

Un Enunciato Indecidibile?

«x è un numero negativo»



Questa affermazione è vera o falsa? La risposta non è immediata.
Il suo valore di verità dipende da *cosa* è x.

L'Enunciato Aperto: Una Verità Condizionata

Enunciato Aperto (o Predicato)

Un enunciato che contiene una o più variabili, il cui valore di verità (Vero o Falso) dipende dai valori attribuiti alle variabili stesse, scelti in un determinato **insieme universo o dominio**.

Per $P(x)$: « x è un numero negativo», con x scelto nell'universo \mathbb{Z} (numeri interi):

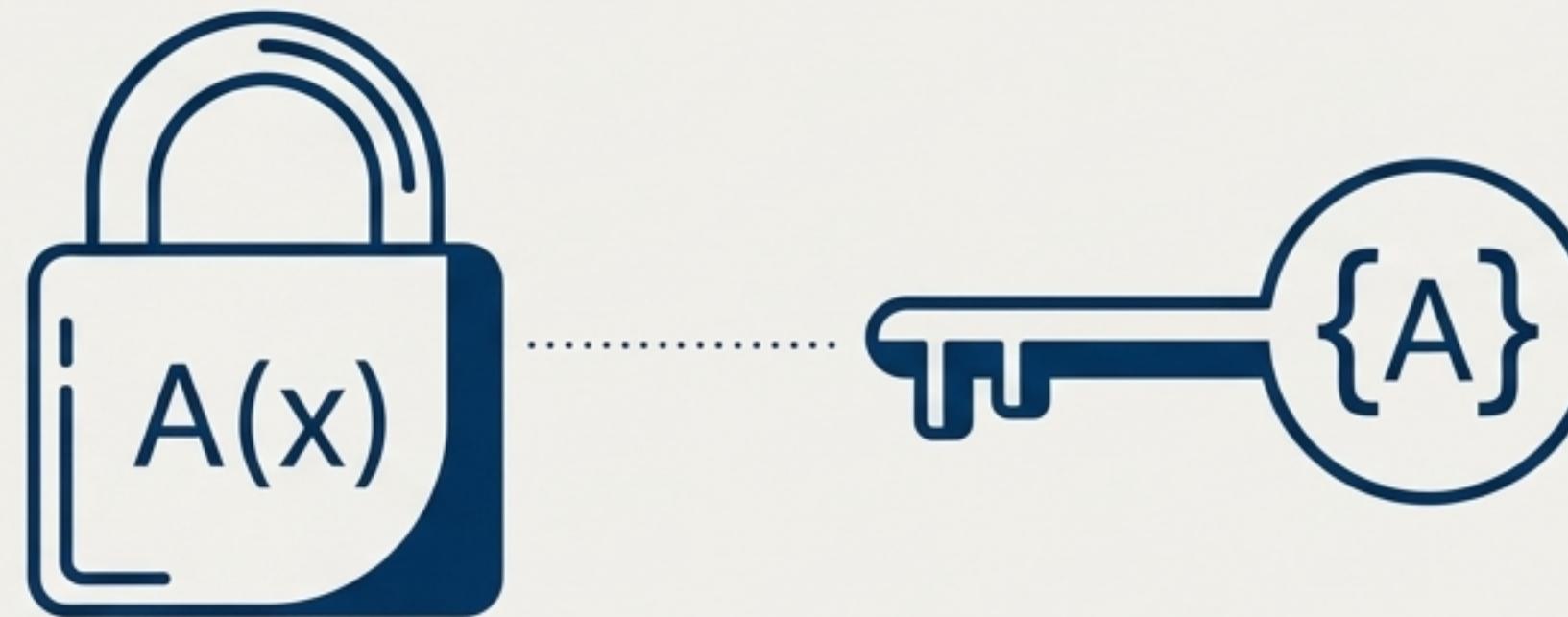
$x = -3 \longrightarrow \text{Vero}$

$x = +5 \longrightarrow \text{Falso}$

Un altro esempio: $B(y)$: «6 è divisore di y », con y nell'universo dei numeri naturali pari.

La Soluzione: Costruire un “Insieme di Verità”

Come possiamo rendere tangibile un enunciato aperto? Raggruppando tutti i valori che lo rendono vero.



Insieme di Verità

Dato un enunciato aperto $A(x)$ e un insieme universo U , l'insieme di verità A è il sottoinsieme di U formato da tutti gli elementi che, sostituiti a x , rendono l'enunciato **vero**.

Dall'Enunciato all'Insieme: Un Esempio Pratico

Scenario

Insieme Universo (U): $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

Enunciato Aperto $A(x)$: « x ha due cifre»

Processo di pensiero

$A(2) \rightarrow$ Falso

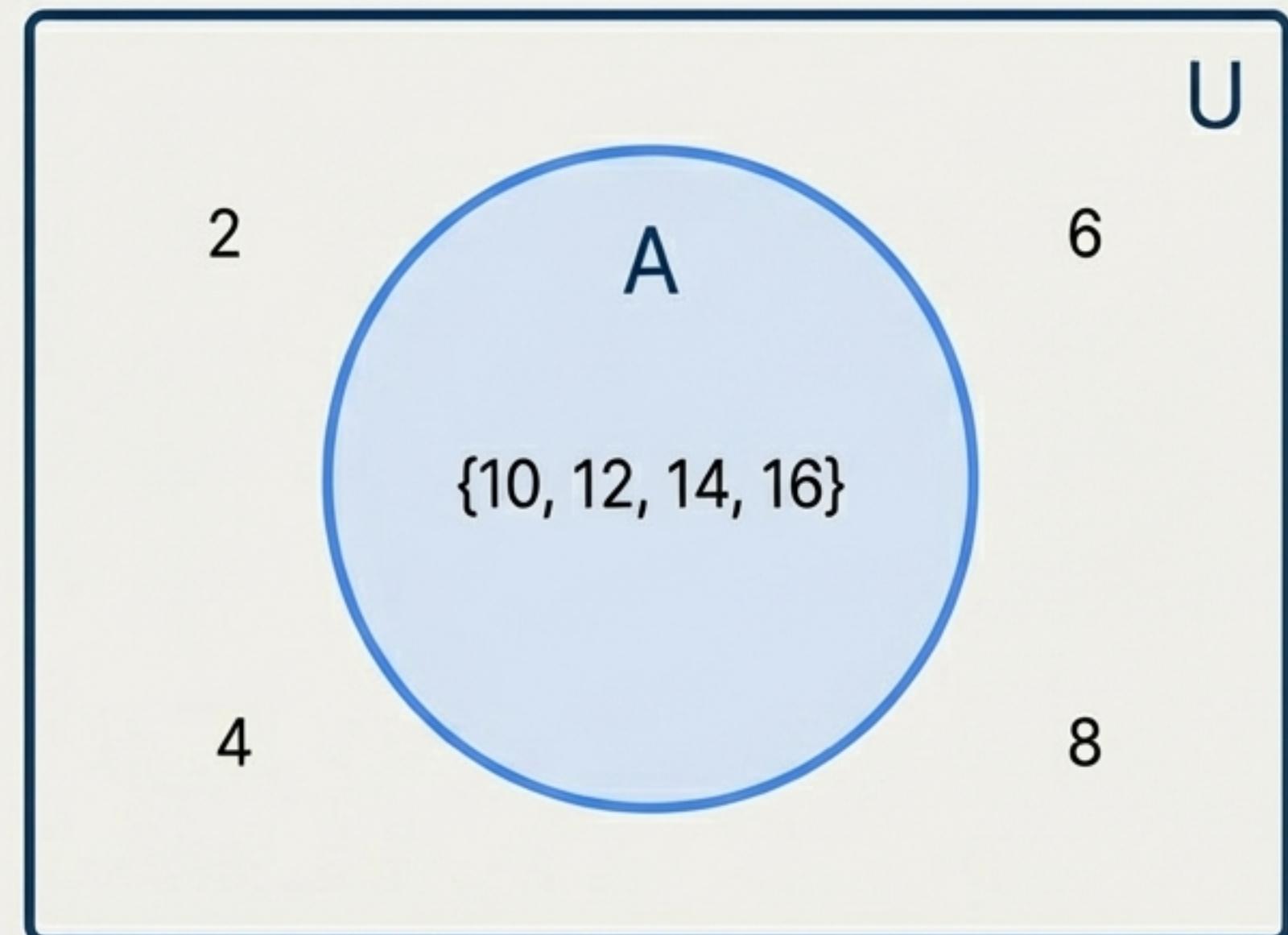
$A(8) \rightarrow$ Falso

$A(10) \rightarrow$ **Vero**

$A(16) \rightarrow$ **Vero**

Risultato

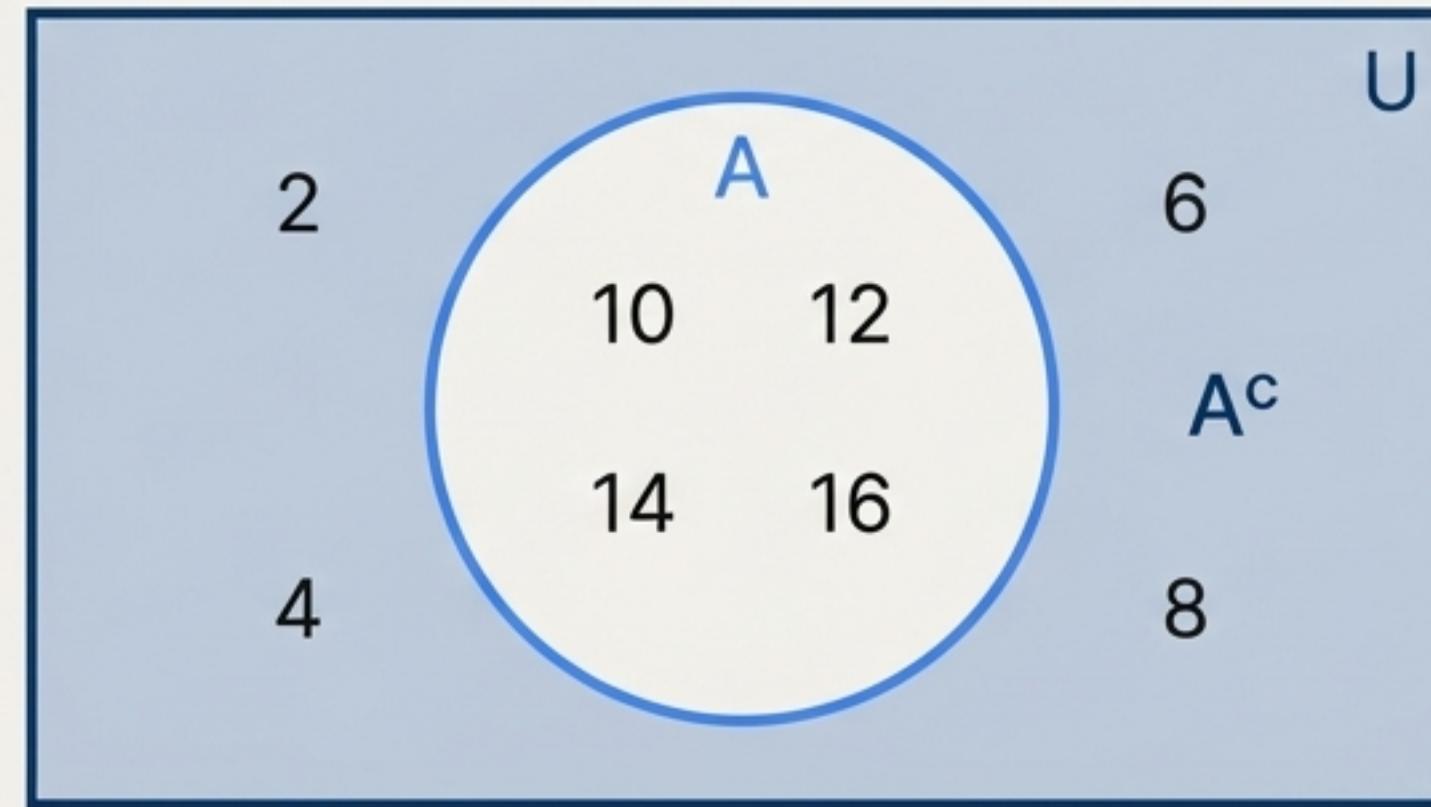
Insieme di Verità (A): $A = \{10, 12, 14, 16\}$



E i Valori che Rendono Falso l'Enunciato?

Gli elementi dell'universo che non appartengono all'insieme di verità sono quelli per cui l'enunciato è falso.

Questi elementi formano l'**insieme complementare** dell'insieme di verità, rispetto all'universo U .



Per $A(x)$: « x ha due cifre», l'insieme dei valori che lo rendono falso è: {2, 4, 6, 8}.
Questo corrisponde a A^c (il complementare di A).

Un Ponte tra Due Mondi: La Logica Incontra gli Insiemi



Le operazioni astratte dei connettivi logici sugli enunciati aperti trovano una corrispondenza perfetta e intuitiva nelle operazioni concrete sugli insiemi di verità.

Stiamo per dimostrare come ogni simbolo della logica (\neg , \wedge , \vee) ha un suo 'specchio' visuale nel mondo dei diagrammi di Venn (c , \cap , \cup).

Corrispondenza 1: Negazione e Insieme Complementare

Logica Astratta

$$\neg P(x)$$

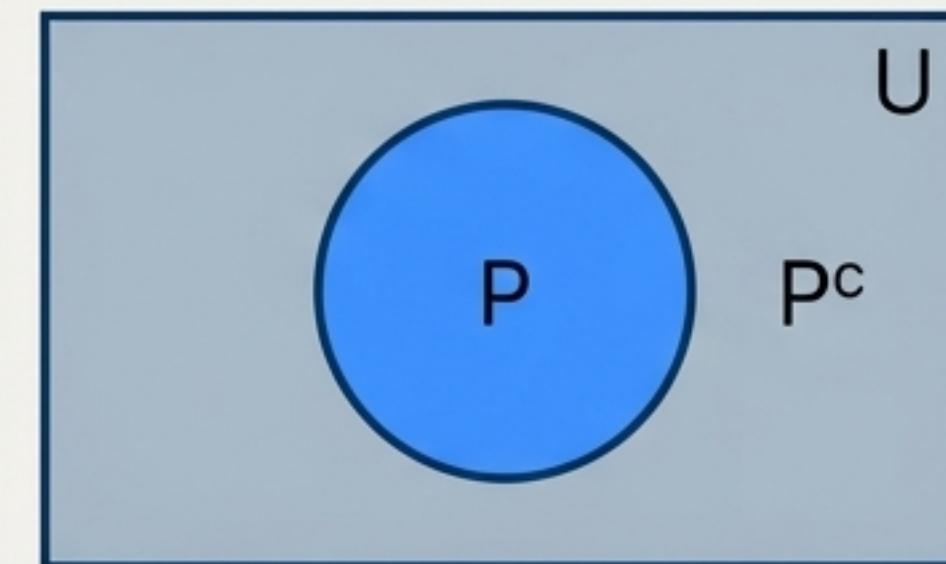
«NON $P(x)$ »

Se $U = \mathbb{Z}$ e $P(x)$: « x è positivo», allora $\neg P(x)$ significa « x non è positivo» (cioè x è zero o negativo).

Insiemi Concreti

$$P^c$$

L'insieme degli elementi di U che non sono in P .



Corrispondenza 2: Congiunzione e Intersezione

Logica Astratta

$A(x) \wedge B(x)$ (Congiunzione)

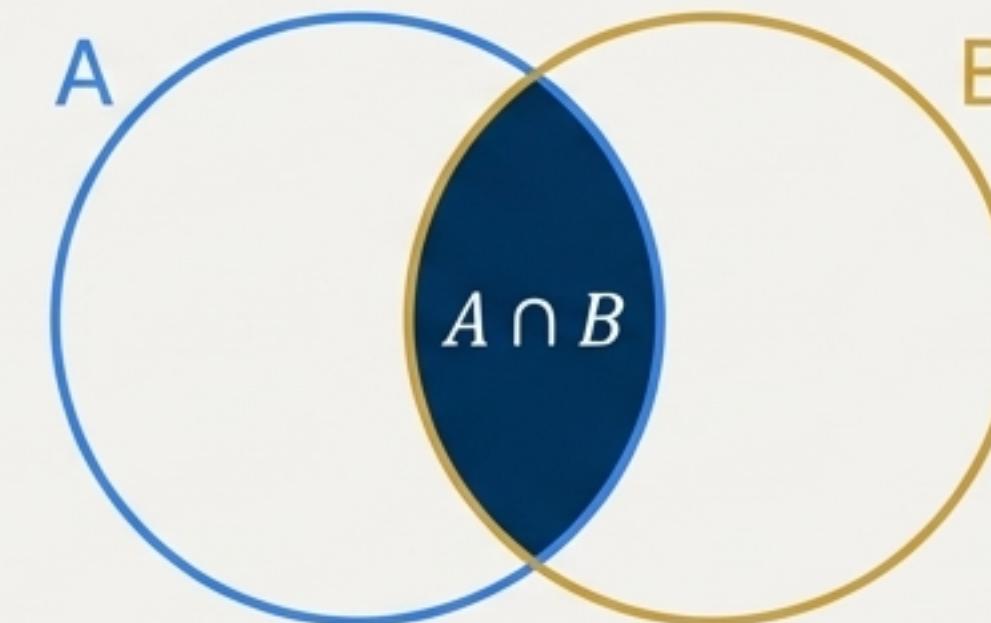
« $A(x)$ E $B(x)$ »

L'enunciato è vero solo se **entrambi** $A(x)$ e $B(x)$ sono veri.

Insiemi Concreti

$A \cap B$ (Intersezione)

L'insieme degli elementi che appartengono **sia** ad A **sia** a B .



Esempio: Congiunzione in Pratica

Scenario

Universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Enunciati:

$A(x)$: « x è un numero pari»

$B(x)$: « x è un multiplo di 3»

Congiunzione:

$A(x) \wedge B(x)$: « x è pari E multiplo di 3»

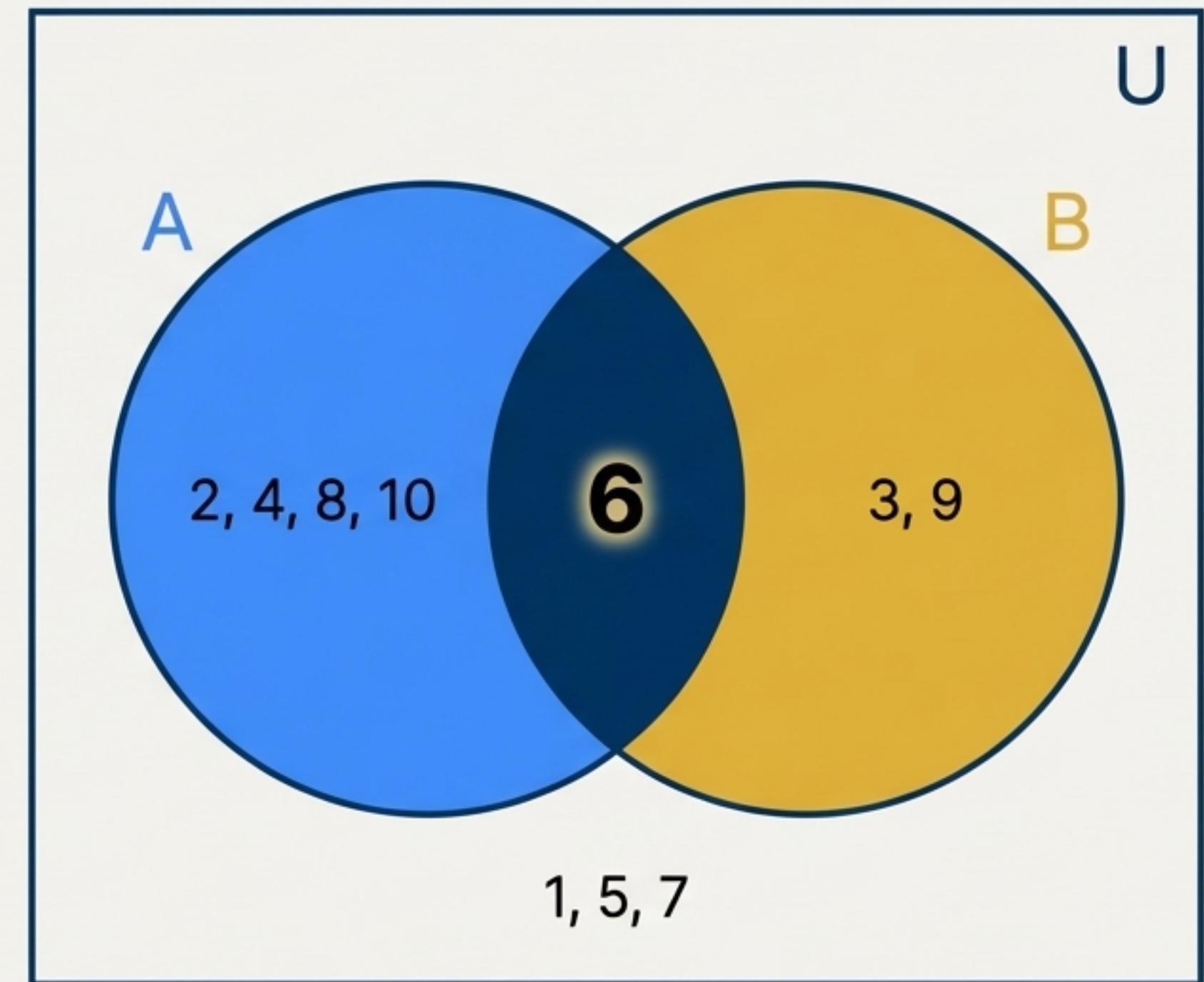
Insiemi di Verità:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{3, 6, 9\}$

L'insieme di verità della congiunzione è

$A \cap B = \{6\}$.



Corrispondenza 3: Disgiunzione e Unione

Logica Astratta

$A(x) \vee B(x)$ (Disgiunzione)

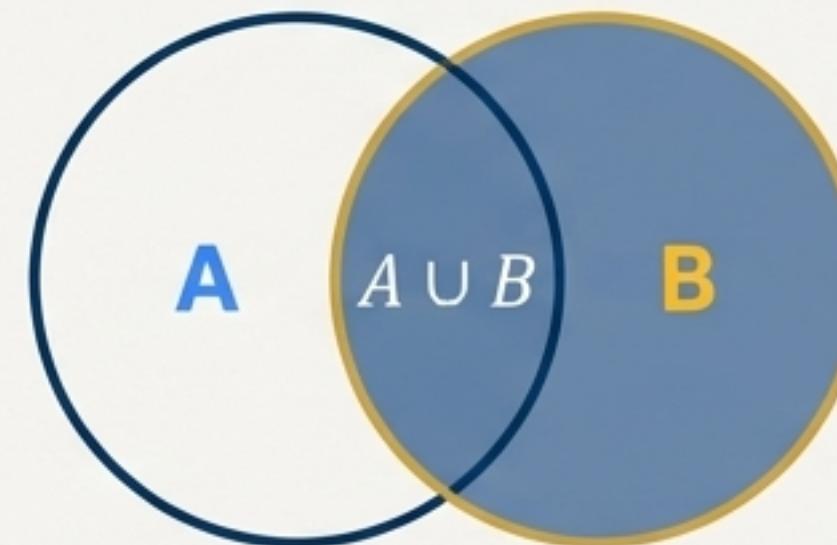
« $A(x) \vee B(x)$ »

L'enunciato è vero se **almeno uno** tra $A(x)$ e $B(x)$ è vero.

Insiemi Concreti

$A \cup B$ (Unione)

L'insieme degli elementi che appartengono ad A **o** a B (**o a entrambi**).



Esempio: Disgiunzione in Pratica

Scenario (stesso della slide 9 per confronto)

Universo $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Enunciati:

$A(x)$: « x è un numero pari»

$B(x)$: « x è un multiplo di 3»

Disgiunzione:

$A(x) \vee B(x)$: « x è pari O multiplo di 3»

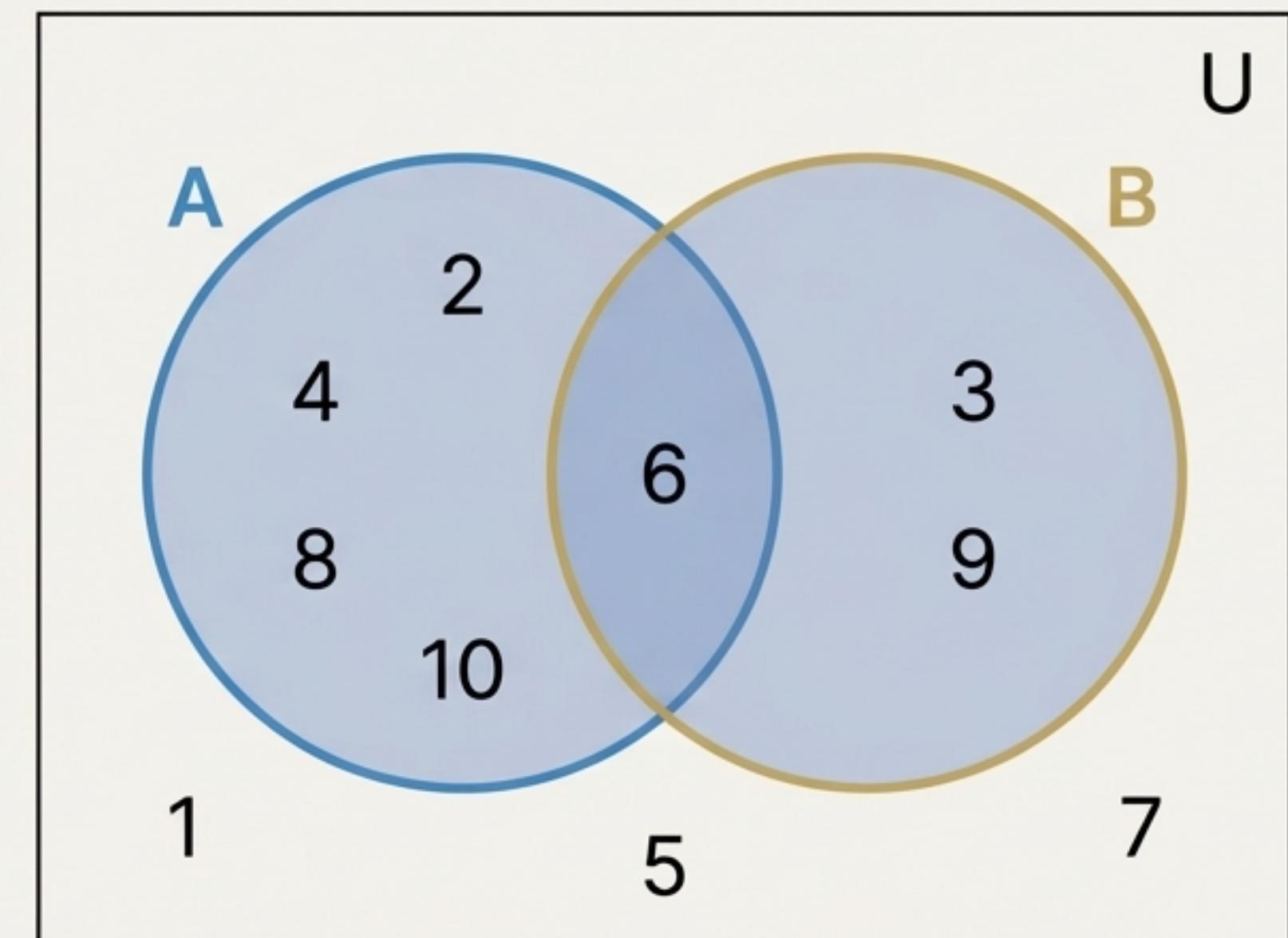
Insiemi di Verità:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{3, 6, 9\}$

L'insieme di verità della disgiunzione è

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.



Una Corrispondenza Avanzata: XOR e Differenza Simmetrica

Logica Astratta

Disgiunzione Esclusiva (XOR)

Significato

«O $A(x)$ O $B(x)$, ma non entrambi» (dal latino *aut*)

Concetto

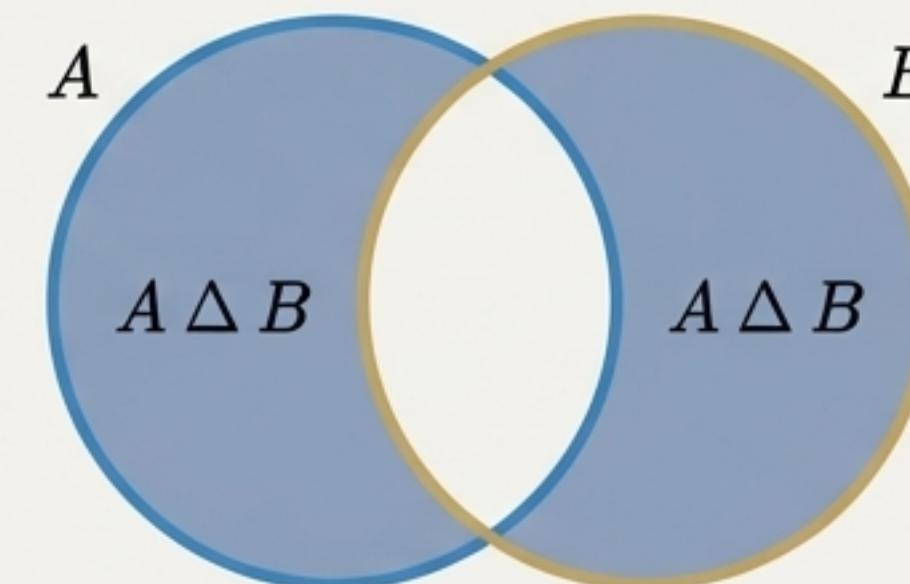
L'enunciato è vero solo se **esattamente uno** tra $A(x)$ e $B(x)$ è vero.

Insiemi Concreti

$A \Delta B$ (Differenza Simmetrica)

Significato

L'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B, **escludendo** quelli comuni.



Il Ponte Rivelato: Un Dizionario tra Logica e Insiemi

Mondo della Logica (Astratto)	Mondo degli Insiemi (Concreto)
Enunciato aperto $P(x)$	Insieme di verità P
Negazione $\neg P(x)$	Insieme Complementare P^c
Congiunzione $A(x) \wedge B(x)$	Intersezione $A \cap B$
Disgiunzione $A(x) \vee B(x)$	Unione $A \cup B$
Disgiunzione Esclusiva $A(x)$ aut $B(x)$	Differenza Simmetrica $A \Delta B$

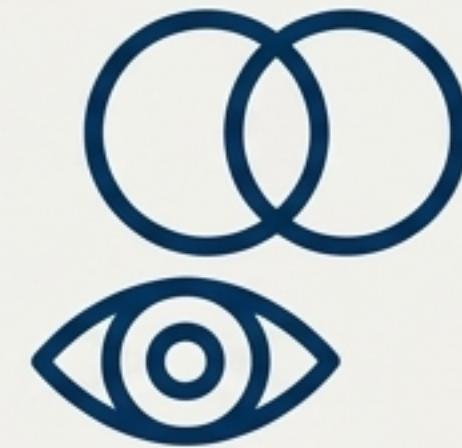
Perché Questo Ponte è Fondamentale?

Questa corrispondenza è più di un'elegante curiosità matematica. È uno strumento potente.



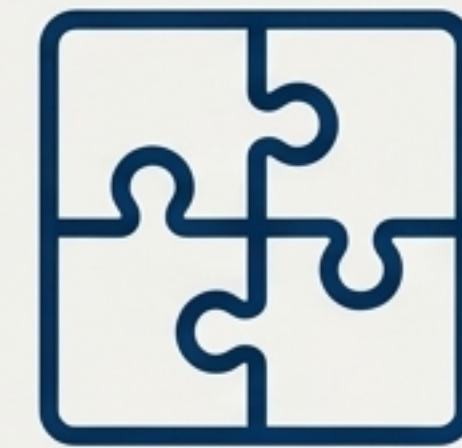
Traduzione

Permette di tradurre problemi di logica astratta in problemi di insiemistica, che sono visivi e più intuitivi da manipolare.



Visualizzazione

Ci consente di “vedere” le operazioni logiche attraverso i diagrammi di Venn, trasformando simboli astratti in forme concrete.



Unificazione

Rivela una struttura profonda e unificante alla base della matematica, mostrando come aree diverse siano in realtà due facce della stessa medaglia.

