SCUOLA INTERATENEO DI SPECIALIZZAZIONE PER LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI DELLA SCUOLA SECONDARIA SIS

Relazione sul laboratorio di

DIDATTICA DELL'ALGEBRA

Nicco Giovanni

2001/02

La didattica dell'algebra, tra le tante didattiche, è particolarmente significativa, in quanto in essa sono intrinsecamente fondamentali gli aspetti che distinguono un insegnamento veramente formativo da un insegnamento sterile e senza conseguenze.
Non a caso, laddove l'obiettivo fallisce, l'algebra (e la matematica) vengono purtroppo spesso ricordate dagli allievi come materie ostiche cui ci si è momentaneamente piegati negli anni scolastici ma che non si vorrebbero più incontrare nella vita.
Per realizzare viceversa l'obiettivo di far amare la matematica in quanto strumento di pensiero e parte di sé cui non si vuole più rinunciare è necessaria una profonda preparazione ovviamente disciplinare ma soprattutto propriamente *didattica* , dove con questo termine si intende la conoscenza delle problematiche ad essa connesse e delle relative possibili strategie risolutive.
Occorre quindi introdurre un *sapere* che oltre a fornire un sufficiente vocabolario per definire e ragionare sulle questioni anzidette, consenta di affrontare il noto triangolo didattico (Disciplina / Insegnante / Allievo) con tutti gli strumenti necessari affinché l'Allievo arrivi ad essere autonomo nei confronti della Disciplina.
L'ostacolo più grande è soprattutto di natura comunicativa: la realtà dell'allievo è profondamente diversa da quella del docente: se questa nozione non è assolutamente presente nel fare didattica, questa è destinata a fallire.

La prima fondamentale differenza trova, come in moltissimi altri casi, un riscontro storico: il passaggio dalla cosiddetta *fase verbale* (assenza di simboli nel pensiero matematico) a quella *simbolica* (completa astrazione e formalizzazione del problema) è estremamente complesso e costituisce un ostacolo che richiede molta cura per essere superato.
Riporto qui di seguito un protocollo da me registrato che dovrebbe essere illuminante in tal senso; lo chiameremo *protocollo di Marta.*
Ho presentato il seguente problema ad una persona assolutamente digiuna di algebra invitandola a manifestare qualsiasi pensiero le sopraggiungesse.
(i suoi interventi sono indicati in carattere normale i miei in *italico*.)

Un numero aggiunto al suo triplo dà 76, trovare il numero.

Non so da che parte cominciare.
Un numero aggiunto al suo triplo non vuol dire che sia lo stesso numero che fa il triplo: è risolvibile?
Ci deve essere qualcosa da fare di logico
C'è una soluzione ma non so da che parte partire comunque se me lo garantisci tu che c'è...
Secondo me è 16. No, è sbagliato.
Ho pensato 3,6,9, pensavo un numero pari moltiplicato per tre più quello che manca fa 76.
(Pensa un poco in silenzio poi dice)
E' come se fosse moltiplicato per quattro ma non può essere, altrimenti me l'avresti detto.
cos'è che ti fa pensare che te lo avrei detto?
Il fatto che il problema sarebbe stato diverso, cioè... sarebbe stato "quattro volte un numero"
perché pensi che sarebbe stato diverso?

perché se no è una presa in giro.
perché?
"un numero aggiunto al suo triplo" mi sembra evidente che non possa essere lo stesso numero ripetuto quattro volte che dà 76 altrimenti avrei fatto la domanda più semplice
perché pensi che avrei fatto la domanda così?
perché è il modo più semplice per arrivare al risultato
potevo anche dirtelo
quello non era un problema: era una soluzione.
(pensa un attimo)
76 diviso 4 è il numero?
si, è quello e vale 19.
Non mi sembra la domanda giusta.
proviamo a chiamare quel numero x e riscrivere il problema
(scrive)
X + Xx3=76
in matematica X per 3 si scrive 3X: prova.
X + 3X = 76
ti dice qualcosa?
No
sicura?
(scrive)
4X=76 , e adesso?
adesso si tratta di trovare X, che era il numero che cercavamo
X=76/4
che fa 19.

Dall'analisi di questo protocollo emerge innanzitutto chiara una convinzione: se la matematica non serve a risolvere un problema allora *è una presa in giro* : ho trovato questa constatazione assolutamente descrittiva dei problemi legati alla motivazione degli allievi (cui una possibile risposta sono le metodologie orientate al problem solving).
Un altra considerazione è che, superato l'ostacolo del significato dell'esercizio, Marta è arrivata alla conclusione in forma verbale e si è convinta di questa soluzione. Quando viceversa le ho proposto il linguaggio algebrico, pur avendo afferrato l'idea non ne era assolutamente convinta. Il fatto che la forma verbale o numerica sia più convincente di quella simbolica è una cosa che si continua a riscontrare nella maggior parte degli allievi alle superiori e tende a scomparire solo a livello universitario.
Arrivati a questo punto, Marta era comunque incuriosita ed ha voluto provare un altro esercizio.
Le ho proposto il seguente:

La differenza di due numeri è 21 e l'uno è quadruplo dell'altro. Trovare i due numeri.
L'unica cosa che mi viene in mente è dividere 21 per 4.
... perché è l'unico dato che ho disponibile, ma il mio dubbio è: sono validi anche i numeri con le virgole?
forse, comunque 21:4=5,25

Una cosa che non mi è chiara è la differenza di due numeri.

E' come quando dici che uno è più alto di 4 cm: la differenza delle due altezze è 4 cm.

Oppure è 21*4 : fa' 84!

cos'è 84?

Mi sono stufata.

Ho quindi spiegato che questo tipo di problema sarebbe stato troppo difficile da risolvere con le sole parole e la ho aiutata a scrivere

A-B=21

Poi ha incontrato un problema perché non sapeva quale dei due numeri era un quarto dell'altro e "quindi non poteva andare avanti"; facendole notare che "togliendo B da A si ottiene 21: questo può dirci qualcosa", allora ha scritto

A=4B

Di seguito ho avuto modo di capire come qualcosa per me evidente fosse per lei incomprensibile: l'ho invitata a sostituire 4B al posto di A nella prima formula, alla fine lo ha fatto ed è riuscita a trovare il valore di B, ma facendolo ha anche (palesemente) deciso di rinunciare a capire.

Quest'ultimo passaggio è assolutamente caratteristico di molte didattiche fallite: il forzare l'uso del simbolo in un momento prematuro spinge l'allievo ad una supina accettazione delle regole formali, non sue, non capite, non apprezzate: segue l'abbandono dell'attenzione ed un approccio che viene detto *pseudo-strutturale* fatto cioè di manipolazione simbolica vuota di significato.

Se si volesse continuare a insegnare l'algebra a Marta occorrerebbe fermarsi e meditare profondamente (in completa analogia con quanto avviene nella scuola dove gli allievi sono per altro anche molti e con diverse conoscenze): cosa voglio assolutamente insegnare? Quando devo e posso introdurre il simbolo senza provocare il rigetto della materia e soprattutto come posso introdurlo?

Per rispondere a questa domanda occorre fare tesoro delle informazioni desumibili dai protocolli, dai modelli epistemologici, dai modelli didattici e soprattutto dall'esperienza.

Una possibile base da cui partire è un lessico opportuno.

Si consideri ad esempio il triangolo di Frege: (Espressione, Denotazione, Senso). Mediante questo strumento è possibile sezionare i luoghi della didattica, osservando che il medesimo oggetto matematico (Denotazione) può essere espresso in più modi e richiamare diversi significati.

Un'altro potentissimo strumento per sviluppare una didattica corretta è operare una chiara distinzione tra *conoscenze procedurali* e *conoscenze relazionali*. Mentre le prime sono più semplici da capire (e quindi da spiegare) le seconde sono quelle indispensabili per gestire problemi di una certa complessità: è infatti assodato che la mente umana non riesce a gestire più 5,6 massimo 7 token (oggetti) per volta. Se non si *condensano* i processi in entità autonome consolidate e stabili (token), non è di fatto possibile fare discorsi che tratterebbero troppi elementi contemporaneamente per essere gestiti a mente. (Tall chiama la sintesi di un processo in un oggetto *procetto* per rendere meglio l'idea dell'avvenuta fusione).

Viene quindi in soccorso al pensiero, da un lato l'introduzione del simbolo o dell'oggetto matematico, dall'altro *la sintassi* che incorpora le regole (funzionanti) di gestione dell'oggetto stesso.

Il meccanismo è quindi il seguente: la difficoltà viene risolta con un processo di astrazione che è pienamente *semantico*, cioè incorpora il significato del problema che si sta' trattando, una precisa *sintassi* consente di operare su un piano prettamente simbolico, infine il risultato viene ritradotto in forma verbale cioè nella sua piena semantica. Si pensi ad esempio alla facilità con cui è possibile dimostrare che la somma di due numeri dispari è pari una volta che viene tradotto il problema sul registro simbolico : $2m+1+2n+1=2(m+n+1)$ e quanto sia viceversa difficile farlo a livello verbale.

Se questo è quello che avviene a livello ideale e che costituisce l'obiettivo (secondo Vygosky) di estendere il pensiero all'uso del linguaggio simbolico (che diviene risultato ma soprattutto *strumento* di pensiero stesso), in pratica succede spesso che, pur essendo, sulla carta, i programmi orientati a una conoscenza *relazionale* dell'algebra, le difficoltà impediscano l'incorporazione della semantica nei costrutti algebrici i quali si perdurano viceversa come meri *processi* con l'inevitabile succedersi di errori qualora scompaia il controllo semantico.

Da un lato sono quindi presenti tutti gli ostacoli all'apprendimento dell'algebra che vanno da una scarsa dimestichezza con l'aritmetica che impedisce di fatto la manipolazione simbolica (solo dopo aver fatto molte somme si arriva infine a pensare $a+b$ non più come il processo di prendere a e sommargli b ma come un oggetto a se, cosa che suggerisce di fare il *metodo operazionale* di Kutschev) , fino a problemi più complessi come quello della motivazione che ha una possibile soluzione nell'individuazione di uno *spazio sociale* (l'unico veramente in grado di entrare in contatto e motivare l'allievo) e di uno *spazio di produzione* (istituito dal docente per pianificare l'azione, fornire obiettivi e avvalorare l'uso dei simboli come *strumento*).

Perdere il contatto con il valore semantico del linguaggio algebrico o semplicemente non raggiungerlo è in realtà molto semplice, si pensi infatti alla problematica della *nominalizzazione*: un processo che non è affatto automatico, cioè stenografico, ma che richiede ad esempio già una capacità verbale evoluta per comprendere il problema e un *pensiero anticipatorio* cioè di *intuizione* che guidi ad una creazione fortunata di simboli.

Si consideri ad esempio il seguente processo di nominalizzazione:

Calcolare l'età di un padre e del figlio sapendo che tre anni fa l'età del padre era tripla di quella del figlio e che fra due anni l'età del padre sarà 5 volte quella del figlio.

Si può riscrivere:

Calcolare l'età di un padre e del figlio sapendo che tre anni fa l'età del padre era tripla di quella del figlio e che fra due anni l'età del padre sarà 5 volte quella del figlio.

Che diventa:
Calcolare l'età (x) di un padre e (y) del figlio sapendo che $x-3 = 3(y-3)$ e che $(x+2)=5*(y+2)$.

Poi:
Calcolare x e y sapendo che $(x-3) = 3(y-3)$ e che
$x+2=5*(y+2)$.

Infine:
risolvere il sistema
$x-3 = 3(y-3)$
$x+2=5*(y+2)$

Tale processo (dove si sono evidenziati con i colori i passaggi al simbolo) non è affatto banale, pur essendo il problema algebrico in se molto semplice.

Una volta perso, anche solo parzialmente il controllo semantico è facile incorrere in errori dettati da automatismi inconsci. (L'automatismo dovrebbe viceversa sopraggiungere solo una volta che si è acquisito pienamente il significato e viceversa il significato dovrebbe sempre accompagnare l'automatismo).
Esempio, quando nel difficile passaggio dall'aritmetica delle medie all'algebra delle superiori si cominciano ad omettere i segni di prodotto, o le parentesi perdono l'univoco significato di *precedenza* per diventare anche *separatori* di simboli, può accadere che il prodotto *ab*, nel momento in cui *b* diventa *-b* diventi *a-b*: è bene cercare di capire perchè avviene questo tipo di errore: analizzando molti protocolli si scopre che l'allievo delle medie comincia dal comprendere bene il concetto di addizione/additività e tende a recuperarlo a scapito di quello meno famigliare di prodotto quando si trova in difficoltà (ad esempio perché è aumentato il numero di simboli da trattare contemporaneamente).
Per restituire significato ai simboli vi sono vari sistemi, quali quello di appoggiarsi all'intuizione visiva (grafici) o operativa (il metodo usato dalla Castelnuovo e ben esemplificato nei *bilanciamenti* con oggetti che compaiono su entrambi i piatti della bilancia per spiegare le equazioni) , magari introducendo l'algebra o la descrizione di processi in forma pre-algebrica già nelle medie, o viceversa richiamare continuamente il significato anche nei passaggi intermedi della manipolazione simbolica (vi sono in tal senso problemi che si prestano bene come ad esempio quelli in contesti familiari quali il conteggio delle sedie attorno ad una serie di tavoli rettangolari dove le possibili associazioni di numeri hanno un corrispettivo nelle sequenze di conteggio secondo diversi ordinamenti delle sedie stesse).
Un metodo sicuramente generale e valido è quello indicato dalla Sfard: partire sempre dai processi ed introdurre le strutture solo quando queste divengono (e sono avvertite come) necessarie.
Per quanto poi riguarda i processi stessi, vi sono metodi che consentono di renderli più comprensibili come l'uso dei grafi o della programmazione, dove il procedimento di ingresso/uscita sono particolarmente evidenti.
Un altro tipo di problema è quello del perdurare di meccanismi che si sono consolidati in altri *frame* (contesti), ad esempio un tipico errore quale passare da $x^2 > 4$ a $x > +/-2$ nasce dall'aver affrontato prima le equazioni e quindi le disequazioni; una possibile soluzione è quella di invertire l'ordine di presentazione del programma (partendo dalle funzioni lineari e loro grafici, per introdurre le disequazioni e solo infine le equazioni come caso particolare di disequazioni).
Anche una particolare sensibilità verso quanto ci indica Tall, cioè che ogni acquisizione è strettamente personale dell'allievo e passa necessariamente dalle *sue* verità ed esperienze e non da quelle del docente (che potrebbero essergli del tutto estranee, soprattutto se molto formali), aiuta a ristabilire/contrattare la comunicazione necessaria. (Anche qui, l'approccio storico ci dice che fino a quando una serie di problemi comuni non hanno spinto verso l'unificazione del linguaggio algebrico, l'algebra stessa non è proceduta più di tanto).
Un aiuto molto significativo arriva anche dalla rivalutazione dell'errore il quale deve essere considerato qualcosa di preziosissimo in quanto consente di mettere in luce dove è stato che il pensiero ha tratto in inganno, avviando l'allievo al ragionamento metacognitivo (ad esempio quando si rende conto che ha usato un modello assimilato in precedenza).
Una questione che invece rimane legata alla sensibilità del docente è quella della misura con cui usare modelli/analogie che da un lato semplificano dall'altro apportano mis-concezioni e rigidità se usati troppo spesso. L'uso costante della variabile *x* come incognita ad esempio, in un primo momento facilita, ma in un secondo blocca l'allievo nel momento in cui incontra un parametro *a* e sente che è un qualcosa di completamente nuovo in quanto

non lo ha mai trattato: le convenzioni, tendono a diventare regola al di fuori della quale non ci si riesce più a muovere: in tal senso ritengo un esperimento interessante da fare, quello di usare, per un certo periodo sempre lettere diverse all'interno delle espressioni, addirittura scegliendo dei simboli diversi dai consueti per le operazioni (ad esempio $ per il prodotto, ! per la somma) per sottolineare il fatto che dietro ad ogni simbolo c'è sempre un significato e che bisogna tenerlo ben presente senza abbandonarsi troppo agli automatismi.

In maniera analoga, esplicitando la differenza tra *argomentazione* e *dimostrazione*, si può giocare alla ricerca del *controesempio* che, esistendo, falsifica la argomentazione ma non può nulla contro la dimostrazione corretta in quanto non si riesce a trovare (come si dovrebbe comprendere dalla dimostrazione stessa).

Ancora una indicazione di tipo generale è quella di fare attività di vario tipo in modo che, da un lato ogni allievo abbia la possibilità di trovare un settore in cui è particolarmente competente ed attorno al quale può costruire dei modelli che egli avverte come suoi (potrebbe essere l'allievo esperto di informatica o quello appassionato di motori), dall'altro si sblocchino possibili rigidità legate all'uso degli stessi riferimenti (togliere e ricontare somme di monete da due mucchi inizialmente uguali può essere molto più illuminante che ripetere venti esercizi sulle equazioni senza averne capito il significato).

Se quelle riportate sono considerazioni complessivamente comunque di natura generale, per affrontare di fatto la didattica è opportuno dapprima uno studio completo dei programmi di istituto (comprese le discipline laterali), quindi l'individuazione degli obiettivi, dei prerequisiti e dei nodi concettuali dei quali qui è stata analizzata una minima parte per ragioni sia di tempo che di voluta generalità.