Va bene, procediamo passo passo.

Dati due vettori:

$$\vec{F_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1) **Somma dei vettori**:
Per sommare due vettori, sommiamo le rispettive componenti.

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 2+3 \\ 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2) **Prodotto scalare** (o prodotto interno):
Il prodotto scalare tra due vettori si calcola moltiplicando le rispettive componenti e sommando i risultati:

$$\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) = 2 + 6 + 12 = 20$$

3) **Prodotto vettoriale**:
Il prodotto vettoriale tra due vettori in $\mathbb{R}^3$ si calcola come:

$$\vec{F_1} \times \vec{F_2} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Dove i, j, k sono le unità vettoriali lungo gli assi x, y e z rispettivamente.

Calcolando i determinanti per i, j e k otteniamo:

$$i \times ((2 \times 4) - (3 \times 3)) - j \times ((1 \times 4) - (3 \times 2)) + k \times ((1 \times 3) - (2 \times 2))$$

$$= i \times (8 - 9) - j \times (4 - 6) + k \times (3 - 4)$$

$$= -i + 2j - k$$

Quindi:

$$\vec{F_1} \times \vec{F_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

E questi sono i risultati per la somma, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale dei vettori dati.