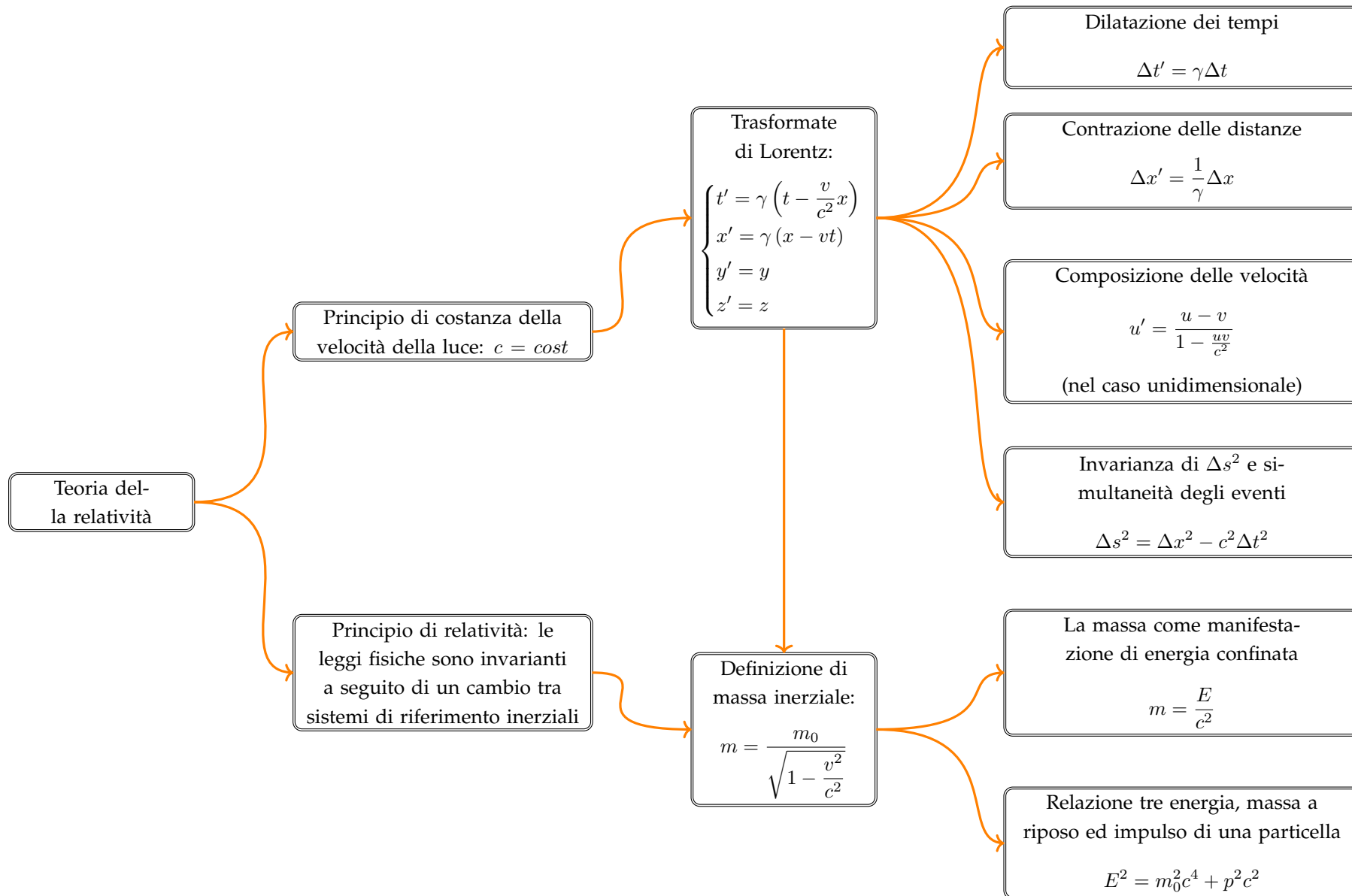


Parte VI

Relatività ristretta



59.1 Il punto di vista

Quando osserviamo un fenomeno effettuiamo delle misure per poterlo descrivere. Ogni singolo osservatore che osserva lo stesso fenomeno non lo vedrà accadere nello stesso identico modo; molte delle affermazioni che farà sono diverse da quelle che faranno gli altri osservatori. Su alcune cose, però, tutti gli osservatori sono d'accordo, e di conseguenza quelle cose rappresentano proprietà intrinseche del fenomeno osservato in quanto non dipendono dall'osservatore. Inoltre le descrizioni delle quantità relative agli osservatori devono essere *consistenti* tra loro, cioè ognuno dei due osservatori deve poter, utilizzando precise regole, sapere in che modo l'altro osservatore descriverebbe il fenomeno. Per comprendere meglio queste frasi analizziamo, nei paragrafi successivi, due casi particolari sempre riferendoci alla meccanica classica.

59.1.1 Nessun luogo è speciale

Immaginiamo due osservatori che chiameremo Mr.Red e Mr.Blue. Questi due osservatori stanno osservando due oggetti e vogliono determinarne la distanza tra loro. Per farlo ognuno di loro determina le coordinate degli oggetti sul proprio sistema di riferimento e poi calcola la distanza. Con riferimento alla figura 59.1 l'osservatore Mr.Blue identifica le coordinate degli estremi del segmento e calcola la sua lunghezza scrivendo

$$\begin{cases} A(1, 1) \\ B(6, 1) \end{cases} \Rightarrow L = 6 - 1 = 5$$

L'osservatore Mr.Red identifica le coordinate degli estremi del segmento e calcola la sua lunghezza scrivendo

$$\begin{cases} A(2, 2) \\ B(6, 5) \end{cases} \Rightarrow L = \sqrt{(6-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Per Mr.Red infatti il segmento è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo e come tale viene calcolata.

Come si può constatare, sebbene le singole posizioni siano concetti relativi, il semplice cambio di posizione ed orientamento del sistema di riferimento lascia in-

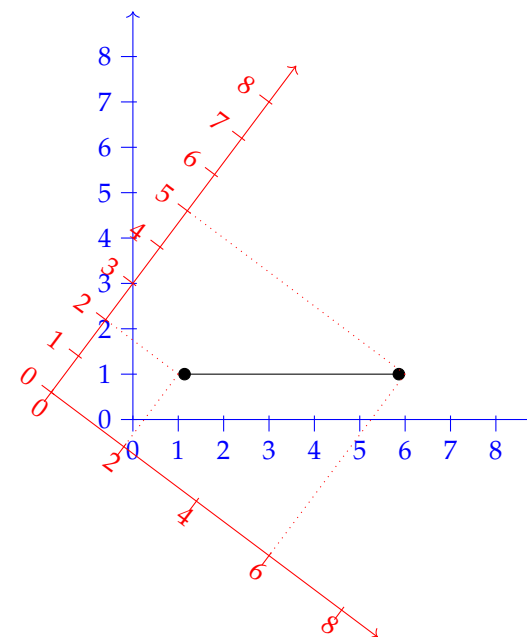


Fig. 59.1: Un segmento di lunghezza 5 visto da due osservatori differenti in posizione differente ed orientati in modo differente. Le posizioni degli estremi del segmento sono relative ai singoli osservatori, mentre la lunghezza del segmento è indipendente dall'osservatore.

variata la distanza tra due punti. Tutto questo è una diretta conseguenza delle regole che utilizziamo per passare da un sistema di riferimento ad un altro. Tali regole, per come sono scritte, implicano necessariamente la conservazione di alcune quantità come per esempio la distanza di un segmento. Le regole per passare dal sistema di riferimento blu a quello rosso sono infatti una traslazione ed una rotazione nel piano.

60.1 Le trasformate di Galileo

In meccanica classica, con le trasformazioni di Galileo noi siamo in grado di dire come un certo fenomeno viene osservato da due sistemi di riferimento differenti. Questo significa che io, che descrivo la natura utilizzando il mio sistema di riferimento, con dei semplici calcoli sono in grado di dire in che modo lo stesso fenomeno viene descritto da un differente osservatore. Le trasformazioni di Galileo di fatto sono quelle che noi utilizziamo nella nostra realtà quotidiana da quando siamo nati.

Immaginiamo due osservatori **Mr.Blue** e **Mr.Red** che in un certo istante iniziale $t_0 = 0$ si trovano nello stesso punto, ma uno in quiete e l'altro con velocità U_r costante rispetto al primo. L'indice r sulla grandezza scritta nel colore *blu* indica la velocità di M.Red così come viene misurata nel sistema di riferimento di Mr.Blue.

Entrambi gli osservatori leggono il tempo con lo stesso orologio; per questo motivo potremo anche indicare il tempo con il colore nero in quanto, in questo caso, non è necessario specificare se il tempo viene letto sull'orologio di Mr.Red o su quello di Mr.Blue.

Osservando la figura 60.1 possiamo renderci conto di come viene descritta la posizione di una pallina nera in due sistemi di riferimento *blu* e *rosso* tali per cui rosso si muove con velocità U_r nel sistema di riferimento di *blu*.

Le trasformazioni di Galileo sono scritte come:

$$\begin{cases} X_n = X_n - U_r \cdot t \\ t = t \end{cases}$$

60.2 Il principio di relatività

Per descrivere la natura noi utilizziamo delle leggi fisiche formulate in modo tale da essere *invarianti* sotto l'azione dei cambiamenti di sistema di riferimento. In altre parole vogliamo che valga il principio di relatività, e cioè che tutti gli osservatori, indipendentemente dalla posizione, dall'orientamento e dalla velocità relativi costanti, formulino le leggi fondamentali della fisica nello stesso modo.

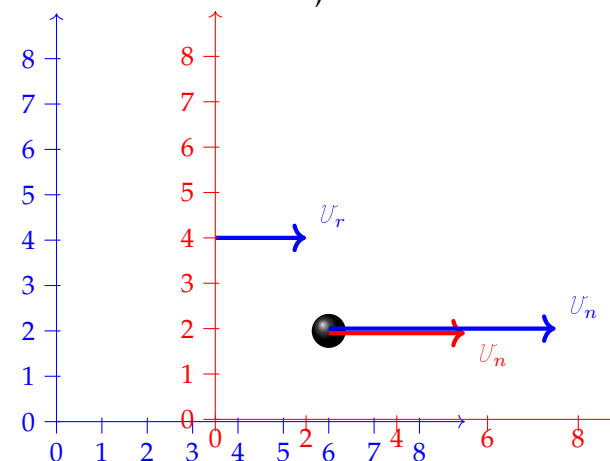


Fig. 60.1: La pallina nera è osservata da entrambi i sistemi di riferimento. Entrambi vedono la pallina muoversi ad una certa velocità, ma non sono in accordo sul valore della velocità. In questo schema il sistema di riferimento blu misura una velocità maggiore di quella misurata nel sistema di riferimento rosso.

60.3 I principi di Newton

I tre principi della dinamica sono leggi fondamentali della natura invarianti sotto l'azione delle trasformate di Galileo. Infatti i tre principi parlano dei valori misurati delle forze per sistemi di riferimento inerziali passando dal concetto di accelerazione. Se noi prendiamo le trasformate di Galileo e deriviamo due volte rispetto al tempo otteniamo:

$$\begin{cases} X_n = X_n - U_r \cdot t \\ U_n = U_n - U_r \\ a_n = a_n \end{cases}$$

La velocità di un corpo è infatti data dalla derivata della posizione rispetto al tempo, mentre l'accelerazione di un corpo è data dalla derivata della velocità rispetto al tempo.

Come si può vedere sotto le trasformate di Galileo, entrambi gli osservatori misureranno le stesse accelerazioni e di conseguenza le stesse forze. Tutti i sistemi in cui capita sono detti sistemi inerziali.

60.4 La velocità della luce

Le trasformate di Galileo di fatto rappresentano il cuore del modo con cui noi descriviamo la natura intorno a noi. Esse sono inglobate all'interno della stessa formulazione delle leggi fisiche che governano il nostro universo. Nel momento stesso che le evidenze sperimentali hanno cominciato a mostrare che la velocità della luce è costante in ogni sistema di riferimento inerziale, la struttura stessa dello spazio e del tempo nel modo in cui erano fino a quel punto conosciuti ha cominciato a vacillare.

61.1 Postulati di partenza

La teoria della relatività ristretta si basa su due principi fondamentali:

1. il principio di relatività ristretta: *Le leggi fisiche hanno la stessa formulazione in tutti i sistemi di riferimento inerziali*
2. il principio di costanza della velocità della luce: *la luce ha sempre la stessa velocità in tutti i sistemi di riferimento inerziali*

Nei paragrafi successivi vedremo quali siano le dirette conseguenze dell'applicazione di questi due principi. Indicheremo con c la velocità della luce, con v la velocità relativa dei due sistemi di riferimento in questione, β la quantità

$$\beta = \frac{v}{c}$$

e γ la quantità

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

61.2 Dilatazione dei tempi

Immaginiamo due astronavi nello spazio che si muovono con velocità v rispetto ad un asteroide vicino¹. Le due astronavi si muovono parallelamente e in linea retta mantenendo, stando una sopra all'altra, una distanza d tra loro. Sulla prima astronave uno strumento emette un impulso luminoso verso la seconda astronave; sulla seconda astronave uno specchio riflette l'impulso luminoso e lo rimanda verso la prima astronave. Due osservatori misurano la durata del fenomeno; uno si trova dentro l'astronave che emette il segnale; l'altro si trova sull'asteroide. Entrambi gli osservatori misurano la durata del fenomeno.

La durata del fenomeno che si vuole misurare è definita come l'intervallo di tempo trascorso tra due eventi: la partenza dalla prima astronave dell'impulso luminoso e il ritorno alla stessa astronave di tale impulso luminoso.

Vediamo adesso cosa misura l'osservatore sull'astronave. Egli vede l'impulso luminoso partire dalla sua nave, e percorrere il tragitto di andata e ritorno verso la seconda nave. Egli afferma che la durata dell'evento è

$$\Delta t = \frac{2d}{c} \quad (61.1)$$

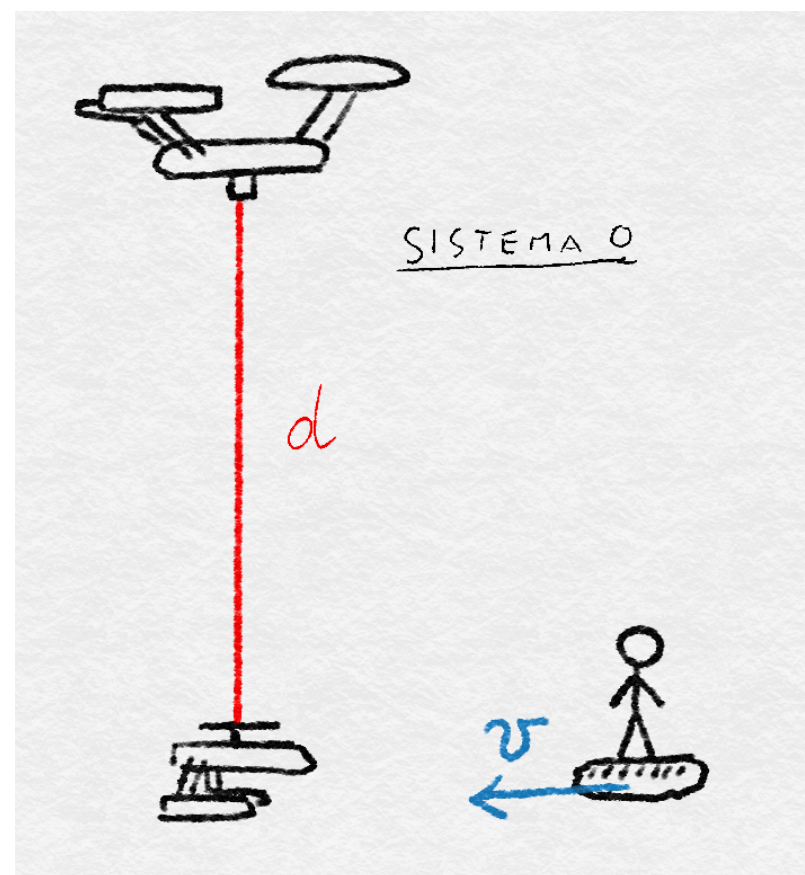


Fig. 61.1: Nel sistema di riferimento dell'astronave la luce percorre due volte la distanza tra le due astronavi.

¹Visitate il sito <https://www.geogebra.org/m/tSaxFJkm>

L'osservatore sull'astronave può inoltre calcolare quanto dura lo stesso fenomeno per l'osservatore sull'asteroide, in moto rispetto alle due astronavi. Per il secondo osservatore l'impulso luminoso, mentre si muove tra le due astronavi, contemporaneamente si muove in avanti insieme alle due astronavi. Il percorso fatto dalla luce è adesso sicuramente più lungo, ma sappiamo anche la luce lo percorre sempre alla stessa velocità c .

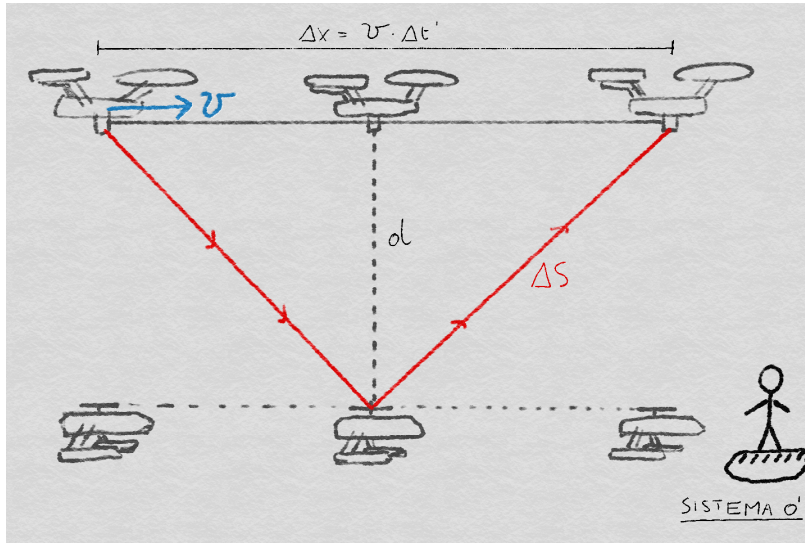


Fig. 61.2: Nel sistema di riferimento dell'asteroide la luce percorre un percorso molto più lungo che nel precedente caso.

La durata del fenomeno risulterà quindi:

$$\Delta t' = \frac{2\sqrt{d^2 + \frac{1}{4}v^2\Delta t'^2}}{c} \quad (61.2)$$

Eseguendo alcuni passaggi

$$\Delta t' = \sqrt{\frac{4d^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\Delta t'^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta t'^2 &= \Delta t^2 + \frac{v^2}{c^2}\Delta t'^2 \\ \Delta t'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= \Delta t^2 \\ \Delta t'^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\Delta t^2 \\ \Delta t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\Delta t \\ \Delta t' &= \gamma \Delta t \end{aligned} \quad (61.3)$$

L'intervallo di tempo Δt è definito *tempo proprio* in quanto è stato misurato nel sistema di riferimento in cui i due eventi misurati avvengono nel punto in cui si trova l'osservatore. Il secondo osservatore, che si trova sull'asteroide e che vede le astronavi in movimento, misura un intervallo di tempo più lungo di un fattore γ che sappiamo essere sempre maggiore di 1. Questo fenomeno è comunemente chiamato *dilatazione dei tempi*.

61.3 Contrazione delle distanze

61.3.1 Un primo modo di derivare il fenomeno

Consideriamo adesso il caso in cui si voglia misurare la distanza tra due punti A e B . Consideriamo un osservatore O che vede i due punti dello spazio fermi rispetto a lui, ed un secondo osservatore O' che O vede muoversi a velocità v dal punto A al punto B . Quando l'osservatore O' raggiunge il punto A , aziona il suo cronometro; quando raggiunge il punto B ferma il suo cronometro. La misura della distanza tra A e B verrà eseguita attraverso una misura del tempo trascorso tra due eventi: il raggiungimento del punto A ed il raggiungimento del punto B da parte dell'osservatore O' . Per questa persona l'intervallo di tempo misurato tra i due eventi è il *tempo proprio*, cioè è l'intervallo di tempo che passa tra due eventi che vengono visti accadere nello stesso luogo. La distanza da lui misurata sarà

$$\Delta S' = v \cdot \Delta t'$$

Allo stesso modo, un secondo osservatore fermo rispetto ai due punti A e B misurerà una distanza

$$\Delta S = v \cdot \Delta t$$

ed utilizzando le trasformate di Lorentz

$$\Delta S' = v \cdot \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{\Delta S}{\gamma}$$

Per cui

$$\Delta S = \gamma \Delta S'$$

il che significa che la distanza tra i due punti misurata dalla persona ferma rispetto a tali punti è maggiore, di un fattore γ , della stessa distanza misurata dalla persona in movimento rispetto ai due punti. Questo fenomeno è comunemente chiamato *contrazione delle distanze*.

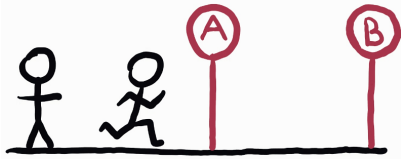


Fig. 61.3: La distanza tra due punti viene misurata misurando quanto tempo impiega una persona a muoversi dal punto A al punto B conoscendo la sua velocità.

61.3.2 Utilizzando le trasformate di Lorentz

Immaginiamo di misurare la lunghezza di un'asticella che vediamo ferma; per farlo misuriamo la posizione di ognuno dei vertici dell'asticella *nello stesso istante* ed otteniamo $A(x_1, t_1) = (0, 0)$ e $B(x_2, t_2) = (L, 0)$ ottenendo per l'asticella la lunghezza

$$\overline{AB} = x_2 - x_1 = L$$

Utilizzando adesso le trasformate di Lorentz, i due eventi *misura della posizione di A* e *misura della posizione di B* vengono visti da un osservatore in movimento come $A'(x'_1, t'_1) = (0, 0)$ e $B'(x'_2, t'_2) = (\gamma L, \gamma \frac{v}{c^2} L)$. La lunghezza del segmento deve però essere misurata misurando le posizioni dei due estremi dell'asticella nello stesso

istante. Se le due misure erano simultanee per il primo osservatore, quelle stesse misure non lo sono per il secondo osservatore.

Per avere la misura dell'asticella scriviamo

$$\begin{cases} L' = \Delta x' = x'_2 - x'_1 = \gamma (\Delta x + v \Delta t) \\ \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \left(\Delta t + \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \end{cases}$$

Noi vogliamo che l'osservatore in moto misuri le posizioni degli estremi dell'asticella nello stesso istante, quindi $\Delta t' = 0$ da cui

$$\Delta t = -\frac{v}{c^2} \Delta x$$

e quindi

$$L' = \Delta x' = \gamma \left(L - \frac{v^2}{c^2} L \right) = \gamma \frac{L}{\gamma^2}$$

$$L' = \frac{L}{\gamma}$$

Per l'osservatore in moto l'asticella appare più corta.

61.4 Trasformate di Galileo e Lorentz

Appare oramai chiaro che la misura sia dei tempi che delle distanze è qualcosa profondamente legato al sistema di riferimento in cui ci troviamo. Per capire meglio ciò di cui stiamo parlando è utile analizzare in dettaglio la differenza tra le trasformazioni di Galileo, utilizzate nella meccanica classica, e le trasformazioni di Lorentz per la meccanica relativistica. Immaginiamo di rappresentare su di un diagramma spazio-tempo il sistema di riferimento di una persona che corre. Nello stesso diagramma rappresentiamo anche il moto relativo di una persona che non sta correndo ed il moto relativo di due fotoni che si muovono, ovviamente alla velocità della luce, in avanti ed indietro rispetto all'osservatore.

61.4.1 Trasformate di Galileo

In figura 61.4² viene mostrato il diagramma spazio-tempo del moto di tre corpi, una persona e due fotoni, nel sistema di riferimento di una persona che corre ad una certa velocità. Come potete vedere, applicando le trasformazioni di Galileo, otteniamo una traslazione orizzontale dell'asse spaziale. Le linee diagonali, la cui inclinazione rappresenta la velocità dei corpi, ovviamente si inclinano a causa della trasformazione. In nessun modo è possibile inclinare gli assi cartesiani e mescolare tra loro le coordinate spaziali e quelle temporali. Notiamo inoltre che, sotto l'effetto della trasformazione, le distanze non vengono mai cambiate. Il problema dell'utilizzo di queste trasformazioni è che i due fotoni risultano avere velocità differenti... cosa in contrasto con gli esperimenti.

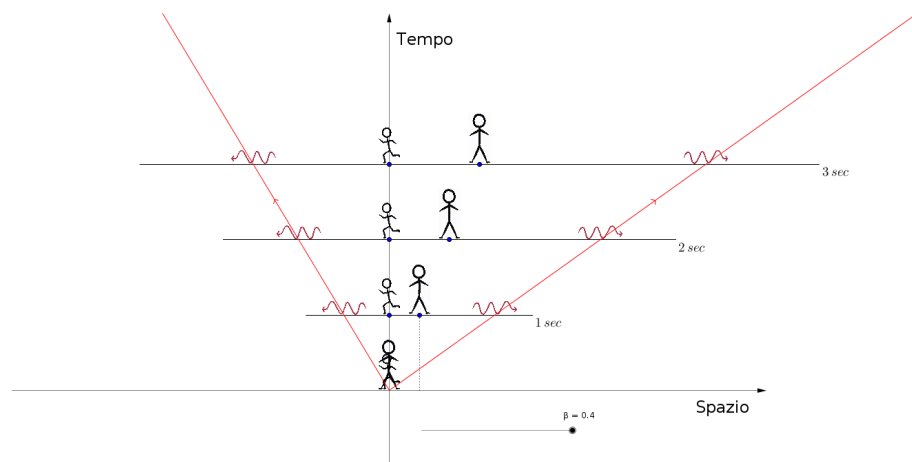


Fig. 61.4: Diagramma spaziotempo utilizzando le trasformazioni di Galileo

²Visitate il sito <https://www.geogebra.org/m/p5f26rJC> per vedere l'animazione che meglio permette di comprendere il fenomeno

61.4.2 Trasformate di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz agiscono in modo profondamente differente rispetto alle trasformazioni di Galileo. Esse prevedono una rotazione nello spaziotempo che mescola tra loro le coordinate spaziali e temporali. Come si può vedere dall'immagine in figura 61.5³ per la persona che corre i due fotoni viaggiano alla stessa velocità, esattamente come per la persona che non corre. Questo avviene grazie alla rotazione dell'asse spaziale, sul quale sono rappresentati tutti gli eventi tra loro contemporanei. È importante notare che in questo modo, mantenendo cioè costante la velocità della luce, necessariamente eventi simultanei per un certo osservatore non sono più simultanei per un differente osservatore. Osservando infatti le linee degli eventi simultanei per l'osservatore che non corre, esse intersecano il moto dei due fotoni in due istanti che non sono simultanei per l'osservatore che corre.

61.5 Da Galileo a Lorentz

Il modo classico di passare da un sistema di riferimento ad un altro è quello di utilizzare le trasformate di Galileo mostrate dalle equazioni 61.4 per un sistema in moto rispetto ad un altro con velocità v lungo l'asse x

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (61.4)$$

Queste di fatto rappresentano una traslazione dell'origine degli assi lungo l'asse del movimento. In ogni istante l'osservatore in moto vedrà gli eventi accadere in punti diversi dello spazio, ma verrà sempre preservato l'istante in cui essi accadono e la distanza spaziale tra loro. Queste trasformazioni violano il principio di costanza della velocità della luce, quindi non sono corrette.

³Visitate il sito <https://www.geogebra.org/m/r3wnGaDq> per vedere l'animazione che meglio permette di comprendere il fenomeno

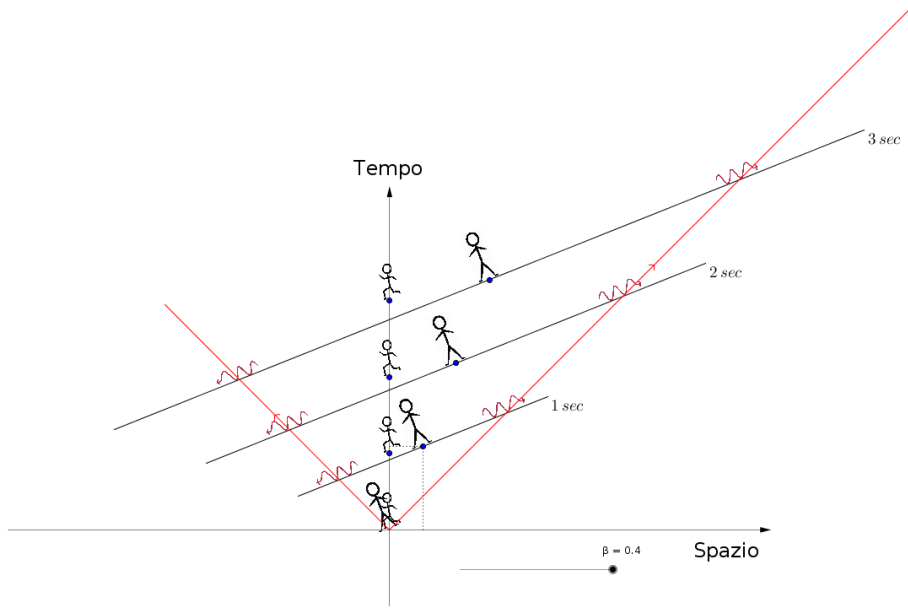


Fig. 61.5: Diagramma spaziotempo utilizzando le trasformazioni di Lorentz

Appare infatti chiaro che la misura di intervalli di tempo e di lunghezze è in realtà profondamente influenzata dal movimento. Questo è direttamente causato dal fatto che la velocità della luce è costante in tutti i sistemi di riferimento. Il modo corretto per passare da un sistema di riferimento ad un altro è quindi quello di utilizzare le trasformate di Lorentz che rispettano il primo principio su cui si basa la teoria della relatività. Tali trasformate erano già state scritte prima del lavoro di Einstein, ma fu lui che ne comprese il profondo significato.

Le trasformate di Lorentz, indicate dalle equazioni 61.5, per passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro che si muove con velocità v lungo l'asse x ,

sono:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (61.5)$$

Come potete vedere i valori dei tempi e delle posizioni in un sistema di riferimento dipendono sia dai tempi che dalle posizioni nell'altro sistema di riferimento. Dati due eventi, osservatori differenti misureranno sia intervalli di tempo che distanze spaziali differenti.

61.5.1 Invarianza della distanza spaziotemporale

Dati due eventi $A(x_a; t_a)$ e $B(x_b; t_b)$ che per un certo osservatore accadono in due generici punti dello spazio ed in due generici istanti nel tempo, la quantità

$$s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2$$

risulta invariante sotto l'azione delle trasformate di Lorentz. Infatti se consideriamo un secondo osservatore che vede gli stessi due eventi in punti differenti ed in istanti differenti $A(x'_a; t'_a)$ e $B(x'_b; t'_b)$ avremo che

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &= \Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2 = \\ &= (x'_a - x'_b)^2 - c^2 (t'_a - t'_b)^2 = \\ &= [\gamma (x_a - vt_a) - \gamma (x_b - vt_b)]^2 - c^2 [\gamma (t_a - \frac{v}{c^2} x_a) - \gamma (t_b - \frac{v}{c^2} x_b)]^2 = \\ &= \gamma^2 [(x_a - x_b) - v(t_a - t_b)]^2 - \gamma^2 c^2 [(t_a - t_b) - \frac{v}{c^2} (x_a - x_b)]^2 = \\ &= \gamma^2 [\Delta x - v \Delta t]^2 - \gamma^2 c^2 [\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x]^2 = \\ &= \gamma^2 [\Delta x^2 - 2v \Delta x \Delta t + v^2 \Delta t^2] - \gamma^2 c^2 [\Delta t^2 - 2 \frac{v}{c^2} \Delta x \Delta t + \frac{v^2}{c^4} \Delta x^2] = \\ &= \gamma^2 [\Delta x^2 - 2v \Delta x \Delta t + v^2 \Delta t^2] - \gamma^2 [c^2 \Delta t^2 - 2v \Delta x \Delta t + \frac{v^2}{c^2} \Delta x^2] = \\ &= \gamma^2 [\Delta x^2 + v^2 \Delta t^2 - c^2 \Delta t^2 - \frac{v^2}{c^2} \Delta x^2] = \\ &= \gamma^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta x^2 - c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \Delta t^2 \right] = \\ &= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) [\Delta x^2 - c^2 \Delta t^2] = \\ &= \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \\ &= \Delta s^2 \end{aligned}$$

La distanza spaziotemporale è invariante per tutti gli osservatori. Possiamo adesso distinguere tre casi:

- Se tale distanza è positiva, essa è definita di *tipo spazio*; nemmeno ciò che viaggia alla velocità della luce può passare dall'evento A all'evento B perché la loro distanza nello spazio è maggiore del percorso che può fare la luce nell'intervallo di tempo tra i due eventi.
- Se la distanza è nulla, allora è definita di *tipo luce*; solo ciò che viaggia alla velocità della luce può collegare i due eventi.
- Se la distanza è negativa allora è definita di *tipo tempo*; anche oggetti dotati di massa (e che quindi viaggiano a velocità inferiori a quelle della luce) possono collegare i due eventi.

Nel primo caso i due eventi non sono causalmente connessi; questo significa che nessuno dei due eventi potrà mai essere la causa di quell'altro. Osservatori diversi potranno vedere i due eventi accadere in un ordine temporale differente, senza che venga violato il principio di causa ed effetto. Nel secondo e terzo caso i due eventi sono causalmente connessi e le trasformazioni di Lorentz preserveranno l'ordine temporale degli eventi in modo da non violare il principio di causa ed effetto.

Questo discorso ci fa comprendere che la velocità della luce è in realtà qualcosa di molto più profondo legato alla struttura dello spazio-tempo; essa è infatti la velocità della causalità, cioè la massima velocità a cui le informazioni posso viaggiare attraverso lo spazio per connettere differenti eventi in un rapporto di relazione causa-effetto. Possiamo quindi descrivere la nostra realtà come un insieme di eventi ognuno dei quali accade in un certo punto dello spazio ed in un certo istante nel tempo, che, sebbene differenti per i vari osservatori, rimangono comunque tali da preservare le loro relazioni causali.

61.6 Legge di composizione delle velocità

Dalle trasformate di Lorentz possiamo ricavarci la legge di composizione delle velocità. Consideriamo due osservatori, il primo O in quiete ed il secondo O' in moto

rispetto al primo con velocità v . Immaginiamo un oggetto che si muove rispetto ad O con una velocità u . Ci chiediamo a quale velocità u' si muove l'oggetto rispetto ad O' . Limitiamoci per semplicità al caso unidimensionale.

Partendo dalle trasformate di Lorentz e differenziando avremo:

$$\begin{cases} dt' = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right) \\ dx' = \gamma (dx - v dt) \end{cases}$$

La velocità u' si otterrà dividendo la seconda equazione con la prima

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{(dx - v dt)}{\left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)}$$

Dividendo sopra e sotto per dt

$$u' = \frac{(u - v)}{\left(1 - \frac{vu}{c^2} \right)}$$

Con questa equazione è possibile calcolarsi la velocità con cui l'oggetto viene visto muoversi dall'osservatore O' .⁴

61.7 Massa relativistica

Il primo postulato della relatività impone che tutte le leggi fisiche abbiano la stessa formulazione per tutti gli osservatori inerziali. Se consideriamo per esempio la

⁴Immaginiamo a titolo di esempio che O' e l'oggetto in questione si muovano, visti da O , uno contro l'altro con velocità $v = 0,1c$ e $u = -0,1c$. Otterremo che

$$u' = \frac{(-0,1c - 0,1c)}{\left(1 + \frac{0,01c^2}{c^2} \right)} = -0,19802c$$

Significa che O' vede l'oggetto venirgli addosso ad una velocità che è un po' meno della somma Galileiana delle due velocità.

Se poi supponiamo che l'oggetto sia un fotone che si dirige verso O' e che quindi viaggi a velocità $u = -c$, avremo che

$$u' = \frac{(-c - v)}{\left(1 + \frac{vc}{c^2} \right)} = -c$$

il che dimostra che il fotone viene visto viaggiare alla stessa velocità anche da parte di O' .

seconda legge della dinamica nella formulazione di Newton, l'equazione

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

significa che un diverso osservatore inerziale, misurando una diversa forza, una diversa massa e una diversa accelerazione, deve comunque poter scrivere

$$\vec{F}' = m' \cdot \vec{a}'$$

, senza essere costretto a cambiare la formulazione della legge fisica.

La legge in esempio è però invariante solo per le trasformazioni di Galileo, che di fatto non coinvolgono né la massa dei corpi né la loro accelerazione, ma non per le trasformazioni di Lorentz. Per risolvere questo problema, e rendere tale formula invariante sotto le trasformate di Lorentz, la soluzione è quella di ridefinire la quantità di moto di un corpo come

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \quad (61.6)$$

e successivamente riscrivere il secondo principio della dinamica come

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

La quantità m è la massa invariante del corpo, detta anche massa a riposo, quella cioè misurata nel sistema di riferimento in cui è in quiete⁵.

61.7.1 I principi della dinamica

Per quanto riguarda i tre principi della dinamica, il primo ed il secondo verranno riscritti in un'unica formula in termini di variazione dell'impulso nel tempo, mentre

⁵In molti testi potreste leggere che la ridefinizione della quantità di moto avviene tramite la definizione della massa relativistica

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m$$

In realtà questo modo di insegnare l'argomento, sebbene formalmente non scorretto, porta a generare una confusione di fondo sul concetto di massa. Si potrebbe infatti pensare che un oggetto in moto, avendo una massa relativistica maggiore, possa anche generare un campo gravitazionale maggiore, il che è falso. L'unico concetto di massa che ha un reale significato è quello di massa a riposo.

il terzo viene sostituito con la legge di conservazione dell'impulso.

$$\begin{cases} \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} = cost \\ \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \Delta\vec{p} = 0 \end{cases} \quad (61.7)$$

61.7.2 Energia cinetica relativistica

Per il teorema dell'energia cinetica avremo che il lavoro per portare un corpo dal punto A al punto B è:

$$L = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_A^B \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{S} = \int_A^B d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}$$

$$L = \int_A^B d(\gamma m \vec{v}) \cdot \vec{v} = m \int_A^B d(\gamma \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

$$L = m \int_A^B v^2 d\gamma + m \int_A^B \gamma \vec{v} d\vec{v}$$

Adesso, utilizzando la formula che definisce γ :

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

da cui

$$v dv = c^2 \frac{1}{\gamma^3} d\gamma$$

avremo che

$$L = mc^2 \int_A^B \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) d\gamma + mc^2 \int_A^B \frac{1}{\gamma^2} d\gamma$$

$$L = mc^2 \int_A^B d\gamma$$

$$L = mc^2 (\gamma_B - \gamma_A)$$

Per il teorema dell'energia cinetica il lavoro di una forza esterna corrisponde alla variazione di energia cinetica del corpo, per cui

$$L = m\gamma_B c^2 - m\gamma_A c^2 = \Delta E_c$$

Consideriamo il caso di un oggetto inizialmente fermo, corrispondente ad un'energia cinetica nulla; avremo che $v_A = 0$ e quindi $\gamma_A = 1$.

$$E_c = mc^2(\gamma - 1)$$

Questa è l'espressione per l'energia cinetica di un corpo; quando il corpo è fermo la sua energia cinetica è nulla esattamente come nel caso classico, ma l'espressione di questa grandezza differisce dal caso classico.

61.7.3 Energia totale relativistica

Abbiamo visto dai conti precedenti che l'energia cinetica di una particella risulta essere pari alla differenza tra due termini, il primo identificabile con l'energia totale della particella in movimento, il secondo identificabile con l'energia della particella a riposo.

L'energia totale associata ad una certa particella con massa a riposo m sarà quindi

$$E = m\gamma c^2 \quad (61.8)$$

Questa equazione ci dice che la massa di una particella e la sua energia sono due quantità equivalenti.

La massa è il modo in cui si manifesta l'energia localizzata in una certa regione di spazio.

Se in una certa regione di spazio è localizzata dell'energia, allora noi percepiamo la presenza di tale energia come massa. In generale questo è vero non solo nel caso dell'energia cinetica, ma per qualunque forma di energia.

61.7.4 Relazione tra energia ed impulso

Con semplici passaggi, dividendo tra loro l'equazione 61.6 e 61.8, e riutilizzando la definizione di γ si ottiene la relazione

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (61.9)$$

Infatti

$$\begin{cases} p^2 = m_0^2 \gamma^2 v^2 \\ E^2 = m_0^2 \gamma^2 c^4 \end{cases}$$

da cui, moltiplicando la prima per c^2 , si ottiene

$$\begin{cases} p^2 c^2 = m_0^2 \gamma^2 v^2 c^2 \\ E^2 = m_0^2 \gamma^2 c^4 \end{cases}$$

e quindi, sottraendo la prima dalla seconda, abbiamo

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 \gamma^2 c^2 (c^2 - v^2)$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 \frac{c^2 (c^2 - v^2)}{(1 - \frac{v^2}{c^2})}$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 \frac{c^2 (c^2 - v^2)}{\frac{1}{c^2} (c^2 - v^2)}$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

Da cui abbiamo l'equazione 61.9.

Questa equazione mette in relazione, per ogni particella, la sua energia ed il suo impulso. E' di particolare interesse applicare tale equazione alla luce che ha massa a riposo nulla. Questa equazione ci dice che la luce ha comunque impulso in quanto ha energia. Dal momento che la luce ha impulso, fenomeni come la riflessione della luce implicano una variazione dell'impulso nel tempo e quindi una forza. La luce che si riflette su di uno specchio o che viene assorbita da un corpo nero, esercita su di esso una forza.

Effetto Doppler Relativistico

Scheda 62

Immaginiamo un'astronave che si allontana dalla Terra ad una velocità U . Essa emette un'onda elettromagnetica di frequenza ν' la quale viene percepita sulla Terra con frequenza ν data da

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Per ricavare tale formula immaginiamo l'astronave emettere un raggio di luce verso la Terra. La luce emessa è un'onda di frequenza ν' nel sistema di riferimento dell'astronave. Questo significa che due massimi successivi dell'onda si trovano nello stesso punto dopo un intervallo di tempo $\Delta t' = T'$ sempre nel sistema di riferimento dell'astronave. Con $\Delta t'$ intendo l'intervallo di tempo che parra tra l'emissione di due massimi successivi dell'onda, che nel sistema di riferimento dell'astronave coincidono con il periodo T' dell'onda.

Sulla Terra vedono l'onda e ne misurano la frequenza misurando il tempo T che passa da quando un massimo si trova in un certo punto a quando il massimo successivo si trova nello stesso punto. Questa è la definizione del periodo di un'onda.

Sulla Terra, da quando un massimo dell'onda si trova in un certo punto, il successivo si troverà in tale punto dopo un tempo

$$T = \Delta t + \frac{U \Delta t}{c}$$

Il primo intervallo di tempo Δt è quello che passa tra l'emissione di un massimo e del massimo successivo da parte dell'astronave, nel sistema di riferimento della Terra. Il secondo termine è il tempo che la luce impiega a percorrere il tragitto percorso dall'astronave nell'intervallo di tempo tra l'emissione dei due massimi dell'onda. L'astronave infatti non si trova sempre nello stesso punto quando emette un massimo dell'onda.

Per la dilatazione dei tempi possiamo scrivere

$$T = \gamma \Delta t' + \frac{U \gamma \Delta t'}{c}$$

$$T = \gamma \Delta t' \left(1 + \frac{U}{c} \right)$$

$$T = T' \frac{\left(1 + \frac{U}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$$

$$T = T' \sqrt{\frac{1 + \frac{U}{c}}{1 - \frac{U}{c}}}$$

da qui la formula per le frequenze

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 - \frac{U}{c}}{1 + \frac{U}{c}}}$$

Se volete potete memorizzare le formule nel seguente modo:

$$T = \gamma (1 - \beta) T'$$

Qualora la sorgente si muovesse con un generico angolo θ rispetto alla semiretta di riferimento che parte radialmente dall'osservatore verso la sorgente, allora la formula data deve essere modificata nel seguente modo:

$$T = \gamma (1 - \beta \cos \theta) T'$$

Per l'angolo $\theta = 0$ ritroviamo la formula precedente.

La scatola di fotoni è un ottimo esempio per comprendere la natura della massa e del tempo. Cos'è la massa? da dove nasce lo scorrere del tempo?

63.1 Cos'è la scatola di fotoni

Immaginiamo una scatola cubica fatta di pareti immaginarie, con all'interno un certo numero di fotoni che si muovono confinati al suo interno. Possiamo fare le seguenti affermazioni:

- All'interno della scatola è sicuramente contenuta dell'energia, in quanto ogni singolo fotone ha energia;
- Nessuno degli oggetti presenti all'interno della scatola ha massa;
- Ogni volta che un fotone raggiunge una delle pareti viene respinto e quindi esercita sulla parete una forza; se la scatola è in quiete allora la somma di tutte le forze dovute alle interazioni dei fotoni con le pareti è nulla.
- visto che i fotoni viaggiano esattamente alla velocità della luce, essi non hanno esperienza dello scorrere del tempo.

63.1.1 La scatola ha massa

Immaginiamo di esercitare sulla scatola in quiete una forza $\vec{F}$ verso destra. Nel momento in cui la scatola si muove, i fotoni che interagiscono con la parete di sinistra eserciteranno su di essa una pressione maggiore, mentre i fotoni che interagiscono con la parete di destra eserciteranno su di essa una pressione minore. La differenza di pressione corrisponde ad una forza $\vec{F}'$ opposta ad $\vec{F}$ che rappresenta quindi una resistenza esercitata dalla scatola alla nostra azione iniziale. Di fatto noi interpretiamo tale resistenza come *massa*. La scatola ha quindi una massa anche se tutti i suoi costituenti non hanno massa, né le pareti stesse della scatola. L'atto di aver confinato l'energia dei fotoni all'interno della scatola ha dato alla scatola stessa una massa, calcolabile con l'equazione

$$m = \frac{E}{c^2}$$

La massa è la proprietà mostrata dall'energia quando viene confinata

63.1.2 La scatola ha esperienza del tempo

Immaginiamo la più semplice scatola di fotoni immaginabile, costituita da un unico fotone che si muove perpendicolarmente tra due pareti della scatola. Questa particolare scatola è di fatto un orologio, in quanto il movimento del fotone è un moto periodico. Un ticchettio dell'orologio corrisponde al tempo che impiega il fotone ad urtare due volte la stessa parete della scatola. Di fatto la scatola è un orologio; misura il tempo ed ha quindi esperienza del tempo, sebbene nessuno dei suoi costituenti abbia esperienza del tempo. Infatti i fotoni non hanno massa e quindi per loro il tempo è fermo.

63.1.3 La nascita della massa e del tempo

La massa non è una caratteristica intrinseca della materia, quanto una proprietà che emerge nel momento in cui confiniamo dell'energia in un luogo definito. Tale confinamento avviene attraverso continue interazioni che vincolano i costituenti a rimanere confinati, ed è il flusso causale di tali interazioni che definisce lo scorrere del tempo.

63.2 La scatola di fotoni nella realtà

Consideriamo un singolo neutrone formato da tre quarks: essi sono descritti dal modello standard come tre particelle senza massa che acquistano massa interagendo con il campo di Higgs. Interagendo poi tra loro attraverso l'interazione forte, essi sono confinati all'interno di una regione di spazio molto piccola che di conseguenza acquista massa... la massa del neutrone! I singoli quarks sono l'equivalente dei fotoni della scatola, il neutrone è la scatola. Il neutrone ha massa a causa dell'energia di interazione tra i singoli quarks e di conseguenza il neutrone ha esperienza del tempo, tanto che decade.