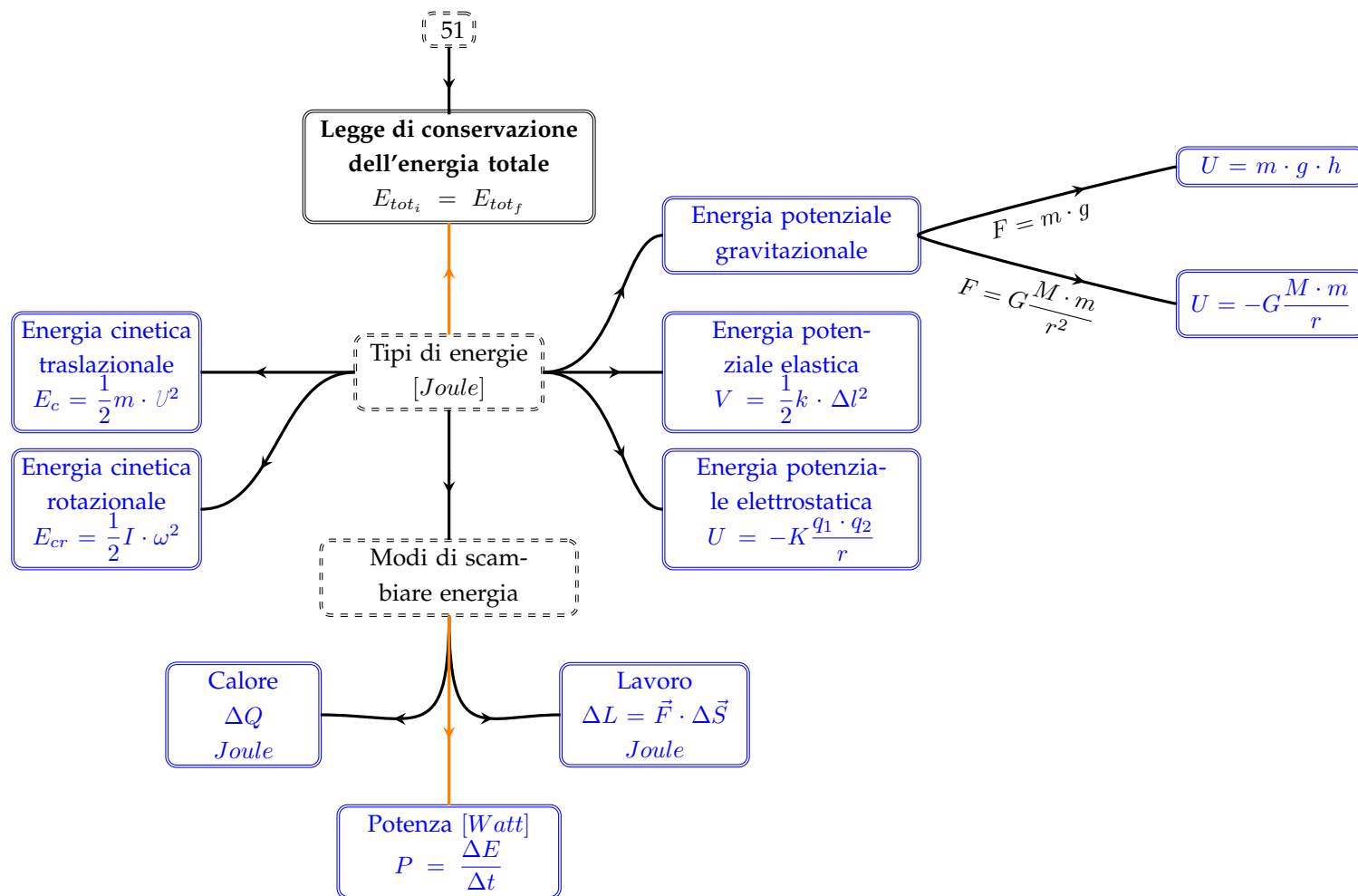
$$\frac{\Delta \vec{q}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta \vec{q}_2}{\Delta t}$$
$$\frac{\Delta \vec{q}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{q}_2}{\Delta t} = 0$$

da cui

$$\frac{\Delta \vec{q}_1 + \Delta \vec{q}_2}{\Delta t} = 0$$
$$\frac{\Delta \vec{q}_{tot}}{\Delta t} = 0$$
$$\Delta \vec{q}_{tot} = 0$$

Questo significa che

In un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva.



45.1 Energia cinetica

Un oggetto che si muove ha energia cinetica solo per il fatto che si sta muovendo. L'energia cinetica E_c di un oggetto di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$ vale¹

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Come si vede dalla formula l'energia cinetica dipende dalla massa dell'oggetto e dal quadrato della sua velocità. L'unità di misura di una qualunque energia è il **Joule**

$$\text{Joule} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

45.2 Energia cinetica rotazionale

Prendiamo in considerazione una particella di massa m_i che si muove di moto circolare uniforme con velocità v_i , raggio r_i e velocità angolare ω . Ovviamente la sua energia cinetica potrà essere scritta, tenendo in considerazione le equazioni del moto circolare uniforme, come

$$E_{cr-i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

La quantità $I_i = m_i r_i^2$ è definita *momento d'inerzia* della particella rispetto all'asse di rotazione. In questo modo possiamo scrivere l'energia cinetica della particella dovuta alla rotazione della stessa come

$$E_{cr-i} = \frac{1}{2} I_i \omega^2$$

Nel caso della rotazione di un oggetto esteso, l'energia cinetica rotazionale dell'oggetto sarà la somma dell'energia cinetica rotazionale di ognuna delle sue molecole; visto però che tutte le molecole dell'oggetto hanno la stessa velocità angolare potremo scrivere

¹Il motivo per cui la formula dell'energia cinetica è proprio questa sarà evidente quando avrete studiato il teorema dell'energia cinetica

$$E_{cr} = \sum \frac{1}{2} I_i \omega^2 = \frac{1}{2} (\sum I_i) \omega^2$$

Definendo I come il momento d'inerzia dell'oggetto esteso, calcolabile in linea di principio come la somma dei momenti di inerzia di ogni singola particella dell'oggetto, otteniamo l'energia cinetica rotazionale dell'oggetto

$$E_{cr} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Anche in questo caso il valore di I dipende non solo dalla forma e dalla massa dell'oggetto, ma anche dal suo asse di rotazione.

45.3 Energia interna

Se osserviamo un oggetto fermo, non è difficile affermare che la sua energia cinetica è zero. Questo perché il baricentro dell'oggetto ha velocità $v_b = 0$ e rispetto al baricentro la velocità di rotazione vale $\omega = 0$. Le singole molecole di cui è fatto l'oggetto però non sono ferme, ma si muovono con una velocità che dipende dalla temperatura dell'oggetto. La somma di tutte le energie cinetiche delle molecole, nel sistema di riferimento dell'oggetto fermo, è detta *Energia Interna* dell'oggetto.

45.4 Il Lavoro di una forza

Immaginiamo di avere un oggetto che si sposta da un punto A ad un punto B sotto l'azione di una forza.

Il lavoro fatto da una forza su di un oggetto che si sposta da un punto A ad un punto B è definito come il prodotto scalare della forza per lo spostamento dell'oggetto. Se applico una forza costante $\vec{F}$ su di un oggetto e questo si sposta effettuando uno spostamento $\vec{\Delta S}$ allora il lavoro effettuato sarà:

$$L = \vec{F} \cdot \vec{\Delta S} = F \cdot \Delta S \cdot \cos(\alpha)$$

È importante notare che quando l'angolo tra i due vettori è di 90° (cioè i due vettori sono perpendicolari) allora il coseno dell'angolo vale zero ed il lavoro fatto

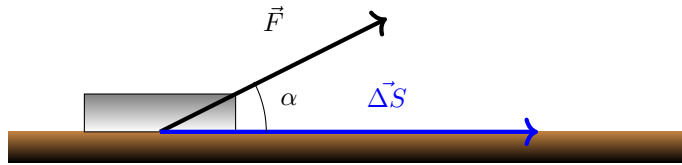


Fig. 45.1: In figura è schematicamente rappresentato un oggetto sottoposto ad una forza $\vec{F}$, e che compie uno spostamento $\Delta\vec{S}$. La forza forma un angolo α con lo spostamento, ed il lavoro compiuto dalla forza è indicato nella formula rappresentata.

dalla forza è nullo. Una forza perpendicolare allo spostamento non fa lavoro. Se invece la forza avesse verso opposto allo spostamento (cioè l'angolo tra i due vettori fosse di 180°) allora il coseno dell'angolo varrebbe -1 ed il lavoro della forza sarebbe negativo. Il lavoro di una forza opposta allo spostamento è negativo. In altre parole, soltanto la componente della forza che sia parallela allo spostamento può compiere un lavoro.

45.4.1 Il teorema dell'energia cinetica

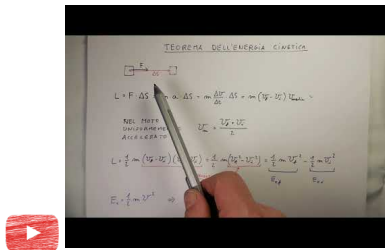


Fig. 45.2: Guarda il video youtu.be/ckj_ac32amE

Immaginiamo di applicare una forza costante $\vec{F}$ ad un oggetto di massa m , e supponiamo che esso si sposti di una quantità $\Delta\vec{S}$ nella stessa direzione e nello stesso verso della forza. Il Lavoro fatto dalla forza può essere calcolato come

$$L = F \cdot \Delta S = ma\Delta S = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta S = m(v_f - v_i) v_{media}$$

Visto che stiamo considerando una forza costante, possiamo affermare che il moto dell'oggetto è uniformemente accelerato; per questo motivo possiamo scrivere

$$\begin{aligned} L &= m(v_f - v_i) v_{media} = m(v_f - v_i) \frac{(v_f + v_i)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = E_{cf} - E_{ci} \end{aligned}$$

$$L = \Delta E_c$$

In altre parole il lavoro fatto dalla forza ha incrementato l'energia cinetica dell'oggetto. Se la forza fosse stata opposta allo spostamento, il lavoro sarebbe stato negativo e di conseguenza lo sarebbe stata la variazione di energia cinetica dell'oggetto.

45.5 La Potenza

Precedentemente abbiamo parlato del lavoro fatto da una forza. Se applico una forza ad un oggetto mentre si sposta, allora compio su quell'oggetto un lavoro e quindi gli fornisco (o tolgo) energia. Il concetto di potenza è legato alla rapidità con la quale fornisco del lavoro ad un oggetto. La potenza è infatti definita come il rapporto tra il lavoro fatto su di un oggetto e l'intervallo di tempo nel quale questa energia è stata data.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Se adesso consideriamo un oggetto che si muove sotto l'azione di una forza, l'energia che gli viene fornita corrisponde, per il teorema dell'energia cinetica, al lavoro di quella forza, quindi

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{S}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

46.1 Forze conservative

Una forza è definita conservativa quando il lavoro che compie lungo un percorso chiuso è pari a zero. Tipici esempi di forze conservative sono la forza di gravità e la forza elastica; un tipico esempio di forza non conservativa è la forza d'attrito. Immaginiamo un oggetto che si muova sotto l'azione di una forza conservativa lungo un percorso chiuso che lo porti da un punto A ad un punto B e successivamente lo porti indietro dal punto B al punto A seguendo una strada differente. Visto che il lavoro lungo il percorso chiuso deve valere zero, avremo

$$L'_{A \rightarrow B} + L''_{B \rightarrow A} = 0$$

da cui

$$L'_{A \rightarrow B} = -L''_{B \rightarrow A}$$

$$L'_{A \rightarrow B} = L''_{A \rightarrow B}$$

Questa equazione dice che qualunque percorso si scelga il lavoro della forza conservativa per andare da A a B deve essere sempre uguale, indipendentemente dal percorso scelto.

L'indipendenza dal percorso ci permette di definire una grandezza U detta energia potenziale che dipende solo dalla posizione dell'oggetto. In questo modo per le forze conservative varrà

$$L_{A \rightarrow B} = U_A - U_B = -\Delta U$$

Tenendo anche presente il teorema dell'energia cinetica, possiamo quindi interpretare questo risultato dicendo che il lavoro di una forza conservativa trasforma energia potenziale gravitazionale in energia cinetica. L'Energia potenziale è l'energia che un oggetto ha *in potenza* e che potrebbe essere trasformata in energia cinetica da una forza che fa lavoro. Esistono moltissimi tipi differenti di energia potenziale, una per ogni tipo di forza conservativa.

Campi conservativi

Se siete studenti di quinta superiore potete cimentarvi nella visione di questo video

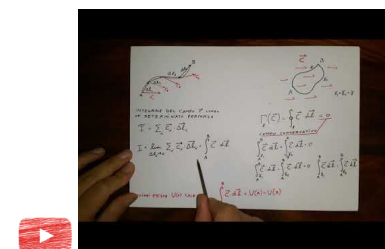


Fig. 46.1: Guarda il video youtu.be/DCrPCE78wFI

46.1.1 L'Energia potenziale gravitazionale

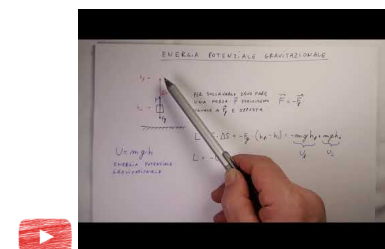


Fig. 46.2: Guarda il video youtu.be/HT3rdfuyICY

Quanto detto in questo paragrafo vale nel caso di oggetti che si trovino vicino alla superficie del pianeta. Consideriamo un oggetto qualunque: esso ha una energia potenziale gravitazionale dovuta alla sua posizione. L'energia potenziale gravitazionale U per un oggetto di massa m ad una altezza h dalla superficie della Terra vale

$$U = mgh$$

Come si vede dalla formula il valore dell'energia potenziale dipende dalla massa dell'oggetto, dalla sua altezza dal suolo e dal valore dell'accelerazione di gravità che

per il pianeta Terra vale $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$. Se un oggetto ha una massa di 5 Kg e si trova ad una altezza di 10 metri dal suolo allora la sua energia potenziale gravitazionale varrà 490 Joule (fate i conti e verificate la loro esattezza). Su di un diverso pianeta cambia il valore di g .

Immaginiamo di portare un oggetto da un'altezza h_A ad un'altezza h_B differente e calcoliamo il lavoro della forza di gravità; questo conto ci permetterà di capire come mai l'energia potenziale gravitazionale ha quella formula.

$$L_{A \rightarrow B} = -mg\Delta h = mgh_A - mgh_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

46.1.2 L'energia potenziale elastica

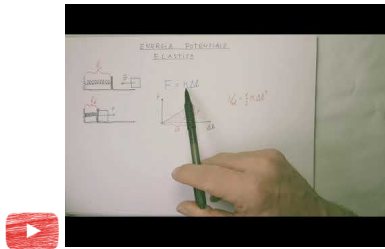


Fig. 46.3: Guarda il video youtu.be/GKyjmZ02g_E

Una molla a riposo, che non venga ne compressa ne estesa, ha energia potenziale elastica nulla. Se la stessa molla la si comprime o la si estende, essa acquista energia potenziale elastica proporzionale all'estensione o alla compressione rispetto alla lunghezza a riposo della molla. L'energia potenziale elastica U_{el} immagazzinata da una molla con costante elastica k e compressa (o estesa) di una lunghezza Δl rispetto alla posizione a riposo varrà

$$V_{el} = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2$$

Se una molla con costante elastica $k = 30 \frac{N}{m}$ viene compressa di $\Delta l = 0,2\text{ metri}$, l'energia potenziale elastica immagazzinata dalla molla vale $V_{el} = 0,6\text{ Joule}$ (fate i conti e verificate la loro esattezza).

46.1.3 Altre forme di energia potenziale

A seconda dei vari casi che di volta in volta si analizzano, ogni oggetto può immagazzinare energia in molte forme; un oggetto ha energia in base alla temperatura a cui si trova, in base ai legami chimici tra le varie molecole o atomi, in base ai legami tra i costituenti degli atomi, ecc. Sarà compito di chi analizza un certo sistema capire quali tipi di energia devono essere considerati per una corretta descrizione del fenomeno.

47.1 Le parole di Feynmann

*C'è un fatto, o se volete una legge, che governa i fenomeni naturali sinora noti. Non ci sono eccezioni a questa legge: per quanto ne sappiamo è esatta. La legge si chiama **conservazione dell'energia**, ed è veramente una idea molto astratta, perché è un principio matematico: dice che c'è una grandezza numerica, che non cambia qualsiasi cosa accada. Non descrive un meccanismo, o qualcosa di concreto: è solo un fatto un po' strano: possiamo calcolare un certo numero, e quando finiamo di osservare la natura che esegue i suoi giochi, e ricalcoliamo il numero, troviamo che non è cambiato... [Richard Feynmann, Le Lezioni di Feynmann, VolII]*

47.2 Legge di conservazione dell'energia totale

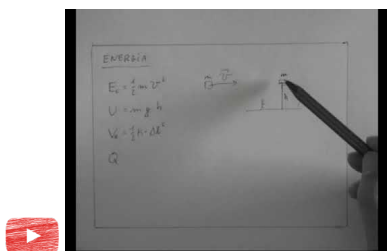


Fig. 47.1: Guarda il video youtu.be/PKqqsBuOFNM

La legge di conservazione dell'energia è uno dei concetti più importanti nell'analisi di un fenomeno fisico. In un sistema isolato (che quindi non ha alcuno scambio con l'esterno) la quantità totale di energia è costante. Questo significa che non importa quali o quante trasformazioni subisca l'energia presente nel sistema, la sua quantità complessiva è sempre costante. Se ci limitiamo a considerare l'energia meccanica (per cui ci limitiamo alle forze conservative ed assumiamo che non ci siano forze non conservative) la dimostrazione di questo principio è semplice, infatti per un qualunque oggetto, nello spostarsi da un punto A ad un punto B avremo sempre che

$$L_{A \rightarrow B} = -\Delta U = \Delta E_c$$

da cui ricaviamo

$$\Delta U + \Delta E_c = 0$$

$$\Delta E_{tot} = 0$$

In un caso più generale, nel quale siano presenti ogni tipo di forza, il principio di conservazione dell'energia continua a essere valido, semplicemente introducendo nuove ed opportune forme di energia. Nel caso di uno spostamento in presenza di attrito, parte dell'energia cinetica dell'oggetto in moto viene convertita in calore e quindi dovrà aggiungere nel bilancio energetico anche questa forma di energia.

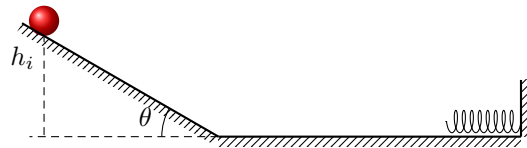
$$\Delta E_{tot} = \Delta U + \Delta E_c + \Delta Q = 0$$

47.3 Trasformazione dell'energia

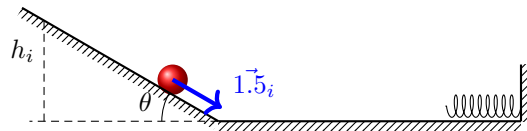
Ogni volta che su di un oggetto agisce una forza e quell'oggetto si muove allora quella forza ha compiuto un lavoro sull'oggetto. Se quel lavoro è positivo allora vuol dire che quella forza ha dato energia cinetica all'oggetto trasformando una qualche energia potenziale; al contrario se il lavoro è negativo vuol dire che quella forza ha sottratto energia cinetica all'oggetto convertendola in una qualche energia potenziale.

Un esempio Per capire bene in che modo l'energia si trasforma da una sua forma all'altra analizziamo adesso una particolare situazione nella quale un peso si trova sulla cima di un piano inclinato e poi scende lungo il piano inclinato per arrivare contro una molla posta al fondo del percorso.

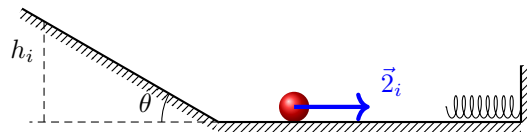
1. Un oggetto si trova fermo ad una certa altezza: ha energia potenziale gravitazionale; non ha energia cinetica. Nella molla al fondo del percorso non è immagazzinata energia.



2. L'oggetto sta rotolando verso il basso: sta trasformando la sua energia potenziale gravitazionale in energia cinetica. Nella molla al fondo del percorso non è immagazzinata energia.



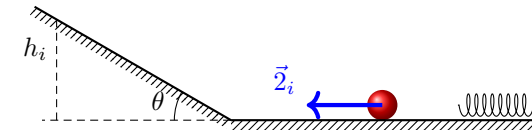
3. Adesso l'oggetto si muove in orizzontale al fondo della discesa. Ha trasformato tutta la sua energia potenziale gravitazionale in energia cinetica. Non variando più la sua altezza, non varia nemmeno la sua energia cinetica. Nella molla al fondo del percorso non è immagazzinata energia.



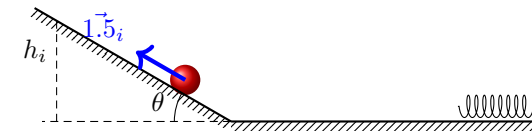
4. L'oggetto è arrivato a comprimere la molla. Sta convertendo energia cinetica in energia potenziale elastica. L'oggetto quindi rallenta fino a fermarsi e comprime la molla fino ad un valore massimo.



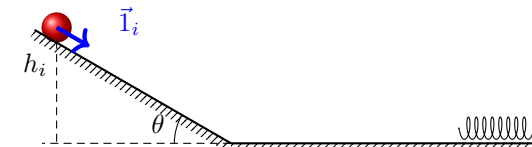
5. La molla, raggiunta la sua massima compressione, comincerà adesso a restituire all'oggetto energia cinetica perdendo energia potenziale elastica. La molla riprenderà la lunghezza iniziale.



6. L'oggetto ricomincia a salire lungo il piano inclinato. Perde energia cinetica per trasformarla in energia potenziale gravitazionale.



7. L'oggetto, una volta fermo, ha convertito tutta la sua energia cinetica in energia potenziale gravitazionale raggiungendo la massima altezza.



Macchine semplici

Scheda 48

Una macchina semplice è uno strumento che permette di fare del lavoro esercitando una piccola forza.

Ogni volta che spostiamo un oggetto esercitando direttamente su di esso una forza, compiamo un certo lavoro. Utilizzando una macchina semplice, noi riusciamo ad ottenere per l'oggetto lo stesso spostamento e lo stesso lavoro, ma esercitando una forza minore lungo un percorso maggiore.

Le macchine semplici che tratteremo sono: il piano inclinato, la leva, la carrucola e il torchio idraulico.

48.1 Il piano inclinato

Immaginate di dover spingere un oggetto lungo un piano inclinato per sollevarlo di una certa altezza. Ammettendo che sul piano inclinato l'attrito sia nullo, è evidente che sarà molto più facile sollevare l'oggetto spostandolo lungo il piano inclinato che non sollevare lo stesso oggetto lungo un percorso verticale. Il lavoro necessario per spostare l'oggetto dipende soltanto dalla massa dell'oggetto stesso e dal dislivello da coprire. Infatti, per la legge di conservazione dell'energia totale, avremo che

$$L + mgh_i = mgh_f$$

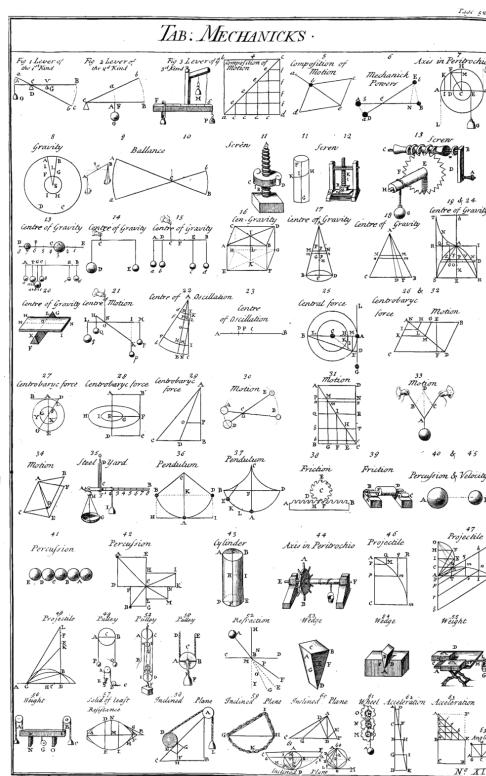


Fig. 48.1: Tavola sulle macchine semplici dalla Cyclopaedia di Chambers del 1728.

$$L = mg(h_f - h_i) = mg\Delta h$$

Il lavoro che facciamo noi applicando una forza $\vec{F}$ dipende però dalla lunghezza del piano inclinato, infatti

$$F \cdot \Delta S = mg\Delta h \Rightarrow F = \frac{mg\Delta h}{\Delta S}$$

Per cui, tanto più lungo è il piano inclinato, tanto minore è la forza da impiegare al fine di fare una certa quantità di lavoro.

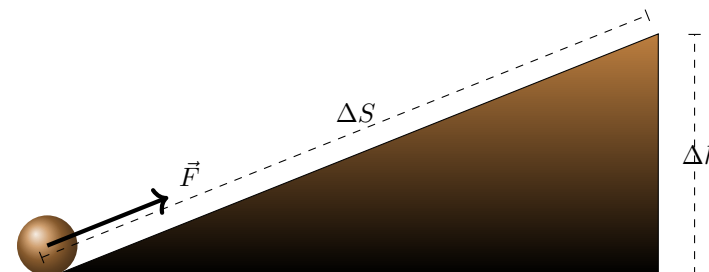


Fig. 48.2: Il piano inclinato

48.2 La leva

Una leva è un'asta con un perno fisso intorno al quale l'asta ruota. Il perno non è nel centro dell'asta; per questo motivo, in una condizione di equilibrio, la forza fatta ad un estremo dell'asta non è uguale alla forza fatta sull'altro estremo dell'asta.

$$Fb_1 = F_gb_2 \Rightarrow F = \frac{F_gb_2}{b_1}$$

Qualunque lavoro venga fatto su di un oggetto posizionato sul lato corto della sbarra, sarà uguale al lavoro fatto dalla forza posizionata sul lato lungo. La forza fatta sul lato lungo è però sempre più piccola dell'altra, e di qui il concetto di macchina semplice.



Fig. 48.3: La leva

48.3 La carrucola

Una carrucola è un oggetto costituito da una ruota con una scanalatura sui bordi per permettere il passaggio di una corda. La ruota è libera di ruotare intorno al suo perno centrale. Il punto chiave per comprenderne il funzionamento sta nel notare che la forza esercitata dal filo è sempre doppia in quanto il filo è avvolto intorno alla ruota. A bilanciare tale forza è la reazione del perno che, di conseguenza, sarà doppia rispetto alla tensione del filo. Montando una carrucola o più carrucole avremo che la forza necessaria a tenere in equilibrio un peso è minore della forza esercitata dal peso stesso. In figura 48.4, facendo una forza $\vec{T}$ sulla corda, tale forza si propaga su tutta la corda. Sulla carrucola mobile, la corda esercita due forze verso l'alto, bilanciate dalla forza $\vec{F}$ verso il basso. La forza $\vec{T}$ risulta quindi la metà della forza $\vec{F}$.

r

48.4 Il torchio idraulico

Per questo paragrafo vedi 52.1.1.

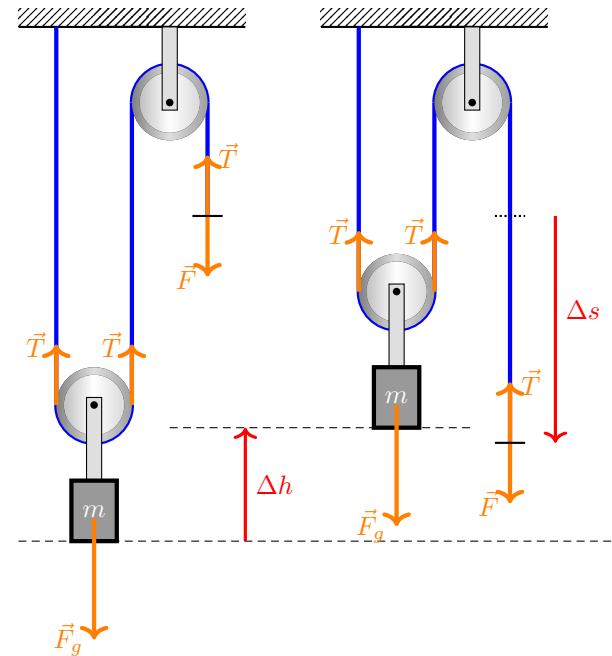


Fig. 48.4: Un sistema a carrucola mobile.

Fig. 48.5: Guarda il video youtu.be/zM5riV9kQJ0

49.1 Un corpo attaccato ad una molla

49.1.1 Dinamica dell'oscillatore

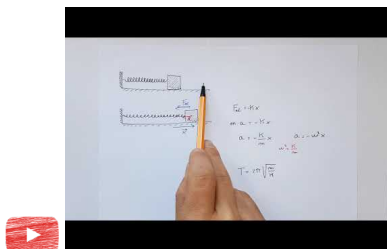


Fig. 49.1: Guarda il video youtu.be/7-5iPat-nJU

Analizziamo il caso di un moto armonico ottenuto tramite un oggetto attaccato ad una molla. Immaginate una molla in orizzontale ed un oggetto ad essa attaccato che oscilla sull'asse orizzontale. La forza sull'oggetto è la forza elastica, quindi

$$\begin{aligned}\vec{F}_{el} &= m \cdot \vec{a} \\ -k\Delta\vec{S} &= m \cdot \vec{a} \\ \vec{a} &= -\frac{k}{m}\Delta\vec{S}\end{aligned}$$

Questa equazione va confrontata con l'equazione generica di un moto armonico

$$\vec{a} = -\omega^2\Delta\vec{S}$$

Questa equazione dimostra che il moto è un moto armonico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

49.2 Energia dell'oscillatore armonico

Nel sistema fisico descritto l'energia dell'oscillatore è cinetica e potenziale elastica. Quindi considerando il punto di massimo allungamento della molla avremo

$$E_{tot} = \frac{1}{2}K\Delta l^2 = \frac{1}{2}KA^2$$

e considerando il punto di massima velocità del corpo, corrispondente ad un allungamento nullo della molla

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2$$

Ne segue che

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2$$

La velocità del corpo è legata alla pulsazione del moto armonico secondo l'equazione $\mathcal{V} = \omega r$ facilmente ricavabile pensando che il moto armonico è la proiezione su di un asse di un moto circolare uniforme. Inoltre, sempre pensando a questa corrispondenza, avremo che $r = A$, in quanto il raggio della circonferenza corrisponde all'ampiezza dell'oscillazione.

Quindi

$$KA^2 = m\omega^2A^2$$

$$K = m\omega^2$$

Per l'energia totale dell'oscillatore avremo quindi

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

49.3 Il pendolo come oscillatore armonico

49.3.1 Dinamica dell'oscillatore

Con un pendolo il moto armonico lo vediamo sull'angolo che forma il pendolo rispetto alla verticale. L'accelerazione di cui parleremo sarà l'accelerazione angolare del pendolo e lo spostamento sarà lo spostamento angolare θ .

Per un pendolo, l'accelerazione angolare α è legata al momento della forza di gravità ed al momento di inerzia del sistema.

$$m \cdot g \cdot \sin \theta \cdot r = -I\alpha$$

$$\alpha = -\frac{mgr}{I} \cdot \sin \theta$$

Se adesso ci mettiamo nel caso particolare del pendolo ideale con $I = mr^2$, ed r che corrisponde alla lunghezza del pendolo $r = L$, avremo

$$\alpha = -\frac{g}{L} \cdot \sin \theta$$

nel caso di piccole oscillazioni $\sin \theta \sim \theta$ e quindi

$$\alpha = -\frac{g}{L} \cdot \theta$$

che corrisponde ad un moto armonico angolare con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

49.4 Energia dell'oscillatore

Teoria degli urti

Scheda 50

Tutti sappiamo che se due oggetti si dirigono uno contro l'altro, si urtano e poi proseguono il loro moto con direzioni e velocità differenti.

Studiare un urto tra due corpi significa, conoscendo le masse e le velocità iniziali dei corpi, prevedere quali saranno le velocità finali dei corpi.

Per studiare un urto ci serviamo della legge di conservazione della quantità di moto e della legge di conservazione dell'energia totale scritte nella seguente forma:

$$\begin{cases} \vec{P}_{i1} + \vec{P}_{i2} = \vec{P}_{f1} + \vec{P}_{f2} \\ E_{ci1} + E_{ci2} = E_{cf1} + E_{cf2} + \Delta Q \end{cases}$$

dove i vari termini delle equazioni indicano le quantità di moto iniziali e finali dei due oggetti, le energie cinetiche iniziali e finali dei due oggetti e la quantità di calore liberata durante l'urto.

Noi studieremo due situazioni estreme: la prima riguarda gli urti completamente anelastici nei quali si ha la massima dispersione di calore; la seconda riguarda gli urti completamente elastici nei quali non c'è dispersione di calore. In entrambi i casi ci limitiamo a trattare problemi monodimensionali, nei quali supponiamo che gli oggetti siano puntiformi e si muovano unicamente su di una linea¹.

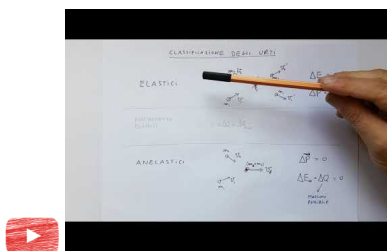


Fig. 50.1: Guarda il video youtu.be/8qK9CO4IEAo

¹Un urto su di un piano viene trattato esattamente in modo analogo, semplicemente imponendo la legge di conservazione della quantità di moto separatamente per entrambi gli assi cartesiani del sistema di riferimento sul piano.

50.1 Gli urti completamente anelastici

In un urto completamente anelastico i due oggetti rimarranno attaccati ed avranno la stessa velocità finale. In tali urti si ha la massima dispersione di energia sotto forma di calore

$$\Delta Q \neq 0$$

I due oggetti che urtano tra loro dopo l'urto rimarranno attaccati e si muoveranno quindi con la stessa velocità.

La legge di conservazione della quantità di moto, applicata a questo caso, ci permette di scrivere

$$m_1 U_{i1} + m_2 U_{i2} = (m_1 + m_2) U_f$$

dove m è la massa degli oggetti, U è la loro velocità prima dell'urto e U_f la velocità dei due oggetti dopo che si sono attaccati. In questo modo sono in grado di calcolare la velocità finale del blocco

$$U_f = \frac{m_1 U_{i1} + m_2 U_{i2}}{m_1 + m_2}$$

Calcolando poi l'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto porriamo avere una stima del calore liberato durante l'urto

$$\Delta Q = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) U_f^2 - \frac{1}{2}m_1 U_{i1}^2 - \frac{1}{2}m_2 U_{i2}^2 = \dots = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} U_{i1} U_{i2}$$

50.2 Gli urti elastici

In un urto elastico non si ha dispersione di calore

$$\Delta Q = 0$$

I due oggetti dopo l'urto non rimarranno attaccati. Per descrivere questo tipo di urti dovremo impostare un sistema di due equazioni, la prima riguardante la conservazione della quantità di moto e la seconda riguardante la conservazione dell'energia.

Il modo più comodo di risolvere il problema rimane però quello di mettersi nel sistema di riferimento nel quale uno dei due oggetti (per esempio quello con indice 2) sia fermo. Avremo quindi:

$$\begin{cases} m_1 \mathcal{U}_{i_1} = m_1 \mathcal{U}_{f_1} + m_2 \mathcal{U}_{f_2} \\ m_1 \mathcal{U}_{i_1}^2 = m_1 \mathcal{U}_{f_1}^2 + m_2 \mathcal{U}_{f_2}^2 \end{cases}$$

dove m indica la massa degli oggetti, $\mathcal{U}$ indica la velocità degli oggetti; con gli indici i intendo i valori delle grandezze prima dell'urto e con gli indici f i valori delle grandezze dopo l'urto. Risolvendo questo sistema per trovare i valori di $\mathcal{U}_{1f}$ e $\mathcal{U}_{2f}$ otteniamo

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{f_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \mathcal{U}_{i_1} \\ \mathcal{U}_{f_2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \mathcal{U}_{i_1} \end{cases}$$

50.2.1 Casi particolari di urti elastici

I due oggetti hanno la stessa massa Nel caso di due oggetti con la stessa massa, otteniamo

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{f_1} = 0 \\ \mathcal{U}_{f_2} = \mathcal{U}_{i_1} \end{cases}$$

Questo significa che l'oggetto colpito parte con la stessa velocità che aveva l'altro, il quale, dopo l'urto, si ferma.

L'oggetto fermo ha una massa molto maggiore di quello in moto Se l'oggetto colpito, inizialmente fermo, ha una massa enormemente maggiore di quello che lo colpisce, per cui possiamo del tutto trascurare la massa dell'altro oggetto, otteniamo

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{f_1} = -\mathcal{U}_{i_1} \\ \mathcal{U}_{f_2} = 0 \end{cases}$$

Questo significa che l'oggetto colpito non si sposta, mentre l'altro torna indietro con la stessa velocità che aveva inizialmente.

L'oggetto fermo ha una massa molto minore di quello in moto Se l'oggetto colpito ha una massa molto minore, e quindi trascurabile, rispetto a quello che lo colpisce, otteniamo

$$\begin{cases} \mathcal{U}_{f_1} = \mathcal{U}_{i_1} \\ \mathcal{U}_{f_2} = 2 \mathcal{U}_{i_1} \end{cases}$$

Questo significa che l'oggetto colpito parte con una velocità doppia rispetto a quella che aveva inizialmente l'altro oggetto. L'altro oggetto invece procede nel suo moto senza cambiare la sua velocità.